É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 33, volume 1, dezembro de 2024

ISSN 2526-8651

Editorial

Caros Leitores,

Eis-nos juntos na última edição de 2024, um ano de consolidação do projeto do Jornal e abertura de novas frentes e contatos demonstrando a vitalidade da nossa proposta.

Esta edição traz na seção *artigo* o trabalho *Problemas com dígitos e divisibilidade*, de autoria dos professores Weverton B. Vieira e Eben A. Silva, respectivamente mestrando e docente do PROFMAT da Universidade Federal de Alagoas. O artigo aborda um tema que atravessa os séculos - da Escola Pitagórica às atuais olimpíadas de matemática - demonstrando a força do fascinante ramo da matemática que é a *Teoria dos Números*.

A seção *curiosidade* apresenta *A bola quadrada do Quico*, contribuição de Heloisa C. B. Gomes, egressa da Licenciatura em Matemática da UFRPE, levando o leitor a perceber que na matemática uma bola é algo mais do que o formato esférico usado nas brincadeiras infantis ou nos esportes.

O filme $X + Y$ é uma *indicação* do professor Marcelo O. Ribeiro, da Universidade Federal do Maranhão. Aborda um tema complexo pois o personagem central ao mesmo tempo que tem uma síndrome que o isola do convívio social, tem um talento especial para a matemática. Segundo o professor, o filme “com um enredo empolgante e personagens pensados sob medida, extrapola assuntos de matemática. É um percurso sobre amor, confiança e apoio,...”.

A seção *Quem pergunta, quer saber!* em sintonia com o tema da *seção artigo*, responde à pergunta: “qual o algarismo das unidades do número $(4! + 5! + 6! + ... + 137!)^{2n}$, com $n \in \mathbb{N}^*$?” dirigida à Revista do Professor de Matemática (RPM, n. 26, 1994, p.57).

Em relação aos *Problemas Propostos e Soluções*, a equipe do jornal traz as soluções das questões oriundas da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) 2023, segunda fase, nível 1. Além disso, são apresentados novos problemas propostos e soluções para os problemas da edição 31, enviadas pelo leitor Amaro J. O. Filho.

A experiência de produzir o jornal traz desdobramentos em várias frentes. Na Semana de Acolhimento dos Ingressantes do Curso de Licenciatura em Matemática da UFRPE, a professora Thamires S. Cruz, do Departamento de Matemática da UFRPE apresentou a palestra *O Número Mágico*, tema publicado na 8ª edição do Jornal.

No período de lançamento desta edição, durante o V Encontro dos Estudantes de Matemática da UFRPE, será apresentada a live/palestra do Professor Adriano Regis Rodrigues, do Departamento de Matemática da UFRPE, intitulada *Napoleão e as “Revoluções” no Plano Euclidiano*, revisitando um tema apresentado na 11ª edição do jornal.

Não podemos concluir o Editorial sem um agradecimento a cada leitor por prestigiar nosso trabalho, desejando um final de ano feliz e um 2025 exitoso em todos os sentidos.

A Redação.

Sumário

1. Artigo

Problemas com Dígitos e Divisibilidade

Weverton de Barros Vieira & Eben Alves Silva

UFAL - Departamento de Matemática
Campus Arapiraca
Arapiraca-AL - Brasil

Introdução

Este artigo tem o intuito de apresentar alguns problemas olímpicos interessantes que envolvem a noção e a habilidade de se manipular dígitos. Os problemas foram retirados da Olimpíada Alagoana de Matemática e despertam interesse e curiosidade por sua criatividade e que, apesar de possuírem enunciados simples, se mostram bastante desafiadores quanto as suas soluções.

Inicialmente, precisamos definir alguns conceitos matemáticos que serão úteis para as soluções propostas.

Conceitos Básicos

Os conceitos matemáticos enunciados a seguir foram retirados de [1].

Definição 1.1. Uma *progressão aritmética (PA)* é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de *razão* da progressão e é representada pela letra r.

Proposição 1.1. ***Termo geral de uma Progressão Aritmética***
Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3 \ldots)$ *de razão* r*, podemos calcular o n-ésimo termo desta sequência por* $a_n = a_1 + (n-1)r$.

As ideias para as demonstrações dos critérios de divisibilidade a seguir foram retiradas de [2].

Observação: Nas proposições a seguir usaremos $a = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ como a representação decimal do número natural a, ou seja,

$$a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0.$$

O resultado a seguir será utilizado para formalizar o critério de divisibilidade por 9 e consequentemente, por 3. Para sua demonstração, iremos utilizar o princípio da indução finita. Recomendamos que o leitor veja o artigo "O Princípio da Indução Finita" [4] na edição 28 da revista.

Proposição 1.2. $10^n - 1$ *é divisível por 9, para todo* $n \geq 1$.

Demonstração: Por indução, tem-se que para $n = 1$ temos $10^1 - 1 = 9$ que é divisível por 9. Suponha que $10^n - 1 = 9k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Multiplicando esta expressão por 10 em ambos os lados temos

$$\begin{aligned}
10(10^n-1) &= 10\cdot 9k && \Longrightarrow\\
10^{n+1}-10 &= 10\cdot 9k && \Longrightarrow\\
10^{n+1} &= 10\cdot 9k+10 && \Longrightarrow\\
10^{n+1} &= 10\cdot 9k+9+1 && \Longrightarrow\\
10^{n+1}-1 &= 9(10k+1).
\end{aligned}$$

Como $k\in\mathbb{Z}$, então $(10k+1)\in\mathbb{Z}$ e assim o resultado está provado.

Proposição 1.3. *Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível por 3 (resp. 9) é que* $a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$ *seja divisível por 3 (resp. 9).*

Demonstração: Veja que $a-(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0)$ pode ser desenvolvido como

$$\begin{aligned}
& a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_1\cdot 10^1+a_0-\\
&\qquad (a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0)=\\
&\qquad a_n\cdot(10^n-1)+a_{n-1}\cdot(10^{n-1}-1)+\\
&\qquad\qquad \cdots+a_1\cdot(10^1-1).
\end{aligned}$$

Usando o fato que 10^k-1 é múltiplo de 9, para todo $k\in\mathbb{N}$, temos que

$$a=(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0)+9q.$$

Dessa igualdade, seguem os critérios de divisibilidade por 3 e por 9.

Os resultados a seguir serão utilizados para formalizar critérios de divisibilidade por 7, 11 e 13.

Proposição 1.4. $1000^{2n}-1$ *é divisível por 1001, para todo* $n\geq 1$.

Demonstração: Por indução, para $n=1$ temos $1000^{2\cdot 1}-1=999999=1001\cdot 999$. Logo, o passo base está verificado. Agora suponha que $1000^{2n}-1=1001k$, $k\in\mathbb{Z}$. Multiplicando esta última relação por 1000^2:

$$\begin{aligned}
(1000^{2n}-1)\cdot 1000^2 &= 1001k\cdot 1000^2\\
1000^{2n+2}-1000^2 &= 1001k\cdot 1000^2\\
1000^{2(n+1)} &= 1001k\cdot 1000^2+1000^2\\
1000^{2(n+1)} &= 1001k\cdot 1000^2+1000^2-1+1\\
1000^{2(n+1)}-1 &= 1001k\cdot 1000^2+1001\cdot 999\\
1000^{2(n+1)}-1 &= 1001(1000^2k+999).
\end{aligned}$$

Como $k\in\mathbb{Z}$, segue que $(1000^2k+999)\in\mathbb{Z}$ e assim o resultado está provado.

Proposição 1.5. $1000^{2n-1}+1$ *é divisível por 1001, para todo* $n\geq 1$.

Demonstração: Por indução, para $n=1$ tem-se $1000^{2\cdot 1-1}+1=1001$, que é divisível por 1001. Agora suponha que $1000^{2n-1}+1=1001k$, $k\in\mathbb{Z}$. Multiplicando ambos os membros por 1000^2:

$$\begin{aligned}
1000^2(1000^{2n-1}+1) &= 1000^2\cdot 1001k\\
1000^{2n+1}+1000^2 &= 1000^2\cdot 1001k\\
1000^{2n+1+1-1} &= 1000^2\cdot 1001k-1000^2\\
1000^{2(n+1)-1} &= 1000^2\cdot 1001k-1000^2+1-1\\
1000^{2(n+1)-1}+1 &= 1000^2\cdot 1001k-(1000^2-1)\\
1000^{2(n+1)-1}+1 &= 1000^2\cdot 1001k-1001\cdot 999\\
1000^{2(n+1)-1}+1 &= 1001(1000^2k-999).
\end{aligned}$$

Como $k\in\mathbb{Z}$, segue que $(1000^2k-999)\in\mathbb{Z}$ e assim o resultado está provado.

Proposição 1.6. *Uma condição necessária e suficiente para que um número a seja divisível por 7 (resp. 11, 13) é que*

$$a_2a_1a_0-a_5a_4a_3+a_8a_7a_6-a_{11}a_{10}a_9+\cdots$$

seja divisível por 7 (resp. 11, 13).

Demonstração: Pelas proposições anteriores temos que se k é ímpar, então 10^k+1 é divisível por $1001=7\cdot 11\cdot 13$; por outro lado, se k é par, então 10^k-1 é divisível por $1001=7\cdot 11\cdot 13$. Assim, segue que

$$
\begin{aligned}
&a - [a_2a_1a_0 - a_5a_4a_3 + a_8a_7a_6 - a_{11}a_{10}a_9 + \cdots]\\
&= (a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + \cdots)\\
&- [a_2a_1a_0 - a_5a_4a_3 + a_8a_7a_6 - a_{11}a_{10}a_9 + \cdots]\\
&= (a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 - a_2a_1a_0)+\\
&+ (a_5 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_5a_4a_3)+\\
&+ (a_8 \cdot 10^8 + a_7 \cdot 10^7 + a_6 \cdot 10^6 - a_8a_7a_6)+\\
&+ (a_{11} \cdot 10^{11} + a_{10} \cdot 10^{10} + a_9 \cdot 10^9 + a_{11}a_{10}a_9)\\
&+ \cdots\\
&= 0 + a_5a_4a_3(10^3 + 1) + a_8a_7a_6(10^6 - 1)+\\
&a_{11}a_{10}a_9(10^9 + 1) + \cdots\\
&= 1001q.
\end{aligned}
$$

Portanto, podemos escrever a como

$$
a = [a_2a_1a_0 - a_5a_4a_3 + a_8a_7a_6 - a_{11}a_{10}a_9 + \cdots] \\
+1001q, q \in \mathbb{Z}.
$$

O que demonstra a proposição.

Problemas Olímpicos

Os problemas apresentados a seguir foram retirados do acervo de provas anteriores da Olimpíada Alagoana de Matemática, que podem ser consultadas em [3].

(OAM - 2006) Problema 1. Quantos números de três dígitos, divisíveis por 3, podem ser formados com os algarismos 1, 3, 5, 7 ou 9?

Solução: Vamos dividir nossa análise nos seguintes casos:

- números com algarismos iguais: a soma dos algarismos dos números 111, 333, 555, 777 e 999 resultam em números múltiplos de 3 e portanto todos são divisíveis por 3. Portanto, há 5 números deste tipo.

- números com algarismos diferentes: Os ternos de algarismos (1,3,5), (3,5,7), (5,7,9) e (1,5,9) quando somados resultam em números múltiplos de 3. Para cada terno de algarismos é possível formar $3! = 6$ números diferentes. Como há quatro ternos de algarismos, há $4 \times 3! = 24$ números deste tipo.

- números com dois algarismos iguais: os ternos de algarismos (1,1,7), (3,3,9), (7,7,1) e (9,9,3) quando somados resultam em números múltiplos de 3. Tomando como exemplo o terno $(1, 1, 7)$, é possível obter os números $117, 171$ e 711, ou seja, três números. De modo análogo, com raciocínio similar para os outros ternos de algarismos, é possível formar 3 números distintos para cada trio. Como há quatro ternos de algarismos, há $4 \times 3 = 12$ números deste tipo.

Assim, o total números divisíveis por 3 que podem ser formados pelos algarismos $1, 3, 5, 7$ e 9 são $5 + 24 + 12 = 41$ números.

(OAM 2019) Problema 2. Um numero é dito **rafoso** se ele é múltiplo de 3 e formado por dois números consecutivos em ordem decrescente. Por exemplo: 2019 é rafoso pois $2019 = 3 \times 673$ e é formado pelos números consecutivos 20 e 19. Determine a quantidade de números rafosos de 4 dígitos.

Solução: Note que os números de 4 dígitos formados por dois números consecutivos em ordem decrescente são os números

$$(1009, 1110, 1211, 1312, 1413, \ldots, 9897, 9998).$$

Note que 1110, 1413 e 1716 são números rafosos, pois são os primeiros números da sequência acima que são múltiplos de 3, de modo que

$$1413 - 1110 = 1716 - 1413 = 303,$$

portanto, formam uma P.A. de razão 303. Veja que o termo geral dessa P.A. é dado por

$$a_n = 1110 + (n - 1)303.$$

Uma forma de analisar este problema é que estamos estudando uma sequência de números de quatro algarismos formado por dois números consecutivos em ordem decrescente. Considere o número $abcd$ rafoso, ou seja, ab é o sucessor de cd e $a+b+c+d = 3k, k \in \mathbb{Z}$. Para obter o próximo número da sequência devemos acrescentar uma unidade nos números ab e cd e assim ter o número $a(b+1)c(d+1)$. Note que a soma dos algarismos deste número é $a+b+c+d+2 = 3k+2$, ou seja, não é um múltiplo de 3. O próximo número da sequência é $a(b+2)c(d+2)$ que tem a soma dos algarismos $a+b+c+d+4 = 3k+4$, novamente, não múltiplo de 3.

Analogamente, o próximo número da sequência é $a(b+3)c(d+3)$ que possui a soma dos algarismos $a+b+c+d+6 = 3k+6$, este sim, múltiplo de 3. Então dado um número rafoso, para obter o próximo número rafoso basta acrescentar 3 no algarismo das centenas e 3 no algarismo das unidades, ou seja, acrescentar 303. Ou seja, como 1110 é rafoso, para se obter o próximo número rafoso basta somar 3 aos números 11 e 10 e temos 1413, valendo para todos a seguir.

Assim, para determinar a quantidade de números rafosos de 4 dígitos basta calcular o número de termos desta progressão aritmética. Utilizando a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética, temos:

$$\begin{aligned}
a_n = a_1 + (n-1)r &\implies \\
9897 = 1110 + (n-1)\cdot 303 &\implies \\
(n-1)\cdot 303 = 9897 - 1110 &\implies \\
(n-1)\cdot 303 = 8787 &\implies \\
n-1 = \frac{8787}{303} &\implies \\
n-1 = 29 &\implies \\
n = 30.&
\end{aligned}$$

Portanto, existem 30 números rafosos de 4 dígitos.

(OAM - 2015) Problema 3. Quantos números existem de 2015 algarismos cuja soma dos algarismos é igual a 3 e não existem três algarismos uns?

Solução: Excetuando os casos onde não existem três algarismos uns, para a soma dos algarismos ser igual a 3 só restam dois casos (1) : Um algarismo é 3 e todos os outros são zeros ou (2): Um algarismo é 1, outro é 2 e todos os restantes são zeros. Assim, considerando que o algarismo inicial do número não pode ser o zero:

- O único número de 2015 algarismos possíveis com um único algarismo 3 é o número $3\underbrace{000\ldots000}_{2014-\text{zeros}}$, com 2014 algarismos zeros.
- Se o número iniciar com o algarismo 1, restam 2014 maneiras distintas de se posicionar o algarismo 2. Logo existem 2014 números distintos.
- Se o número iniciar com o algarismo 2, restam 2014 maneiras distintas de se posicionar o algarismo 1. Logo existem 2014 números distintos.

Assim, o total de números de 2015 algarismos cuja soma dos algarismos é igual a 3 é $1+2014+2014 = 4029$.

(OAM - 2009) Problema 4. Sejam a e b dígitos. Quantos números da forma $30a0b03$ são divisíveis por 13?

Solução: Para o número ser divisível por 13, basta que $b03 - a0 + 3$ seja divisível por 13. Note que

$$\begin{aligned}
b03 - a0 + 3 &= 100b + 3 - 10a + 3 \\
&= 100b - 10a + 6 \\
&= 91b - 13a + 9b + 3a + 6 \\
&= 13(7b - a) + 3(3b + a + 2).
\end{aligned}$$

Para isso, como a e b são dígitos, o maior valor que a, b pode assumir é 9. Assim, o maior valor que $3b + a + 2$ pode assumir é 38. Portanto, precisamos encontrar os valores de a e b para termos $3b + a + 2$ igual a 13 ou 26. Isso ocorre

- quando $b = 1$ e $a = 8$
- quando $b = 2$ e $a = 5$

- quando $b = 3$ e $a = 2$
- quando $b = 5$ e $a = 9$
- quando $b = 6$ e $a = 6$
- quando $b = 7$ e $a = 3$
- quando $b = 8$ e $a = 0$.

Portanto, há 7 números na forma $30a0b03$ que são divisíveis por 13.

(OAM - 2006 - Adaptado) Problema 5. Um número natural positivo n é dito *dobrado* se ao escrevermos seus dígitos na ordem inversa, obtemos exatamente o dobro de n. Por exemplo, 2004 não é dobrado pois $4002 \neq 2(2004)$. Mostre que não existe números dobrados menores que 1000.

Solução: Para fazermos a prova pedida, basta verificarmos que não existe número dobrado para números de 1, 2 ou 3 algarismos.
Números de 1 algarismo: Considerando que a escrita dos dígitos na ordem inversa de um número de 1 algarismo é o próprio número temos:
- 1 não é dobrado, pois $1 \neq 2(1)$
- 2 não é dobrado, pois $2 \neq 2(2)$
- 3 não é dobrado, pois $3 \neq 2(3)$
- 4 não é dobrado, pois $4 \neq 2(4)$
- 5 não é dobrado, pois $5 \neq 2(5)$
- 6 não é dobrado, pois $6 \neq 2(6)$
- 7 não é dobrado, pois $7 \neq 2(7)$
- 8 não é dobrado, pois $8 \neq 2(8)$
- 9 não é dobrado, pois $9 \neq 2(9)$.

Números de 2 algarismos: Seja ab um número de dois algarismos. Ao escrevermos seus dígitos em ordem inversa teremos o número ba. Para ab ser dobrado devemos ter

$$\begin{aligned} ba &= 2ab & \Longrightarrow \\ 10b + a &= 2(10a + b) & \Longrightarrow \\ 10b + a &= 20a + 2b & \Longrightarrow \\ 8b &= 19a. \end{aligned}$$

Como $a, b \neq 0$ e $mdc(8, 19) = 1$, não existem algarismos a, b que satisfaçam a relação acima.
Números de 3 algarismos: Seja abc um número de três algarismos. Ao escrevermos seus dígitos em ordem inversa teremos o número cba. Para abc ser dobrado devemos ter

$$\begin{aligned} cba &= 2abc & \Longrightarrow \\ 100c + 10b + a &= 2(100a + 10b + c) & \Longrightarrow \\ 100c + 10b + a &= 200a + 20b + 2c. \end{aligned}$$

Note que devemos necessariamente ter $a < 5$, pois se não, $cba \geq 1000$, ou seja, será um número de 4 algarismos. Agora, vamos verificar os seguintes casos:
(1) $a = 1$: Não é possível pois assim cba é ímpar e não pode ser escrito como $2(abc)$.
(2) $a = 2$: Devemos ter $c = 1$ ou $c = 6$. Assim, se $c = 1$:

$$\begin{aligned} 100 \cdot 1 + 10b + 2 &= 200 \cdot 2 + 20b + 2 & \Longrightarrow \\ 100 + 10b + 2 &= 400 + 20b + 2 & \Longrightarrow \\ 10b &= -300 & \Longrightarrow \\ b &= -30. \end{aligned}$$

O que não é possível, pois $b > 0$.
Mas se $c = 6$:

$$\begin{aligned} 100 \cdot 6 + 10b + 2 &= 200 \cdot 2 + 20b + 2 \cdot 6 & \Longrightarrow \\ 600 + 10b + 2 &= 400 + 20b + 12 & \Longrightarrow \\ 10b &= 190 & \Longrightarrow \\ b &= 19. \end{aligned}$$

O que não é possível, pois $b < 10$.
(3) $a = 3$: Não é possível pois $2(abc)$ resulta em um número par, logo, não há como resultar em um número terminado no algarismo 3.
(4) $a = 4$: Devemos ter $c = 2$ ou $c = 7$. Assim, se $c = 2$:

$$\begin{aligned} 100 \cdot 2 + 10b + 4 &= 200 \cdot 4 + 20b + 2 \cdot 2 & \Longrightarrow \\ 10b &= -600 & \Longrightarrow \\ b &= -60. \end{aligned}$$

O que não é possível, pois $b > 0$.

Mas se $c = 7$:

$$\begin{aligned} 100 \cdot 7 + 10b + 4 = 200 \cdot 4 + 20b + 2 \cdot 7 &\implies \\ 700 + 10b + 4 = 800 + 20b + 14 &\implies \\ 10b = -110 &\implies \\ b = -11. & \end{aligned}$$

O que não é possível. Logo, não existe número dobrado menor que 1000.

(OAM - 2022) Problema 6. Encontre um número de 4 dígitos $abcd$ tal que se multiplicarmos 4 o número obtido tem os mesmos dígitos em ordem contrária, isto é, $4 \cdot abcd = dcba$.

Solução: Note que se $a \geq 3$, $dbca$ terá mais que 4 dígitos. Portanto, $a = 1$ ou $a = 2$. Porém como todos os múltiplos de 4 são pares, $a \neq 1$ e assim, $a = 2$. Por consequência, $d = 8$. Analogamente, se $b \geq 3$, $dcba$ terá mais que 4 dígitos. Assim, $b < 3$. Aplicando o algoritmo usual da multiplicação, obtemos que $4c + 3$ deve ser igual a um número cujo o algarismo das unidades seja b. Isso só é possível se $c = 2$ ou $c = 7$. Daí se $c = 2$, devemos ter $b = 1$ e assim $4b = 4$ o que não é coerente pois $4b + 1$ deve resultar em um número cujo algarismo das unidades seja c. Agora, se $c = 7$, devemos ter $b = 1$ e $4b + 3 = 7$, o que é válido. Portanto o número $abcd$ é igual a 2178.

(OAM - 2022) Problema 7. Quantos números ab de dois algarismos são tais que ao multiplicar ab por qualquer número entre 1 e 9 resulta em um número cuja soma dos seus algarismos é $a + b$?

Solução: Seja cde um número de três algarismos tal que $n \cdot (ab) = (cde)$, com $n \in \mathbb{Z}$ tal que $1 \leq n \leq 9$. Representando $ab = 10a+b$ e $cde = 100c+10d+e$ temos,

$$\begin{aligned} n \cdot (10a + b) = 100c + 10d + e &\implies \\ n \cdot (9a + a + b) = 99c + c + 9d + d + e &\implies \\ n \cdot (9a + (a + b)) = 9(11c + d) + c + d + e &\implies \\ 9a \cdot n + n \cdot (a + b) = 9(11c + d) + c + d + e &\implies \\ 9a \cdot n - 9(11c + d) = c + d + e - n \cdot (a + b). & \end{aligned}$$

Como queremos que $a + b = c + d + e$, chamemos essas somas de k. Assim,

$$\begin{aligned} 9(a \cdot n - 11c - d) = k - n \cdot k &\implies \\ 9(a \cdot n - 11c - d) = k(1 - n) &\implies \\ 9(11c + d - a \cdot n) = k(n - 1). & \end{aligned}$$

Perceba que como $1 \leq n \leq 9$ então $0 \leq (n-1) \leq 8$. Desta forma, para a igualdade ser verdadeira, k deve ser múltiplo de 9. Como $k = a + b$, então $k = 9$ ou $k = 18$. Portanto, os números ab elegíveis são os múltiplos de 9, ou seja, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90 e 99.

Fazendo algumas checagens, vemos que os seguintes produtos de números cuja soma dos algarismos é 9 tem resultados cuja soma dos algarismos é 18:

- $27 \times 7 = 189$
- $36 \times 8 = 288$
- $54 \times 7 = 378$
- $63 \times 6 = 378$
- $72 \times 8 = 576$
- $81 \times 9 = 729$.

Portanto, os únicos múltiplos de 9 cujos produtos por qualquer número entre 1 e 9 resultam em números cuja soma dos algarismos é igual ao número original são 18, 45, 90 e 99.

(OAM - 2019) Problema 8. Chamamos de **resenheiro** todo número que possui um múltiplo cujas 4 primeiras casas decimais são 2019. Por exemplo, 3 é resenheiro, pois $20193 = 6731 \times 3$. Mostre que todo inteiro positivo é resenheiro.

Solução: Um número resenheiro é da forma $2019a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_2a_1a_0$. Podemos reescreve-lo na forma

$$\begin{aligned} 2019\underbrace{00\cdots0}_{k \text{ zeros}} + a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_2a_1a_0 &= \\ 2019 \cdot 10^k + a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_2a_1a_0. & \end{aligned}$$

Fazendo $t = a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_2a_1a_0$, tomando $N = 2019 \cdot 10^k + t$, com $10^k \geq n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Seja r o resto da divisão de $2019 \cdot 10^k$ por n. Desta forma temos que $0 \leq r \leq n-1$ e portanto, somando $-n$ à desigualdade temos $-n \leq r-n \leq -1$. Invertendo a desigualdade, temos $1 \leq n-r \leq n$. Como $n \leq 10^k$, então vale que $1 \leq n-r \leq n \leq 10^k$. Assim, o número $2019 \cdot 10^k + (n-r)$ tem sua representação decimal iniciada por 2019.

Como $2019 \cdot 10^k = n \cdot c + r$ para $c \in \mathbb{Z}$, então adicionando $n-r$ em ambos os membros, segue que

$$2019 \cdot 10^k + (n-r) = n \cdot c + r + (n-r) = n \cdot (c+1)$$

é múltiplo de n, e assim, n é resenheiro.

Problema Propostos

(OAM-2024) Problema 1. Considere o número $N = 2024202420242024$ que tem 16 dígitos. João brinca de apagar 5 dígitos desse número para formar outro número. Por exemplo, certa vez ele apagou todos os zeros e o último quatro, obtendo o número 22422422422. Com essa brincadeira, qual o maior número que João pode obter?

(OAM-2024) Problema 2. O ano 2024 é especial, pois 2024 é igual ao produto de dois números pares consecutivos, ou seja, $2024 = 44 \cdot 46$. Qual o último ano do milênio em que estamos (ou seja, menor que 3000), que tem essa propriedade?

(OAM-2022) Problema 3. Quantos números ab de dois algarismos são tais que ao multiplicar ab por qualquer número entre 1 e 9 resulta em um número cuja soma dos seus algarismos é $a+b$?

(OAM-2021) Problema 4. Dizemos que um número com $2n$ algarismos é elaino quando a soma dos seus primeiros n algarismos, da esquerda para a direita, é maior que ou igual a soma dos n últimos algarismos. Por exemplo, o número 9721 é elaino, pois $9+7 = 16$; $2+1=3$ e $16 > 3$. Encontre a quantidade de números elainos de quatro algarismos.

Referências

[1] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta**. 4ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2023. (Coleção PROFMAT).

[2] STEFFENON, Rogério Ricardo; GUARNIERE, Felipe Milan. **Belos Problemas de Matemática Discreta.** 2ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2024. (Coleção Olimpíadas de Matemática)

[3] OAM. Provas Anteriores, 2023. Disponível em: OAM - PROVAS ANTERIORES. Acesso em: 17 de Junho 2024.

[4] SILVA, Isis Gabriella de Arruda Quinteiro. O Princípio da Indução Finita. **É matemática, oxente!.** 28ª edição. Pernambuco, 2023.

2. Curiosidades

A bola quadrada do Quico

Heloisa Cardoso Barbosa Gomes[1]

Figura 2.1: Quico

Fonte: Ego - Globo.

A "bola quadrada do Quico" é uma expressão humorística da série mexicana "Chaves", criada por

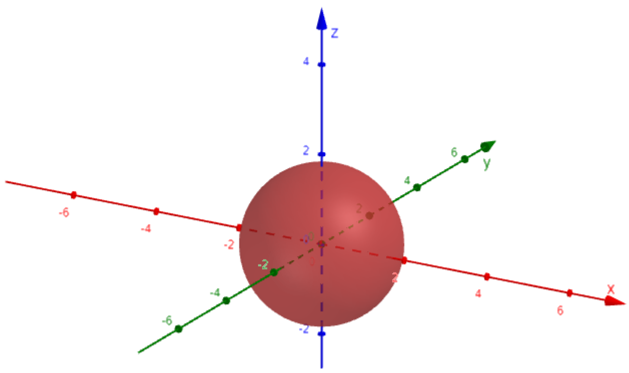
[1]Egressa da Licenciatura em Matemática da UFRPE

Roberto Bolaños. Quico, interpretado por Carlos Villagrán, utiliza essa ideia de forma cômica em situações absurdas. Um exemplo é o episódio em que Quico recorre à chantagem contra o Professor Girafales, outro personagem do seriado, na esperança de obter a tão almejada bola quadrada.

A ideia de uma “bola quadrada” contradiz a concepção convencional de uma bola como uma figura tridimensional e redonda. No entanto, de maneira intrigante, ela pode existir matematicamente, mesmo que não na métrica euclidiana.

O termo “bola” é empregado naturalmente em seu sentido geométrico, evocando a forma arredondada de um objeto.

Figura 2.2: Bola Fechada



Fonte: Autoria Própria.

A definição matemática de uma bola fechada de centro a e raio r em um espaço métrico M é o conjunto $B[a; r]$ formado pelos pontos de M que estão a uma distância menor do que ou igual a r do ponto a, ou seja,

$$B[a; r] = \{x \in M; d(x; a) \leq r\}.$$

Tal definição fundamenta-se no conceito de distância. Uma distância é uma função que atribui um número real a cada par de pontos no espaço métrico. No entanto, para ser considerada uma distância, uma função d definida em um conjunto não-vazio X, contido em um espaço métrico M, deve satisfazer os seguintes requisitos: se A, B e C são pontos no conjunto X, então

i. $d(A, B) \geq 0$;

ii. $d(A, B) = 0$ se, e somente se, $A = B$;

iii. $d(A, B) = d(B, A)$;

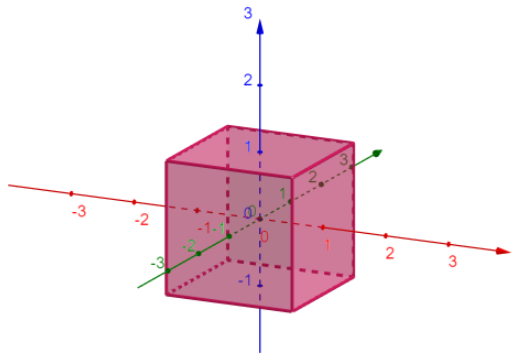
iv. $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$.

Diversas funções atendem a esses requisitos, por exemplo, a distância euclidiana, oriunda do Teorema de Pitágoras, que é a distância entre dois pontos $P = (p_1, p_2, p_3)$ e $Q = (q_1, q_2, q_3)$ definida por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}.$$

Outro exemplo de distância é a “distância do máximo”, expressa como:
$d_{\max}(P, Q) = \max\{|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|, |p_3 - q_3|\}$. Utilizando essa medida, a esfera com centro na origem $C = (0, 0, 0)$ e raio 1 é o conjunto de pontos $P = (a, b, c)$ no $\mathbb{R}^3$, onde $d_{\max}(P, C) = 1$. A representação geométrica dessa esfera é a bola quadrada do Quico, uma figura com formato cúbico que desafia a ideia de uma bola redonda:

Figura 2.3: Bola Quadrada



Fonte: IFMG com Ciência.

Referências

[1] Naves, Fernando augusto. Quico e sua boa quadrada, 13 de setembro de 2021. disponível em: https://ciencia.bambui.ifmg.edu.br/index.php/arquivos/arquivo/setembro-2021/quico-e-sua-bola-quadrada. Acesso em: 18/01/2024.

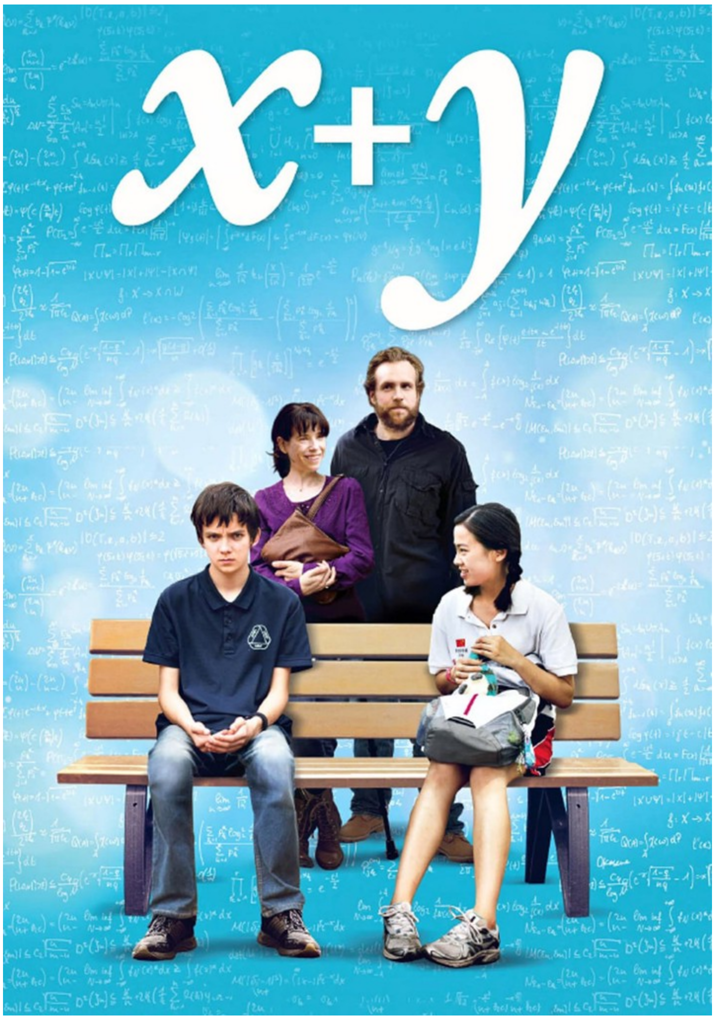
[2] Lima, E. L. Espaços métricos. IMPA, 2009.

3. Indicação de filme

X+Y

Marcelo Oliveira Ribeiro[2]

marcelo.or@ufma.br



Lançado no ano de 2014, esse filme de nome curioso, conta a história de Nathan Ellis (Asa Butterfield), um garoto prodígio, portador da síndrome de Asperger que, por causa dela, tem dificuldades em se relacionar socialmente. Nathan é apaixonado por números desde muito cedo e descobre a Olimpíada Internacional de Matemática, uma competição para alunos do ensino médio do mundo inteiro, realizada a cada ano em um país diferente. Nathan passa a receber treinamento especializado para entrar no time que irá representar o Reino Unido na olimpíada. O seu tutor especial é o Sr. Humphreys (Rafe Spall), um professor não convencional e anárquico que convive com uma doença chamada esclerose múltipla.

O longa-metragem traça a jornada de Nathan rumo à participação na Olimpíada Internacional de Matemática, e o vemos sair do subúrbio da Inglaterra para um período em um campo de treinamento de matemática, em Taiwan. Nesse lugar, uma forte amizade se desenvolve com a jovem chinesa Zhang Mei (Jo Yang). Ao longo da história, é possível perceber diversos diálogos e situações variadas que envolvem matemática e, além disso, alguns nomes importantes do passado são mencionados, como, por exemplo, Srinivasa Ramanujan (1887–1920), Isaac Newton (1643–1727), Godfrey H. Hardy (1877–1947) e Bertrand Russell (1872–1970).

Com um enredo empolgante e personagens pensados sob medida, $X+Y$ é, acima de tudo, um filme que extrapola assuntos de matemática. É um percurso sobre amor, confiança e apoio, demonstrando que, embora o universo dos números seja exato e às vezes inalterável, os sentimentos e relacionamentos humanos não o são.

Referências

[1] ADOROCINEMA. **X+Y**. Disponível em: https://www.adorocinema.com/filmes/filme-194009/. Acesso em: 5 out. 2024.

[2] COELHO, Victor Dourado; CINTRA, VANESSA DE PAULA; PEIXOTO, Rafael. **Matemática e cinema ao longo de 25 anos: algumas interpretações.** Educação em Revista, v. 40, p. e45795, 2024.

[3] IMDB. **X+Y**. Disponível em: https://www.imdb.com/title/tt3149038/. Acesso em: 12 out. 2024.

[2]Docente da Universidade Federal do Maranhão.

4. Quem pergunta, quer saber!

Revista do Professor de Matemática (RPM, nº 26, p.57)

Severino Barros de Melo[3]

Na Revista do Professor de Matemática (RPM) (nº 26, 1994, p.57) um leitor de Primavera (SP) pergunta: qual o algarismo das unidades do número

$$(4! + 5! + 6! + \cdots + 137!)^{2n}, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*?$$

Resposta da RPM:

Lembrando que $m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$, $m \in \mathbb{N}^*$, observamos que $m!$ é múltiplo de 10, para todo $m \geq 5$, porque os fatores 2 e 5 comparecem em $m!$.

Assim, $5! + 6! + \cdots + 137!$ é uma adição em que todas as parcelas são múltiplos de 10 e, portanto, a soma é múltiplo de 10 (na verdade, esse resultado independe de estarmos considerando uma soma até 137!).

Como $5!+6!+\cdots+137!$ termina em 0 e $4! = 24$, o número $4! + 5! + 6! + \cdots + 137!$ termina em 4.

Assim temos:

$$(4!+5!+6!+\cdots+137!)^{2n} = [(\underbrace{4! + 5! + 6! + \cdots + 137!}_{terminaem\ 4})^2]^n$$

onde o número entre colchetes termina em 6, porque 4^2 termina em 6.

Como 6^n termina em $6, n \in \mathbb{N}^*$, o último algarismo de $(4!+5!+6!+\cdots+137!)^{2n}$ é 6 (e o resultado é o mesmo se substituirmos 137! por qualquer $n!$, com $n \geq 5$).

5. Eventos

Fiquem Ligados!!!

- **56º Programa de Verão 2025**
  - Local: Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) - Recife
  - Data: 06 de janeiro a 28 de fevereiro de 2025
  - Inscrições: Até 31 de dezembro de 2024
  - Mais informações: `https://sites.google.com/view/verao2025`
- **Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio - PAPMEM**
  - Local: Virtualmente com transmissão pelo YouTube do IMPA.
  - Data: 27 a 31 de janeiro de 2025
  - Inscrições: 16 de dezembro de 2024 a 23 de janeiro de 2025
  - Mais informações: `https://impa.br/ensino/papmem-janeiro-de-2025/`
- **I Encontro Regional de Pesquisadores em Ensino de Ciências e Matemática – I EREPECIM**
  - Local: Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT) - Barra do Bugres - Mato Grosso
  - Data: 10 a 14 de março de 2025
  - Mais informações: `https://eventos.faepenmt.com.br/ierepecim?even3_orig=online_category/`
- **XVI Seminário Nacional de História da Matemática - SNHM**
  - Local: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-Rio-Grandense - Pelotas - Rio Grande do Sul
  - Data: 13 a 16 de abril de 2025
  - Mais informações: `https://eventos.ifsul.edu.br/snhm2025?even3_orig=online_category/`

[3] Docente do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco

- **XV Encontro Nacional de Educação Matemática**
  - Local: Universidade Federal do Amazonas
  - Data: 28 de julho a 01 de agosto de 2025
  - Mais informações: `https://www.even3.com.br/enem2025/`

6. Soluções de Olimpíadas

OPEMAT 2023 - Nível 1

Nesta edição apresentaremos a resolução das questões discursivas e de verdadeiro ou falso da prova da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2023 referentes ao nível 1.

Problema 6.1. Um número natural n é dito quase-primo se existe um único número natural k, com $1 < k < n$, tal que k divide n. Por exemplo, 4 é um número quase-primo pois 2 é o único natural entre 1 e 4 que divide 4, mas 12 não é um número quase-primo, visto que 2 e 3 dividem 12. Determine a quantidade de números quase-primos entre 1 e 400.

Solução. Suponha que n é um número quase-primo. Então, o número natural k que divide n tal que $1 < k < n$ é único com essa propriedade.

Afirmação 1: k é um número primo.

Se k não fosse primo então existiria algum número natural q com $1 < q < k$ tal que q divide k, isto é, q também dividiria n tal que $1 < q < n$, o que contradiz o fato de n ser um número quase-primo.

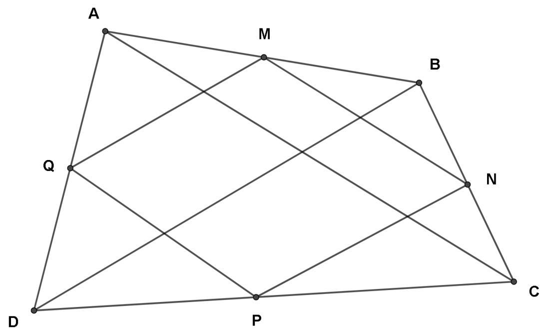
Afirmação 2: $n = k^2$.

De fato, se k divide n tal que $1 < k < n$ então existe algum número natural q com $1 < q < n$ tal que $n = k \cdot q$. Pela unicidade, segue que $k = q$. Logo, $n = k^2$.

Note que $400 = 20^2$. Então, entre 1 e 20 existem exatamente 8 números primos, isto é, $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$ e 19. Assim, os números quase-primos são dados por $2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2$ e 19^2.

Portanto, o total de números quase-primos entre 1 e 400 é 8. □

Problema 6.2. Considere $ABCD$ um quadrilátero convexo conforme mostra a figura abaixo:



Sejam M, N, P e Q os pontos médios dos segmentos AB, BC, CD e DA, respectivamente. Denote por $[MNPQ]$ a área do quadrilátero $MNPQ$ e $[ABCD]$ a área do quadrilátero $ABCD$. Calcule o valor da razão

$$\frac{[MNPQ]}{[ABCD]}.$$

Solução. Desde que os pontos M e Q são pontos médios dos segmentos AB e AD, respectivamente, então o segmento QM é uma base média do triângulo ABD e consequentemente, $\overline{QM} = \dfrac{BD}{2}$. Além disso, os triângulos AQM e ABD são semelhantes cuja razão de semelhança é de $1:2$. Denotando por $[AQM]$ e $[ABD]$ as áreas dos triângulos AQM e ABD, segue que

$$\frac{[AQM]}{[ABD]} = \frac{1}{4}.$$

Usando os mesmos argumentos e notações para os outros triângulos, concluímos que

$$\frac{[DQP]}{[ACD]} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{[PCN]}{[BCD]} = \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{[MNB]}{[ABC]} = \frac{1}{4}. \quad (3)$$

Assim,

$$\begin{aligned}[AQM] &= \frac{[ABD]}{4}, [DQP] = \frac{[ACD]}{4}\\ PCN &= \frac{[BCD]}{4}, [MNB] = \frac{[ABC]}{4}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}[AQM] &+ [DQP] + [PCN] + [MNB]\\ &= \frac{1}{4}\cdot[ABD] + \frac{1}{4}[ACD]\\ &+ \frac{1}{4}[BCD] + \frac{1}{4}[ABC])\\ &= \frac{[ABCD]}{2}.\end{aligned}$$

Portanto, $[MNPQ] = \dfrac{[ABCD]}{2}$ e daí segue que a razão $\dfrac{[MNPQ]}{[ABCD]}$ é $\dfrac{1}{2}$. □

Problema 6.3. O π-raia dispõe de R$ 176,00 reais para comprar chocolates. Ele vai à uma loja que os oferece em apenas dois tipos: brancos e pretos. Os chocolates brancos valem R$ 5,00 reais e os chocolates pretos valem R$ 7,00 reais. Utilizando o valor total exato disponível pelo π-raia, qual é a menor e maior quantidade de chocolates que ele pode comprar?

Solução. Para determinar a maior quantidade de chocolates que o π-raia pode comprar com 176,00 reais, devemos comprar mais chocolates brancos, que são os mais baratos e, portanto, menos chocolates pretos. Logo, devem-se comprar a menor quantidade de chocolates pretos de modo que o valor restante seja um múltiplo de 5. Tem-se:

$$176 = 7 + 169, 176 = 2\times 7 + 162, 176 = 3\times 7 + 155$$

Como 169 e 162 não são múltiplos de 5 e $155 = 31\times 5$, a menor quantidade de chocolates pretos que podemos comprar é 3 e, com o restante dos 176 reais, podemos comprar 31 chocolates brancos. Assim, 34 é a maior quantidade de chocolates que o π-raia pode comprar com os 176 reais; 3 pretos e 31 brancos.

Para determinar a menor quantidade de chocolates que se podem comprar com os 176 reais, devem-se comprar mais chocolates pretos que são os mais caros e, portanto, menos chocolates brancos. Então, devem-se comprar a menor quantidade de chocolates brancos de modo que o valor restante seja um múltiplo de 7. Temos:

$$176 = 5 + 171, 176 = 2\times 5 + 166, 176 = 3\times 5 + 161.$$

Como 171 e 166 não são múltiplos de 7 e $161 = 23\times 7$, a menor quantidade de chocolates que o π-raia pode comprar com os 176 reais são 26 chocolates: 3 brancos e 23 pretos. □

Problema 6.4. Uma certa empresa deseja implementar um projeto que prevê a construção de diversas ferrovias ligando 4 cidades. O projeto estipula ainda algumas regras que devem ser seguidas:

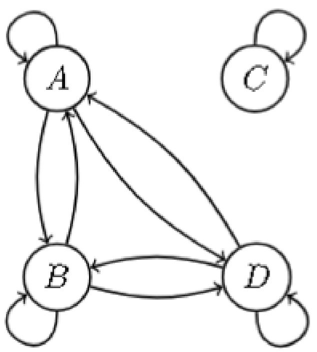
i. Entre duas cidades distintas quaisquer podem haver no máximo duas ferrovias;

ii. Toda cidade deve possuir uma única ferrovia ligando ela à si mesma;

iii. Se houver uma ferrovia ligando uma cidade A à outra cidade B, deve haver também uma ferrovia ligando B à A;

iv. Se houver uma ferrovia ligando uma cidade A à outra cidade B, e uma segunda ferrovia ligando B à C, então deve haver uma terceira ferrovia ligando A à C.

Para exemplificar uma possível implementação do projeto, a empresa forneceu ainda um diagrama, onde as 4 cidades são representadas pelas letras A, B, C e D e as ferrovias, por flechas, conforme abaixo:



De quantas maneiras distintas a empresa pode implementar esse projeto?

Solução. Seja $X = \{A, B, C, D\}$ o conjunto das cidades. Diremos que duas cidades, não necessariamente distintas, se comunicam se houver uma ferrovia entre elas. Note que cada maneira de se implementar o projeto divide as 4 cidades em grupos (não-vazios) de cidades que se comunicam entre si. Além disso, dadas quaisquer duas cidades, há apenas duas possibilidades: (i) elas pertencem ao mesmo grupo e, portanto, se comunicam; (ii) elas pertencem à grupos distintos, e não se comunicam. Assim, por exemplo, uma maneira de implementar o projeto seria dividir as cidades nos 2 grupos abaixo:

$$\{A, B, D\}, \text{ e } \{C\}.$$

Note que esta maneira corresponde ao diagrama fornecido no enunciado do problema. Ora, podemos dividir o conjunto X em grupos da seguinte forma:

1. Um único grupo com todas as cidades;
2. Um grupo com 3 cidades e outro grupo com uma cidade;
3. Um grupo com 2 cidades e outro grupo com 2 cidades;
4. Um grupo com 2 cidades, outro com uma cidade e um terceiro com uma cidade;
5. Quatro grupos com uma cidade cada.

No caso 1, só existe uma única maneira de formar um grupo com as 4 cidades. No caso 2, a escolha da cidade que não se comunicará com as demais determina a divisão dos dois grupos. Isso pode ser feito de 4 modos. No caso 3, escolha uma cidade qualquer. Há 3 outras cidades com quem essa cidade pode se relacionar. Feito essa escolha, os dois grupos ficam determinados. No caso 4, há $4 \cdot 3 = 12$ maneiras de se escolher as duas cidades que irão se comunicar. Porém cada escolha dessa foi contada duas vezes, logo existem apenas 6 maneiras distintas. Uma vez escolhida o grupo com 2 cidades, os demais grupos ficam determinados. Por fim, no caso 5, há uma única maneira de se formar 4 grupos com uma cidade cada.

Resulta que o número total de maneiras distintas de se implementar o projeto é $1+4+3+6+1 = 15$.

□

Problema 6.5. Uma lotérica vende bilhetes de loteria numerados sequencialmente de 100.000 até 500.000. Um bilhete é premiado se o número formado pelos seus 3 últimos dígitos é igual ao dobro do número formado pelos seus 3 primeiros dígitos.

(A) Encontre os três bilhetes premiados com menor numeração e os três bilhetes premiados com maior numeração.

(B) Quantos bilhetes premiados existem?

(C) Determine a soma das numerações de todos os bilhetes premiados.

Solução. (A) Por inspeção os menores bilhetes premiados são 100200, 101202 e 102204. Também por inspeção, temos que os maiores bilhetes premiados são 499998, 498996 e 497994.

(B) Existe um bilhete premiado para cada número de 100 até 499. Logo, existem 400 bilhetes premiados.

(C) Seja n a numeração de um bilhete premiado. Se A representa o número formado pelos dígitos do milhar, das dezenas de milhar e das centena de milhar da numeração do bilhete n e B representa o número formado pelos dígitos das unidades, das dezenas e das centenas do bilhete n, então $n = 1000A + B$. Note que um bilhete é premiado quando $B = 2A$.

Observando os números obtidos no item (A), podemos observar que a diferença entre a numeração de um bilhete premiado e a numeração do próximo bilhete premiado indo de 100000 até 500000 é sempre 1002. Vamos provar isso.

Note que $n = 1000A + B$ é premiado com $100 \leq A < 499$, então o próximo bilhete premiado é o $m = (A+1) \cdot 1000 + B + 2$. Desse modo,

$$\begin{aligned} m - n &= 1000(A+1) + B + 2 - (1000A + B) \\ &= 1002. \end{aligned}$$

Assim, os bilhetes premiados são os com numeração $100200 + k.1002$ com k variando entre 0 e 399.

Temos que calcular a seguinte soma S com 400 parcelas:

$$S = 100200 + 101202 + \cdots + 498996 + 499998.$$

Note que a soma do primeiro com o último número da sequência é igual a soma do segundo com o penúltimo que por sua vez é igual a soma do terceiro com o antepenúltimo e assim por diante, ou seja,

$$\begin{aligned} 100200 + 499998 &= 101202 + 498996 \\ &= \cdots = 600198. \end{aligned}$$

Então, a soma S das numerações dos bilhetes é igual a uma soma com 200 parcelas iguais a 600198. Desse modo,

$$S = 600198 \cdot 200 = 120039600.$$

$\square$

7. Problemas

Convidamos o leitor a responder alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Enviem as soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, o envio do arquivo (.tex), no modelo disponível no site, deve ser realizado até **14/02/2025**.

Problema 1. (O. M. do Grande ABC - 2011) O último algarismo do número $3^{2011} + 4^{2011}$ é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Problema 2. (30ª OMRN - 2019) Dada uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz às seguintes condições:

- $f(1000) = 999$;
- $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

O valor de $f(500)$ é:

a) 1
b) $\frac{1}{500}$
c) $\frac{1}{999}$
d) -1
e) $\frac{1}{100}$

Problema 3 (OBMEP - 2010)**.** Duas folhas de papel, uma retangular e outra quadrada, foram cortadas em quadradinhos de 1 cm de lado. Nos dois casos obteve-se o mesmo número de quadradinhos. O lado da folha quadrada media 5 cm a menos que um dos lados da folha retangular. Qual era o perímetro da folha retangular?

a) 48
b) 68
c) 72
d) 82
e) 100

8. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n. 31, junho de 2024**.

Problema 1. (OBM - 2012) *Função Natural;* Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ e considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ e $f(2) = 0$ e, para todo natural $n \geq 1$, satisfaz as seguintes condições:

(i) $f(3n) = 3 \cdot f(n) + 1$;

(ii) $f(3n+1) = 3 \cdot f(n) + 2$;

(iii) $f(3n+2) = 3 \cdot f(n)$.

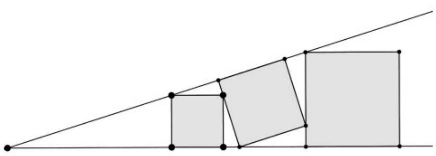
Então, $f(2012)$ é igual a:

a) 101 c) 103 e) 105

b) 102 d) 104

Solução. [4] Temos $f(2012) = f(3.670 + 2) = 3f(670) = 3[f(3.223 + 1)] = 3[3f(223) + 2] = 9f(223)+6 = 9[f(3.74+1)]+6 = 9[3f(74)+2]+6 = 27f(74)+18+6 = 27[f(3.24+2)]+24 = 27[3f(24)]+24 = 81f(24) + 24 = 81[f(3.8)] + 24 = 81[3f(8) + 1]+24 = 243f(8)+81+24 = 243[f(3.2+2)]+105 = 243[3f(2)] + 105 = 729f(2) + 105 = 729.0 + 105 = 105$. □

Problema 2. (Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte (OMRN) - 2019) Na figura abaixo as medidas dos lados dos quadrados menores são 3 e 4.

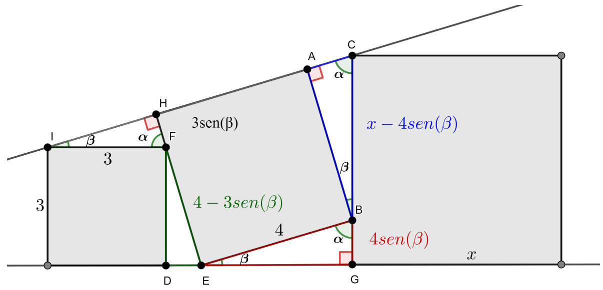


A medida x do lado do quadrado maior é:

a) $\dfrac{11}{3}$ c) $\dfrac{14}{3}$ e) $\dfrac{19}{4}$

b) $\dfrac{13}{3}$ d) $\dfrac{16}{3}$

Solução. Veja a imagem abaixo.



Note que, no triângulo BGE, temos:

$$sen(\beta) = \frac{BG}{4} \implies BG = 4sen(\beta).$$

E de forma similar, no triângulo HFI, temos

$$HF = 3sen(\beta).$$

Sendo o lado do quadrado maior igual a x, temos que $CG = x$. O que implica que $CB = x - 4sen(\beta)$. E de forma similar, $FE = 4 - 3sen(\beta)$, pois $HE = 4$.

Observe agora que, no triângulo ABC, temos:

$$\cos(\beta) = \frac{AB}{x - 4sen(\beta)}.$$

Sabemos que $AB = 4$, logo:

$$(x - 4sen(\beta))\cos(\beta) = 4 \Rightarrow$$
$$x\cos(\beta) - 4sen(\beta)\cos(\beta) = 4.$$

E no triângulo DEF, temos:

$$\cos(\beta) = \frac{3}{4 - 3sen(\beta)} \Rightarrow$$
$$4\cos(\beta) - 3sen(\beta)\cos(\beta) = 3.$$

Portanto, temos a seguinte relação:

$$\begin{cases} x\cos(\beta) & - & 4sen(\beta)\cos(\beta) & = & 4 \\ 4\cos(\beta) & - & 3sen(\beta)\cos(\beta) & = & 3 \end{cases}.$$

[4] A solução deste problema foi enviada pelo leitor Amaro José de Oliveira Filho. Agradecemos pela interação conosco e também pelo envio das demais soluções, mas por questão de completeza optamos por apresentar a solução do Comitê Editorial para os problemas 2 e 3.

Multiplicando a primeira equação por 3, a segunda por 4 e depois subtraindo os resultados, obtemos:

$$\begin{aligned} 3x\cos(\beta) - 16\cos(\beta) = 0 &\Leftrightarrow \\ \cos(\beta)(3x - 16) = 0 &\Leftrightarrow \\ \cos(\beta) = 0 \text{ ou } (3x - 16) = 0. \end{aligned}$$

Note que, $\cos(\beta) \neq 0$, pois $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

Logo,

$$(3x - 16) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{16}{3}.$$

Portanto, a alternativa correta é d).

□

Problema 3 (XXXI Olimpíada de Matemática da Unicamp (OMU) - 2015)**.** Tinha 900 reais para comprar algumas camisas, todas com o mesmo preço. Como obtive um desconto de 60 reais no preço de cada camisa consegui comprar quatro camisas a mais do que previa inicialmente comprar com os 900 reais. Determine quantas camisas comprei e o preço que paguei por cada camisa.

Solução. Vamos denotar por y o valor inicial de cada camisa e por x a quantidade de camisas que poderiam ser compradas com os 900 reais.

Assim, temos:

$$x.y = 900. \tag{4}$$

Como obtive um desconto de 60 reais, e desse modo, pude comprar mais quatro camisas, temos:

$$(x + 4).(y - 60) = 900. \tag{5}$$

Resolvendo a equação obtemos:

$$x.y - 60x + 4y = 1140. \tag{6}$$

Da equação (1) obtemos:

$$y = \frac{900}{x}. \tag{7}$$

Substituindo os valores de xy e y, das equações (4) e (7), na equação (6), obtemos:

$$900 - 60x + \frac{3600}{x} = 1140. \tag{8}$$

Resolvendo a equação (8), obtemos:

$$-60x^2 - 240x + 3600 = 0. \tag{9}$$

Simplificando a equação (9), temos a seguinte equação quadrática:

$$x^2 + 4x - 60 = 0, \tag{10}$$

cujas raízes são dadas por: $x = 6$ e $x = -10$.

Assim, x deve ser igual a 6, uma vez que $x = -10$ não serve como resposta, pois x é a quantidade de camisas, as quais poderiam ser compradas pelo valor de $y = \dfrac{900}{6} = 150$ reais cada.

Portanto, como obtive um desconto de 60 reais e consegui comprar quatro camisas a mais, comprei 10 camisas a um preço de 90 reais cada.

□