É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 31, volume 1, junho de 2024

ISSN 2526-8651

Editorial

Caros Leitores,

É com satisfação que estamos lhes apresentando a segunda edição do "Oxente" no ano de 2024. O jornal chega até vocês com ótimos conteúdos, além de muita energia e dedicação a um projeto que, pelo eco advindo das visualizações, nos estimula sempre mais.

A presente edição traz na seção *artigo* um trabalho intitulado Integrais Olímpicas, voltado para as olimpíadas universitárias, de autoria dos professores Carlos Gomes e Iesus Diniz, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

A seção *curiosidade* traz a contribuição do professor Gabriel Araújo Guedes, do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, abordando a Olimpíada Titãs da Matemática, com inscrições abertas pelo site `www.titasdamatematica.com.br`. Esta olimpíada tem características especiais porque propicia aos inscritos um suporte diferenciado nos estudos durante o período preparatório.

A *indicação de filme* apresenta "O preço do Desafio", sugestão da aluna Roberta Elaine Domingos de Araújo, do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco. Baseado em fatos reais, aborda as dificuldades e as vitórias de um professor de matemática num contexto desafiador em relação ao ensino da disciplina.

A seção *Quem pergunta, quer saber!* esclarece que não podemos confundir função linear com aquela cujo gráfico é uma "linha reta".

Finalizamos a edição com *Problemas Propostos, soluções de questões da Olimpíada Pernambucana de Matemática* (OPEMAT) 2022, segunda fase, nível 2 e com informes acerca de alguns *eventos* programados para 2024.

Não podemos finalizar o editorial sem agradecer a cada leitor que prestigia nosso trabalho, desejando um proveitoso encontro com nosso jornal.

Sumário

1. Artigo

Integrais Olímpicas

Carlos A. Gomes e Iesus C. Diniz

UFRN - Universidade Federal do Rio Grande do Norte
DMAT - Departamento de Matemática

Campus Universitário - Natal/RN - Lagoa Nova - Brasil

Introdução

Por volta do século V a.C. o problema de se determinar quadraturas, áreas de círculos e lunas, intrigava os geômetras, sendo atribuído a Hipócrates de Chios $(470-410)$ a.C. o cálculo das primeiras quadraturas da história. Antifon de Atenas $(480-411)$ a.C. tentou encontrar a área do círculo através de uma sequência de polígonos regulares inscritos [3] enquanto Brison de Heracles $(450-380)$ a.C. considerou polígonos regulares inscritos e circunscritos [8], apesar de em ambas situações haver o problema de uma soma de infinitas parcelas, isso foi uma ideia genial para o desenvolvimento do *Método da Exaustão* por Eudoxo de Cnido $(408-355)$ a.C., mas foi Arquimedes de Siracusa $(287-212)$ a.C. que a partir de tal método conseguiu resultados como a razão entre o volume e superfície de uma esfera inscrita num cilindro, volume de uma cunha cortada de um cilindro circular reto por dois planos e volume comum a dois cilindros circulares retos iguais que se cortam em ângulo reto e apresentou o primeiro resultado conhecido para uma aproximação do número π ao comparar 2π com os perímetros de dois polígonos de 96 lados um inscrito e outro circunscrito a uma circunferência de raio 1.

Somente em fins do século XVI e durante o século $XVII$ que vários matemáticos a partir de seus estudos em mecânica, gravitação, estudo dos movimentos, óptica e geometria deram significativas contribuições ao desenvolvimento do cálculo. Pode-se citar Johann Kepler $(1571-1630)$, René Descartes $(1596-1650)$, Bonaventura Cavalieri $(1598-1647)$, Pierre de Fermat $(1601-1665)$, Evangelista Torricelli $(1608-1647)$, Blaise Pascal $(1623-1662)$, John Wallis $(1616-1703)$, Isaac Barrow $(1630-1677)$, Johann Bernoulli $(1667-1748)$ e Jacques Bernoulli $(1654-1705)$, entretanto coube a Isaac Newton $(1642-1727)$ e Gottfried Leibniz $(1646-1716)$, de maneira independente, compilarem e desenvolverem os resultados já conhecidos até então. Newton apresentou os resultados anteriormente a Leibniz, mas a notação definida por Leibniz é a usada até hoje e de uso bem mais oportuno que a de Newton.

Um dos principais resultados da matemática é o *Teorema Fundamental do Cálculo*, produto de uma construção coletiva de conhecimentos desenvolvidos por grandes matemáticos e certamente algumas das mentes mais brilhantes de todos os tempos da humanidade. O Teorema Fundamental do Cálculo permite fazer a "ligação" entre o *Cálculo Diferencial* e o *Cálculo Integral*, aquele tendo surgido pela motivação em determinar retas tangentes a uma curva num ponto e taxas de variação instantâneas, enquanto este estava relacionado ao problema do cálculo de áreas e volumes.

Neste artigo apresentamos na seção 1 algumas desigualdades clássicas envolvendo integrais, os principais resultados da integração e soluções de problemas olímpicos envolvendo integração. Por fim na seção 1 são propostos diversos problemas olímpicos.

Desenvolvimento

O processo de integração é deveras mais complicado que o de diferenciação, enquanto se pode derivar a maior parte das funções utilizando-se a *Regra da Cadeia*, no caso de encontrarmos uma primitiva de uma função necessitamos de algumas técnicas de integração, propriedades e muitas vezes uma componente de criatividade. Nessa seção apresentaremos os principais resultados (veja [1] [6] [7] [5]) e as mais conhecidas desigualdades envolvendo a *Integral de Riemann*, além de exemplos olímpicos em que esses tópicos são utilizados.

Definição 1.1 (Soma Riemann)**.** Uma soma Riemann de uma função f relativa a uma partição

$\mathcal{P} := \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n = b\}$ do intervalo $[a, b]$ e os pontos $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i],\ i \in \{1, \ldots, n\}$ com $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ é definida por

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i. \tag{1}$$

Definição 1.2 (Integral Definida)**.** Uma função f é dita Riemann Integrável num intervalo $[a, b]$ se para qualquer partição $\mathcal{P}$ desse intervalo tivermos que existe

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i.$$

E indicamos por

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i.$$

Teorema 1.1 (Teorema do Valor Intermediário)**.** *Seja f contínua em $[a, b]$. Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Teorema 1.2 (Teorema do Valor Médio para Integrais)**.** *Se f for uma função contínua num intervalo $[a, b]$, então existe um ponto $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Demonstração: Desde que f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, o Teorema de Weierstrass, veja [5], nos garante que existe $m, M \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [a, b]$. Assim,

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx \ \Rightarrow$$
$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a) \ \Rightarrow$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a} \leq M.$$

Desde que f é contínua em $[a, b]$, o Teorema 1.1 nos garante que $\exists c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a} \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Teorema 1.3 (Teorema Fundamental do Cálculo - Versão 1)**.** *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\forall a, x \in I$*

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt, \tag{2}$$

então F é derivável em x com $F'(x) = f(x)$.

Demonstração: Da definição de F dada em (2) e do Teorema 1.2 segue-se que para $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}$$
$$= \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}$$
$$= \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = \frac{f(c)h}{h} = f(c), \quad c \in [x, x+h].$$

Desde que f é contínua em x e $c \in [x, x+h]$ tem-se que $\lim_{h \to 0} f(c) = f(x)$. Assim, existe F' em x com $F'(x) = f(x)$ pois

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(c) = f(x).$$

Teorema 1.4 (Teorema Fundamental do Cálculo - Versão 2)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é tal que $F'(x) = f(x),\ \forall x \in (a, b)$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração: Seja uma partição

$$\mathcal{P} := \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n = b\}$$

do intervalo $[a,b]$ em que $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ é o comprimento do i-ésimo subintervalo. Tem-se que

$$F(b) - F(a) = [F(x_1) - F(a)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \dots$$
$$\dots + [F(x_i) - F(x_{i-1})] + \dots [F(b) - F(x_{n-1})] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Desde que F é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), segue-se para todo $i \in \{1,\dots,n\}$ que F é contínua em $[x_{i-1}, x_i]$ e derivável em (x_{i-1}, x_i). Do Teorema do Valor Médio aplicado a cada um dos subintervalos tem-se que $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)\Delta x_i = f(c_i)\Delta x_i,\ c_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Assim,

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Tomando o limite quando o maior dos subintervalos da partição (norma da partição) tende a zero, segue-se que

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} [F(b) - F(a)] = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i. \quad (3)$$

O primeiro membro de (3) independe de $\max \Delta x_i$ e é portanto constante. O termo à direita em (3) é uma soma Riemann da função f relativa aos pontos c_i da partição $\mathcal{P}$, ou seja, a integral definida da função f no intervalo $[a,b]$.

Observação 1.1. O limite dado em (3) independe da partição escolhida, sendo suficiente que a norma da partição tenda a zero. De fato, o Teorema do Valor Médio sempre garante a existência de um ponto ξ_i no interior do i-ésimo subintervalo da partição tal que $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_i)\Delta x_i$.

Teorema 1.5 (Teorema Fundamental do Cálculo - Versão 3)**.** *Sejam $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis, então*

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x).$$

Demonstração: Seja $a \in I$, então

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = \int_{g(x)}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{h(x)} f(t)dt$$
$$= -\int_{a}^{g(x)} f(t)dt + \int_{a}^{h(x)} f(t)dt.$$

Assim, derivando em relação a x tem-se que

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt =$$
$$-\frac{d}{dx}\int_{a}^{g(x)} f(t)dt + \frac{d}{dx}\int_{a}^{h(x)} f(t)dt$$

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = -\frac{d}{du}\left(\int_{a}^{u} f(t)dt\right)\frac{du}{dx}$$
$$+\frac{d}{dv}\left(\int_{a}^{v} f(t)dt\right)\frac{dv}{dx}.$$

Do Teorema 1.3 juntamente com a regra da cadeia com $u = g(x)$ e $v = h(x)$ segue-se que

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = -f(u)u' + f(v)v'$$
$$= f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x).$$

Teorema 1.6 (Integração por Partes)**.** *Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ têm derivadas contínuas, então*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(b)g(b) - f(a)g(a)]$$
$$-\int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Demonstração: Derivando o produto das funções f e g em x e depois integrando ambos os lados tem-se que

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Logo

$$\int_a^b (f(x)g(x))'dx = \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx,$$

e desde que as funções $f'g$ e fg' são integráveis, a integral da soma dessas funções é a soma das integrais das funções. Assim,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \int_a^b (f(x)g(x))'dx - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Desde que $f(x)g(x) + k$ é uma primitiva de $(f(x)g(x))'$, do Teorema 1.4 segue-se o resultado.

Teorema 1.7 (Integração por Substituição)**.** *Sejam f uma função contínua, $g \in C^1$ (a derivada de g é contínua) e F uma primitiva de f, então*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + k.$$

Demonstração: Desde que a composição e o produto de funções contínuas ainda é uma função contínua, tem-se que $(f \circ g).g'$ é contínua em x. Ademais, desde que F é uma primitiva de f, tem-se via regra da cadeia que $[F(g(x))]' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$, portanto, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x))g'(x)$ e o resultado segue.

Teorema 1.8 (Mudança de variáveis na integral definida)**.** *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ com g' contínua em $[c, d]$ e $g([c, d]) \subset [a, b]$. Nessas condições*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt.$$

Demonstração: Desde que f é uma função contínua em $[a, b]$, então pelo Teorema 1.3 f admite uma primitiva F em $[a, b]$, ademais note que $H(t) := F(g(t))$ é uma primitiva de $f(g(t))g'(t)$ para todo $t \in [c, d]$, pois $H'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$. Assim, pelo Teorema 1.4 segue-se que

$$\begin{aligned}\int_c^d f(g(t))g'(t)dt &= F(g(d)) - F(g(c)) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

Definição 1.3 (Integral Imprópria)**.** Se f é uma função integrável em $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, então define-se para todo $c \in \mathbb{R}$ a integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)dx.$$

Analogamente, se f é integrável em $[a, \infty)$ ou $(-\infty, b]$ definem-se, respectivamente, as integrais impróprias de f como

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx \quad \text{e}$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

A seguir mostramos algumas das principais desigualdades envolvendo a integral de Riemann que são amplamente usadas em problemas das mais variadas áreas da matemática.

Lema 1.9 (Médias geométrica e aritmética ponderadas)**.** *Sejam $r_1, r_2 > 0$ e $0 < t < 1$, então*

$$(r_1)^t(r_2)^{1-t} \leq tr_1 + (1-t)r_2. \tag{4}$$

Demonstração: A função $f(x) = \ln x$ é côncava, i.e., se tomarmos dois valores quaisquer em seu domínio, r_1 e r_2, então a média ponderada de suas imagens é menor ou igual ao logaritmo natural de sua média ponderada.

Assim, $t \ln r_1 + (1-t) \ln r_2 \leq \ln(tr_1 + (1-t)r_2)$ e desde que a função $f(x) = e^x$ é crescente em x, tem-se que

$$\begin{aligned}
e^{t\ln r_1+(1-t)\ln r_2} &\le e^{\ln(tr_1+(1-t)r_2)}, \text{ ou seja,}\\
(e^{\ln r_1})^t(e^{\ln r_2})^{(1-t)} &\le tr_1+(1-t)r_2 \Leftrightarrow\\
(r_1)^t(r_2)^{1-t} &\le tr_1+(1-t)r_2.
\end{aligned}$$

Teorema 1.10 (Desigualdade de Young). *Sejam $p, q > 1$ com $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Se $a, b \ge 0$, então*

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \tag{5}$$

Demonstração: Segue-se diretamente de (4) tomando $t=\frac{1}{p}$, $(1-t)=\frac{1}{q}$, $r_1=a^p$ e $r_2=b^q$.

Teorema 1.11 (Desigualdade de Hölder). *Se $p, q > 1$ são números reais tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ e $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções tais que $\left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ e $\left(\int_a^b |f(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$, então*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração: Sejam p e q como definidos no Teorema 1.10 e na equação (5) considere A e B, respectivamente, em lugar de a e b dados por

$$A = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}} \quad \text{e} \quad B = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Segue-se então que

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\int_a^b |g(x)|^q dx}.$$

Integrando em relação à variável x ambos os termos da última inequação resulta que

$$\frac{\displaystyle\int_a^b |f(x)g(x)|dx}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p}\frac{\int_a^b |f(x)|^p dx}{\int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{1}{q}\frac{\int_a^b |g(x)|^q dx}{\int_a^b |g(x)|^q dx}.$$

E desde que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ o resultado segue, pois

$$\frac{\displaystyle\int_a^b |f(x)g(x)|dx}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Teorema 1.12 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções integráveis, então*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx.$$

Demonstração: Considere o polinômio quadrático $P(\lambda) = \displaystyle\int_a^b (f(x)+\lambda.g(x))^2 dx$. Como $(f(x)+\lambda.g(x))^2 \ge 0$, segue que $P(\lambda) \ge 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \int_a^b (f(x)+\lambda g(x))^2 dx\\
&= \int_a^b \left[((f(x))^2 + 2\lambda f(x)g(x) + \lambda^2 (g(x))^2\right] dx\\
&= \left(\int_a^b (g(x))^2 dx\right)\lambda^2 + \left(2\int_a^b f(x)g(x)dx\right)\lambda +\\
&+ \left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c, \text{ onde } a = \int_a^b (g(x))^2 dx,$$

$b = 2\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx$ e $c = \displaystyle\int_a^b (f(x))^2 dx$.

Por fim, sabemos que um polinômio quadrático com $(a > 0)$ é não negativo se, e somente se, $\Delta = b^2 - 4ac \le 0$. Então,

$$b^2 - 4ac \le 0 \Leftrightarrow b^2 \le 4ac \Leftrightarrow$$

$$\left(2\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq$$
$$4\left(\int_a^b (g(x))^2dx\right)\left(\int_a^b (f(x))^2dx\right) \Leftrightarrow$$

$$4\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq$$
$$4\left(\int_a^b (g(x))^2dx\right)\left(\int_a^b (f(x))^2dx\right) \Leftrightarrow$$

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq$$
$$\left(\int_a^b (g(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b (f(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, note que a igualdade ocorre se, e somente se, $b^2 - 4ac = 0$. Nesse caso, o polinômio $P(\lambda)$ possui uma única raiz real, isto é, existe um único número real λ_0 tal que $P(\lambda_0) = 0$, ou seja,

$$0 = P(\lambda_0) = \int_a^b (f(x) + \lambda_0 g(x))^2dx \Leftrightarrow$$
$$(f(x) + \lambda_0 g(x))^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\lambda_0 g(x),$$

ou seja, a igualdade ocorre se, e somente se, as funções f e g são múltiplos escalares, isto é, existe uma constante real k tal que $f = k \cdot g$.

Observação 1.2. A desigualdade de Cauchy-Schwarz é um caso particular da desigualdade de Hölder quando $p = q = 2$.

Teorema 1.13 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e $p > 1$, então*

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$
$$\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração: Inicialmente note as seguintes equivalências para p e q como definidos anteriormente

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \Leftrightarrow p = q(p-1). \qquad (6)$$

Note que

$$|f(x) + g(x)|^p = |f(x) + g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1},$$

segue-se que

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx =$$
$$= \int_a^b |f(x) + g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1}dx.$$

Desde que $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$, resulta que

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \leq \int_a^b |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1}dx$$
$$+ \int_a^b |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1}dx.$$

Aplicando a Desigualdade Hölder (Teorema 1.11) a cada uma das integrais no lado direito da desigualdade acima segue-se que

$$\int_a^b |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1}dx \leq$$
$$\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q}dx\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (7)$$

e

$$\int_a^b |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1}dx \leq$$
$$\left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q}dx\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (8)$$

Desde que $(p-1)q = p$, colocando-se em evidência o termo comum a cada uma das desigualdades dadas em (7) e (8) tem-se que

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx \leq \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{(p-1)q} dx\right)^{\frac{1}{q}} \times$$
$$\times \left[\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por $\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{-\frac{1}{q}}$ acarreta o resultado, pois

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{-\frac{1}{q}} =$$
$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 1.14 (Desigualdade de Chebyshev). *Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções crescentes integráveis, então*

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right).$$

Teorema 1.15 (Cauchy-Frullani). [9] *Seja $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ existem, então $\forall a, b \in \mathbb{R}$ com $a.b > 0$ tem-se que*

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx =$$
$$\left(\lim_{x\to\infty} f(x) - \lim_{x\to 0^+} f(x)\right)\ln\left(\frac{a}{b}\right).$$

Apresentaremos as soluções de problemas olímpicos em que são usados os resultados anteriormente descritos.

Problema 1.1 (OBMU-2019). Mostre que

$$\int_1^2 \frac{e^x(x-1)}{x(x+e^x)}dx = \ln\left|\frac{2+e^2}{2+2e}\right|.$$

Solução: Calculemos uma primitiva para a função dada e depois utilizemos o Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 1.4) para obtermos a integral definida pedida.

$$\int \frac{e^x(x-1)}{x(x+e^x)}dx = \int \frac{e^x(x-1)}{x.x(1+\frac{e^x}{x})}dx$$
$$= \int \frac{e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{e^x}{x}}dx.$$

Fazendo a mudança de variável $u = 1+\frac{e^x}{x}$, segue-se que $du = e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$, e portanto,

$$\int \frac{e^x(x-1)}{x(x+e^x)}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln\left|1+\frac{e^x}{x}\right| + k.$$

Assim, do Teorema 1.4 tem-se que

$$\int_1^2 \frac{e^x(x-1)}{x(x+e^x)}dx = \ln\left|1+\frac{e^2}{2}\right| - \ln|1+e|$$
$$= \ln\left|\frac{2+e^2}{2+2e}\right|.$$

Problema 1.2 (OBMU-2005). Calcule

$$\mathcal{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))dx.$$

Solução: Seja a mudança de variável $t = \frac{\pi}{4}-x$ com $dt = -dx$ na integral $\mathcal{I}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)(-dt) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan(t)}{1+\tan(t)}\right)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan(t)}\right)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 - \ln(1+\tan(t)))\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(t))dt.
\end{aligned}$$

Assim, desde que a última integral vale $\mathcal{I}$, tem-se que

$$2\mathcal{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2dt \Rightarrow \mathcal{I} = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

Problema 1.3 (OBMU-2010)**.** Calcule

$$\mathcal{J} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))\cos(x)}dx$$

Solução: Note inicialmente que podemos escrever

$$\frac{1}{(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))\cos(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)\left(1+\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right)} = \frac{\sec^2(x)}{1+\tan(x)}.$$

Assim,

$$\mathcal{J} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\frac{\sec^2(x)}{1+\tan(x)}dx.$$

Utilizando a técnica de integração por partes (Teorema 1.6) com $u = x$ e $dv = \frac{\sec^2(x)}{1+\tan(x)}$ em $\mathcal{J}$, segue-se que

$$\mathcal{J} = [x\ln(1+\tan(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))dx.$$

Assim, da integral definida do Problema 1.2 segue-se que

$$\mathcal{J} = \frac{\pi}{4}\ln(2) - \frac{\pi}{8}\ln 2 = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

Problema 1.4 (Putnam [10])**.** Calcule a integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}dx.$$

Solução: Fazendo a mudança de variável $x = \dfrac{\pi}{2} - y \;\Rightarrow\; dx = -dy$. Assim,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}dx = \\ = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{1+\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right)^{\sqrt{2}}}(-dy).$$

Note que

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)} = \frac{\cos(y)}{\operatorname{sen}(y)} = \frac{1}{\tan(y)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{1+\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right)^{\sqrt{2}}}(-dy) \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\tan(y))^{\sqrt{2}}}{1+(\tan(y))^{\sqrt{2}}}dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\tan(y))^{\sqrt{2}}}{1+(\tan(y))^{\sqrt{2}}}dy.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\tan(y))^{\sqrt{2}}}{1+(\tan(y))^{\sqrt{2}}}dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\tan(x))^{\sqrt{2}}}{1+(\tan(x))^{\sqrt{2}}}dx.\end{aligned}$$

Em que a última igualdade foi obtida trocando-se a variável de integração y por x, o que não altera o valor da integral definida. Logo,

$$2\mathcal{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+(\tan(x))^{\sqrt{2}}}{1+(\tan(x))^{\sqrt{2}}}dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathcal{I} = \frac{\pi}{4}.$$

Problema 1.5 (OBMU-2019)**.** Mostre que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos^2(2x)}dx = \frac{\pi^2}{16}.$$

Solução: Chamemos a integral definida acima de $\mathcal{I}$ e $t = \frac{\pi}{2} - x$, donde resulta $dt = -dx$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,\text{sen}(2x)}{1+\cos^2(2x)}dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\text{sen}(\pi-2t)}{1+\cos^2(\pi-2t)}(-dt).
\end{aligned}
$$

Lembrando que $\text{sen}(\pi-2t)=\text{sen}(2t)$ e $\cos(\pi-2t)=-\cos(2t)$, tem-se que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\text{sen}(2t)}{1+\cos^2(2t)}dt \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}(2t)}{1+\cos^2(2t)}dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\,\text{sen}(2t)}{1+\cos^2(2t)}dt.
\end{aligned}
$$

Note que a última integral dada é $\mathcal{I}$. Assim,

$$
2\mathcal{I} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}(2t)}{1+\cos^2(2t)}dt.
$$

Ademais

$$
\frac{d}{dx}\left[\frac{-\arctan(\cos(2x))}{2}+k\right] = \frac{\text{sen}(2x)}{1+\cos^2(2x)}.
$$

Logo, do Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 1.4) segue-se que

$$
\begin{aligned}
2\mathcal{I} &= \frac{\pi}{2}\left[\frac{-\arctan(\cos(2x))}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{\pi}{8}\left[\arctan(-1)-\arctan(1)\right] \\
&= -\frac{\pi}{8}\left[-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi^2}{16}.
\end{aligned}
$$

Problema 1.6 (Putnam [10])**.** Calcule

$$
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right). \qquad (9)
$$

Solução: Note que:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+2}+\ldots+\frac{n}{2n}\right) \\
=&\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}+\frac{1}{\frac{n+2}{n}}+\ldots+\frac{1}{\frac{n+n}{n}}\right) \\
=&\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) \\
=&\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i.
\end{aligned}
$$

Assim, (9) nada mais é que o limite de uma Soma Riemann da função $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ relativa à partição do intervalo $[0,1]$ com subintervalos de tamanhos iguais $\Delta x_i=\frac{1}{n}$, $\forall i=1,\ldots,n$ e $x_i^*=\frac{i}{n}$. Portanto, da Definição 1.2 e do Teorema 1.4 tem-se que

$$
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln(1+x)\big|_0^1 = \ln 2.
$$

Problema 1.7 (IMC-1995)**.** Seja $F:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ uma função definida por

$$
F(x) := \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt, \quad x>1.
$$

Mostre que F é injetiva e determine o seu conjunto imagem.

Solução: Seja $c\in(x,x^2)$, então

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_x^c \frac{1}{\ln t}dt + \int_c^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt \\
&= -\int_c^x \frac{1}{\ln t}dt + \int_c^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt.
\end{aligned}
$$

Do Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 1.3) segue-se que

$$
F'(x) = -\frac{1}{\ln(x)} + \frac{2x}{\ln(x^2)} = \frac{x-1}{\ln(x)} > 0 \quad \forall x>1.
$$

Assim, F é crescente para todo $x > 1$ e desde que $\lim_{x\to 1^+} F(x) = 0$ segue-se que $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.

Problema 1.8 (OBMU-2018)**.** Qual é o valor integral $\displaystyle\int_0^\pi \log(\text{sen}(x))dx$?

Solução: Note que

$$\int_0^\pi \log(\text{sen}(x))dx = \int_0^\pi \log\left(2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx$$
$$= \int_0^\pi \log(2)dx + \int_0^\pi \log\left(\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx + \int_0^\pi \log\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx$$
$$= \pi\log 2 + \int_0^\pi \log\left(\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx + \int_0^\pi \log\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx.$$

Agora vamos manipular separadamente as integrais

$$\int_0^\pi \log\left(\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx \text{ e } \int_0^\pi \log\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx.$$

Na integral $\displaystyle\int_0^\pi \log\left(\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx$ fazendo $u = \dfrac{x}{2}$, segue que $dx = 2du$ e os novos limites da integral são $u_1 = 0$ e $u_2 = \frac{\pi}{2}$. Portanto,

$$\int_0^\pi \log\left(\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx = 2\int_0^{\pi/2} \log(\text{sen}(u))du.$$

Apenas trocando a letra u pela letra x no segundo membro, segue que

$$\int_0^\pi log\left(\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx = 2\int_0^{\pi/2} \log(\text{sen}(x))dx.$$

Por outro lado, usando a identidade $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2}\right)$ podemos escrever

$$\int_0^\pi \log\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx = \int_0^\pi \log\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)\right)dx.$$

Nessa última integral fazendo $u = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2}$, segue que $dx = -2du$ e os novos limites da integral são

$$u_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{0}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ e } u_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \log\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx &= \int_0^\pi \log\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)\right)dx \\
&= -2\int_{\pi/2}^0 \log(\text{sen}(u))du \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \log(\text{sen}(u))du \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \log(\text{sen}(x))dx.
\end{aligned}$$

Por fim, voltando a igualdade

$$\int_0^\pi \log(\text{sen}(x))dx = \pi\log 2 + \int_0^\pi \log\left(\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx + \int_0^\pi \log\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx$$
$$= \pi\log 2 + 2\int_0^{\pi/2} \log(\text{sen}(x))dx + 2\int_0^{\pi/2} log(\text{sen}(x))dx$$
$$= \pi\log 2 + 4\int_0^{\pi/2} \log(\text{sen}(x))dx$$
$$= \pi\log 2 + 2\int_0^{\pi} \log(\text{sen}(x))dx,$$

ou seja,

$$\int_0^\pi log(\text{sen}(x))dx = \pi\log 2 + 2\int_0^\pi log(\text{sen}(x))dx.$$

Logo

$$\int_0^\pi \log(\text{sen}(x))dx = -\pi\log 2.$$

Problema 1.9 (OBMU-2005)**.** Mostre que

$$\int_0^1 x^{-x}dx = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots.$$

Solução: Usando o fato de que $e^\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!}$, segue que

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{-x}dx &= \int_0^1 e^{\ln x^{-x}}dx\\ &= \int_0^1 e^{-x\ln x}dx\\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x\ln x)^k}{k!}dx\\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}x^k\ln^k x dx\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{(-1)^k}{k!}x^k\ln^k x dx\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^1 x^k(-\ln x)^k dx.\end{aligned}$$

Agora vamos calcular a integral $\int_0^1 x^k(-\ln x)^k dx$. Para isso façamos a mudança de variável $u = -\ln x$, assim $x = e^{-u} \Rightarrow dx = -e^{-u}du$.

Note que $x = 0$ implica que $u \to \infty$ e $x = 1$ implica $u = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^k(-\ln^k x)dx &= \int_\infty^0 e^{-ku}u^k(-e^{-u}du)\\ &= \int_0^\infty u^k e^{-u(k+1)}du.\end{aligned}$$

Agora vamos fazer a mudança de variáveis $v = (k+1)u$. Assim,

$$dv = (k+1)du \Rightarrow du = \frac{1}{k+1}dv.$$

Então,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^k(-\ln x)^k dx &= \int_0^\infty u^k e^{-u(k+1)}du\\ &= \int_0^\infty \left(\frac{v}{k+1}\right)^k e^{-v}\frac{1}{k+1}dv\\ &= \int_0^\infty \frac{1}{(k+1)^{k+1}}v^k e^{-v}dv\\ &= \frac{1}{(k+1)^{k+1}}\int_0^\infty v^k e^{-v}dv.\end{aligned}$$

Lembrando que a função Γ, veja [2], é definida por $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$ e que para $t = k+1$ inteiro, tem-se que $\Gamma(k+1) = k!$, segue que

$$\frac{1}{(k+1)^{k+1}}\underbrace{\int_0^\infty v^k e^{-v}dv}_{=\Gamma(k+1)=k!} = \frac{k!}{(k+1)^{k+1}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{-x}dx &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^1 x^k(-\ln x)^k dx\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{k!}{(k+1)^{k+1}}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^{k+1}}.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $n = k+1$, segue que

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{-x}dx &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^{k+1}}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots\end{aligned}$$

Problema 1.10 (MIT-2024)**.** Calcule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^x(x)(\ln\cos(x) - x\tan(x))dx.$$

Solução: Se $f(x) = \cos^x(x) = e^{x\ln\cos(x)}$, então

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^{x\ln\cos(x)}\frac{d}{dx}(x\ln\cos(x))\\ &= \cos^x(x)(\ln\cos(x) - x\tan(x)).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^x(x)(\ln\cos(x) - x\tan(x))dx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d}{dx}\cos^x(x)dx = [\cos^x(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\frac{\pi}{2}} - \cos^0(0) = -1.\end{aligned}$$

Problema 1.11 (OMRN-2021 [15])**.** Calcule a integral definida

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x^2+1}dx.$$

Solução: Como consequência do Teorema 1.8 (mudança de variável) tem-se que a integral de uma função ímpar e contínua em uma região simétrica vale 0.

De fato f é contínua, pois é o quociente de duas funções contínuas e está definida em toda a região de integração e é ímpar, com efeito

$$f(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-\operatorname{sen} x}{x^2+1} = -f(x).$$

Problema 1.12 (Galois Noether-2011 [14])**.** Seja f uma função diferenciável com $\lim_{x\to 0} f(x^2) = c$. Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{x^2}.$$

Solução: O limite pedido é uma indeterminação. Aplicando a regra de L'Hospital tem-se que a derivada do numerador pode ser obtida a partir do Teorema 1.3 com a regra da cadeia. De fato,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} f(t)dt = \frac{d}{du}\left(\int_0^{u} f(t)dt\right)\frac{du}{dx} &\overset{(Teo\ 1.3)}{=} f(u)2x\\ &= f(x^2)2x.\end{aligned}$$

Assim, procedendo ao cálculo do limite entre a razão das derivadas obtém-se

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x^2)2x}{2x} = \lim_{x\to 0} f(x^2) = c. \tag{10}$$

Desde que o limite entre a razão das derivadas existe e vale c, por L'Hospital tem-se que o limite pedido também existe e vale c.

Problema 1.13 (IMC-2022)**.** Seja $f : [0,1] \to (0,\infty)$ uma função integrável tal que $f(x)f(1-x) = 1$ para todo $x \in [0,1]$. Prove que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \geq 1$.

Solução: Inicialmente, fazendo a mudança de variáveis $1-x=y$, segue que $dx = -dy$ e

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx = \int_0^1 f(1-x)dx &= \int_1^0 f(y)(-dy)\\ &= \int_0^1 f(y)dy = \int_0^1 f(x)dx.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 1.12), tem-se que:

$$\begin{aligned}1 = \left(\int_0^1 f(x)\frac{1}{f(x)}dx\right)^2 &\leq \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx\\ &= \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2.\end{aligned}$$

Assim,

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \geq 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx \geq 1.$$

Em que a última desigualdade decorre de f ser não negativa no intervalo $[0,1]$.

Problema 1.14 (OBMU-2006)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável e crescente. Prove que

$$\int_0^1 xf(x)dx \geq \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx.$$

Solução: Seja $g(x) := x$, então g é crescente. Da Desigualdade de Chebyshev (Teorema 1.14) aplicada às funções crescentes f e g com $a=0$ e $b=1$ segue-se que

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-0}\int_0^1 xf(x)dx \geq \int_0^1 xdx\int_0^1 f(x)dx &=\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx.\end{aligned}$$

Problema 1.15. Calcule

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx,\ a.b > 0.$$

Solução: Da desigualdade de Cauchy-Frullani (Teorema 1.15) com $f(x) = e^{-x}$ e desde que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ existem, segue-se que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx = (0-1)\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Problemas Propostos

Problema 1.16 (Mathematical Reflections - vol06 - 2022)**.** Se n é um inteiro positivo determine o valor de

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\right]dx.$$

Problema 1.17 (Mathematical Reflections - vol02 - 2021)**.** Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\tan^n x}$, onde $n\in\mathbb{N}$.

Problema 1.18 (Romênia)**.** Dado $a>0$, mostre que $\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1\frac{x^n}{x^n+a}dx = \log\left(\frac{a+1}{a}\right)$.

Problema 1.19 (ICM-2015)**.** Calcule

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}dx.$$

Problema 1.20 (OBMU-2015)**.** Mostre que, para todo $b>0$, temos

$$I(b)=\int_1^\infty\frac{\sqrt{u+b}}{u^2+b}du>\frac{\pi}{2}.$$

Problema 1.21 (OBMU-2006)**.** Calcule

$$\int_{-1}^1\frac{e^x-1-x}{(e^x-1)x}dx.$$

Problema 1.22 (OBMU-2004)**.** Calcule a integral

$$\int_{-1}^1\frac{x^{2004}}{1+e^x}dx.$$

Problema 1.23 (Leningrado)**.** Sejam $f,g:[0,1]\to[0,1]$ funções contínuas, onde f é não-decrescente. Mostre que

$$\int_0^1(f\circ g)(x)dx\leq\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 g(x)dx.$$

Problema 1.24 (Berkeley)**.** Seja $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ uma função contínua, crescente e bijetiva. Mostre que

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(x)dx\geq ab,$$

onde a e b são dois números reais positivos arbitrários.

Problema 1.25 (Putnam-1985)**.** Calcule

$$\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-1985(t+t^{-1})}dt.$$

Problema 1.26. Calcule

$$\int_0^\infty\frac{e^{-ax}\cos(ax)-e^{bx}\cos(bx)}{x}dx,\quad a.b>0.$$

Problema 1.27 (Galois Noether-2017)**.** Seja $f:[0,1]\to(0,\infty)$ uma função crescente. Para cada $n\in\mathbb{N}$, considere $P_n=\{0=t_{n0}<t_{n1}<...<t_{nm}=1\}$ a partição de $[0,1]$ para a qual

$$\int_{t_{ni-1}}^{t_{ni}}f(x)dx=\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)dx.$$

Para cada $i=1,2,...,n$, calcule o seguinte limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t_{ni}}{t_{n1}}.$$

Problema 1.28 (Galois Noether-2012)**.** Calcule

$$\int_{-4}^4\lceil|4-x|\rceil\,dx$$

em que $\lceil x\rceil$ é o menor inteiro maior ou igual que x.

Problema 1.29. Calcule

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^x(1+\tan^2 x+\tan x)dx.$$

Problema 1.30 (Crux Mathematicorum)**.** Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das funções contínuas $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $e^{f(x)}+f(x)\geq x+1$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Determine o valor mínimo de

$$I(f)=\int_0^e f(x)dx \text{ onde } f\in\mathcal{F}.$$

Referências

[1] Apostol, T. M.*Cálculo I: Cálculo com funções de uma variável, com uma introduçâo à Álgebra Linear*(2021).Espanha: Reverte, 2021.

[2] Feller, W.*An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume 1.* Índia: Wiley, 1968.

[3] Bacca, J. D. G.*Textos Clasicos para la Historia de las Ciencias* Caracas: Universidad Central de Venezuela, 1961.

[4] Neto, A. C. M. *An Excursion Through Elementary Mathematics, Volume I: Real Numbers and Functions* Springer, (2017).

[5] Lima, E. L. *Análise Real Funções de Uma Variável, Volume 1* SBM, 2016.

[6] Fitzpatrick, P. *Advanced Calculus*, Estados Unidos: American Mathematical Society, 2009.

[7] Guidorizzi, H. L. *Um Curso de Cálculo, Volume 1* LTC, 2001.

[8] Michel, P. H. *De Pythagore a Euclide: Contribution a L'Histoire des Mathématiques Préeuclidiennes*Paris: Les Belles Lettres, 1950.

[9] Juan, A. R. *On the theorem of Frullani* Proceedings of the American Mathematical Society. 109 (1): 165–175.

[10] Gelca, R., Andreescu, T. *Putnam and Beyond* Springer New York, 2007.

[11] www.obm.org.br Acesso em 14/05/2024.

[12] www.imc-math.org.uk Acesso em 14/05/2024.

[13] www./pt.wikipedia.org/wiki/ Acesso em 14/05/2024.

[14] https://blog.nekomath.com/concurso-galois-noether/ Acesso em 14/05/2024.

[15] https://sites.google.com/view/omrn-2024 Acesso em 14/05/2024.

2. Curiosidades

Olimpíadas Titãs da Matemática

Gabriel Araújo Guedes[1]

A Olimpíada Titãs da Matemática comemora a segunda edição com sucesso, contabilizando mais de 6000, seis mil, inscrições este ano. A grande aceitação reside no fato de que ela vai muito além do que uma disputa de alto nível, com provas e medalhas.

Além de cumprir o objetivo maior de difusão e valorização da Matemática, a Olimpíada oferece diferenciais em que o aluno se vê apoiado no suporte aos estudos ao longo de todo o ano, como lista de exercícios, simulados, eventos de formação com palestras e oficinas presenciais nas escolas, enriquecendo o conhecimento dos estudantes que irão participar. Tudo isso a custo zero, bastando apenas estar matriculado na Olimpíada.

Essa atenção com os alunos, proporcionando mais aquisição do conhecimento tem atraído participantes de todo o país. Segundo os idealizadores da Titãs, o objetivo maior é o desenvolvimento da cultura matemática no Brasil, bem como a descoberta de jovens talentos para esta ciência.

A Titãs da Matemática é uma organização voltada para o aperfeiçoamento do ensino e divulgação da matemática. O idealizador é o professor Gabriel Guedes, da UFRPE, com mais de duas décadas de experiência em olimpíadas de matemática e projetos de divulgação das ciências exatas. Pedro Vital, cofundador da Titãs da Matemática, é um multimedalhista em olimpíadas do conhecimento, que se juntou ao professor Gabriel para tornar o sonho realidade. A partir desta parceria, a Titãs da Matemática conseguiu difundir-se por todo o país.

A Titãs está dividida em 3 níveis, os quais abrangem desde o sexto ano do ensino fundamental até o último do ensino médio, incluindo o quarto ano do técnico integrado.

[1]Professor do Departamento de Matemática da UFRPE

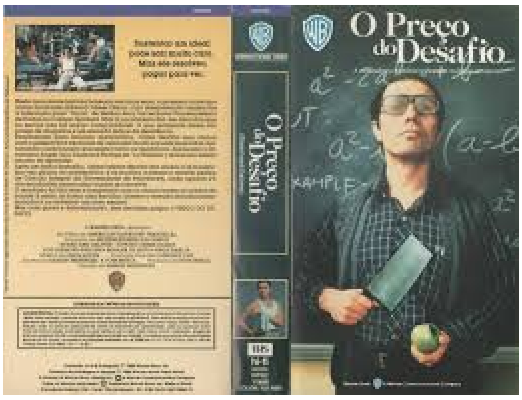
A edição 2024 da Olimpíada já está com inscrições abertas e acontecerá em 30 de outubro. Além disso, a organização da Titãs já deu início às outras iniciativas: palestras, oficinas e encontros sobre matemática, contribuindo para a divulgação científica e apresentação das oportunidades que as olimpíadas de conhecimento abrem para os estudantes e instituições de ensino.

Então não fique de fora, inscreva-se hoje em: www.titasdamatematica.com.br e siga nosso perfil no instagram @titasdamatematica.

3. Indicação de Filme

O Preço do Desafio

Roberta Elaine Domingos de Araújo[2]



“O Preço do Desafio” é um filme baseado em fatos reais, disponível no Prime Video [1], que aborda a história de um professor numa escola do subúrbio de Los Angeles na década de 1980. Ele deixou o emprego para viver o sonho de lecionar informática, mas ao chegar na escola descobre que não há estrutura alguma para o desenvolvimento de suas tarefas. Diante desse obstáculo recebe a proposta para ministrar aulas de álgebra e começa a ensinar Matemática.

O filme retrata a história do professor Jaime Escalante, que busca fazer a diferença ao ter como desafio lecionar Matemática para estudantes de uma escola, onde além da falta de uma estrutura adequada, os alunos sofrem constantemente com preconceitos de diversos tipos. De fato, a maioria é composta por latinos, imigrantes estigmatizados por suas origens estrangeiras e desacreditados pelo sistema. É em meio a este contexto que o professor Escalante, utilizando metodologias diferenciadas e com aulas contextualizadas, motiva os estudantes. Desse modo permite que os alunos compreendam a presença da Matemática além das avaliações escolares e, principalmente, nas coisas do cotidiano.

Após conquistar a confiança dos alunos, ele decide ensiná-los um cálculo no nível mais avançado para que eles possam fazer uma prova que garantirá uma vaga na faculdade. Após realizarem a prova e obterem bons resultados, os mesmos foram acusados de fraude devido à falta de confiança neles. Sem estímulos, os estudantes pensam em desistir, mas o professor propõe um novo exame e ao realizarem os testes, com uma supervisão maior, os resultados são ainda melhores.

Essa história nos mostra a jornada de um professor de Matemática, obstinado, contra um sistema educacional em crise, nos trazendo uma reflexão ainda na atualidade. De fato, os desafios continuam presentes na realidade dos profissionais da educação, que nem sempre conseguem gerenciar as demandas solicitadas e ainda enfrentam as dificuldades do processo de ensino-aprendizagem.

“O Preço do Desafio” traz ainda a concepção de que o ensino da Matemática não deve consistir apenas da memorização de conceitos e fórmulas, mas da contextualização com a realidade dos alunos e aplicação em coisas práticas do cotidiano. Cabe ao professor estimular os estudantes a acreditarem em seus respectivos potenciais e buscar entender as necessidades de cada um que passa por sua sala de aula.

Por fim, convidamos os leitores a conhecer um pouco mais dessa história e fazer uma reflexão sobre os temas abordados no filme.

[2] Discente do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco

Referências.

[1] PRIME VIDEO. O Preço do Desafio. Disponível em: https://www.primevideo.com/-/pt/detail/O-Pre%C3%A7o-do-Desafio/0LH2VDTV53L57HQZ34UF9KEABS. Acesso em: 10 de maio de 2024.

[2] ARAÚJO, E.; OLIVEIRA, A. Os desafios da profissão docente: análise do filme: "O preço do desafio". In: COLÓQUIO INTERNACIONAL, IX., 2015, São Cristóvão. Educon, Aracaju, Volume 09, n. 01, p.1-7. Disponível em: https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/9123/28/Os_desafios_da_profissao_docente_analise_do_filme_o_preco_do.pdf. Acesso em: 11 de maio de 2024.

[3] PLANO CRÍTICO. Crítica O Preço do Desafio. Disponível em: https://www.planocritico.com/critica-o-preco-do-desafio/. Acesso em: 10 de maio de 2024.

4. Quem pergunta, quer saber!

Revista do Professor de Matemática (RPM, nº 2, p.43)

Severino Barros de Melo[3]

A consulta a livros didáticos de matemática (sobretudo os mais antigos) muitas vezes não define corretamente as funções lineares, associando a linearidade ao fato do gráfico da função ser uma "linha reta". A dúvida levou um leitor de Paulista (Pernambuco) a fazer a seguinte pergunta à Revista do Professor de Matemática (RPM, nº 2, p.43):

Pergunta: *Alguns livros chamam* $y = ax + b$ *de função linear e outros de função afim, reservando o nome linear para* $y = ax$ $(b = 0)$. *Quem está certo?*

Resposta da RPM: No âmbito da matemática elementar, tendo em vista que o gráfico da função $y = ax + b$ é uma reta, é comum atribuir a todas estas funções o nome de *linear*.

Em Álgebra Linear, entretanto, para funções definidas em espaços mais gerais,exigem-se duas condições para que uma função seja linear: que ela seja aditiva e homogênea. Uma função $f : V \to V$ se diz aditiva quando satisfaz à seguinte propriedade:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in V$$

e f se diz homogênea quando satisfaz à propriedade

$$f(\lambda x) = \lambda(x),\ \forall \lambda \in R, \forall x \in V.$$

No caso de funções $f : R \to R$, toda função homogênea é aditiva. Mais precisamente, se

$$f(\lambda x) = \lambda f(x),\ \forall \lambda \in R, \forall x \in R,$$

então pondo $f(1) = a$, temos

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = ax.$$

Portanto, as únicas funções homogêneas de R em R são as da forma $f(x) = ax$. E estas, como se verifica diretamente, são também aditivas, logo são lineares.

Assim sendo, se quisermos ser coerentes com a noção geral de função linear, devemos chamar de lineares as funções da forma $f(x) = ax$.

Ainda nesse contexto mais geral, chama-se de função afim uma função "transladada" de uma linear, isto é, da forma $f(x) = g(x) + cte.$, com g linear.

Então as funções da forma $f(x) = ax + b$ são na realidade funções afins (que não são lineares quando $b \neq 0$).

Cremos que esta ambiguidade de nomenclatura não causa confusão de vez que no 1º e 2º graus (*) não se usa aquela segunda noção de linearidade e que os alunos ao chegarem ao estudo da Álgebra Linear não terão dificuldade de assimilar as novas denominações.

(*) Nota da redação do Jornal Oxente: na oca-

[3] Docente do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco

são da pergunta e da resposta, os atuais ensinos fundamental e médio eram chamados, respectivamente, 1º e 2º graus.

5. Eventos

Fiquem Ligados!!!

- **VIII Encontro de Matemática Pura e Aplicada**
  - Local: Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)
  - Data: 25 a 28 de Junho de 2024
  - Mais informações: https://sites.google.com/evento.uepb.edu.br/empa/?authuser=3&pli=1
- **XI Bienal de Matemática 2024**
  - Local: Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)
  - Data: 29 de Julho a 2 de Agosto de 2024
  - Mais informações: https://www.sbm.org.br/xi-bienal/
- **III Workshop de Mulheres na Matemática**
  - Local: Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)
  - Data: 21 a 23 de Agosto de 2024
  - Mais informações: https://mat.ufcg.edu.br/wmm/
- **VII Congreso Latinoamericano y del Caribe de Matemática**
  - Local: Centro de Convenções de João Pessoa
  - Data: 26 a 30 de Agosto de 2024
  - Mais informações: http://www.mat.ufpb.br/clam/
- **XLIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC 2024**
  - Local: Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE
  - Data: 16 a 20 de Setembro de 2024
  - Mais informações: https://www.cnmac.org.br/novo/
- **XV Encontro Gaúcho de Educação Matemática**
  - Local: Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA)
  - Data: 17 a 19 de Setembro de 2024
  - Mais informações: https://eventos.unipampa.edu.br/xvegem/

6. Soluções de Olimpíadas

OPEMAT 2022 - Nível 2

Nesta edição apresentaremos a resolução das questões discursivas e de verdadeiro ou falso da prova da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2022 referentes ao nível 2.

Problema 6.1. Para usar o trem "Expresso para Hogwarts", o π-raia precisa chegar à plataforma $9\frac{3}{4}$ e seu acesso é por uma parede entre as plataformas 9 e 10 da estação de trem da cidade de Londres. Ao simplificar este número misto, ele percebeu que

$$9\frac{3}{4} = \frac{9 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{39}{4},$$

observando assim que, na fração obtida, os dígitos 9 e 3 trocam de posição.

Após várias observações, π-raia pensou no seguinte problema: Considerando $a, b, c \in \{1, 2, 3, ..., 9\}$, é possível nomear novas plataformas com números mistos de modo que

$$c\frac{a}{b} = \frac{b \cdot c + a}{b} = \frac{ac}{b},$$

onde $b \cdot c$ é o produto usual dos dígitos b e c, e ac é o número formado pelos dígitos a e c nessa ordem.

Segundo estas hipóteses, julgue as afirmações a seguir atribuindo (V) se a afirmação for VERDADEIRA ou (F) se a afirmação for FALSA.

(A) ( ) ( ) O número misto $9\frac{7}{8} = \frac{79}{8}$ é um número de plataforma.

(B) ( ) ( ) Se $c\frac{a}{b}$ é um número de plataforma então $a = \frac{c(b-1)}{9}$.

(C) ( ) ( ) É possível encontrar pelo menos um número de plataforma quando $a = b = c$.

(D) ( ) ( ) Se $c = 1$ ou $c = 8$, então é possível encontrar dois números de plataformas.

(E) ( ) ( ) A quantidade máxima de números de plataformas é 11.

Solução. Na **afirmação** (A), pode ver facilmente que o número misto $9\frac{7}{8} = \frac{79}{8}$ é um número de plataforma pois

$$9\frac{7}{8} = \frac{9 \cdot 8 + 7}{8} = \frac{79}{8},$$

o que mostra que a afirmação é VERDADEIRA.

Na **afirmação** (B), note que $c\frac{a}{b} = \frac{b \cdot c + a}{b}$ e queremos que isso seja igual a $\frac{ac}{b}$. Assim,

$$\frac{b \cdot c + a}{b} = \frac{ac}{b} \Leftrightarrow b \cdot c + a = ac = 10 \cdot a + c \Leftrightarrow$$
$$b \cdot c - c = 9 \cdot a \Leftrightarrow a = \frac{c(b-1)}{9}.$$

Logo, a afirmação (B) é VERDADEIRA.

Na **afirmação** (C), suponha que $a = b = c$ então pela relação $a = \frac{c(b-1)}{9}$ concluímos que

$$a = \frac{a(a-1)}{9} \quad \Longrightarrow$$
$$a = 0 \quad \text{ou} \quad a = 10,$$

o que é impossível pois $a \in \{1, 2, 3, ..., 9\}$.
Logo, a afirmação (C) é FALSA.

Na **afirmação** (D), temos

i) Para $c = 1$ em $a = \frac{c(b-1)}{9}$, segue que 9 tem que dividir $(b-1)$, o que é impossível já que $0 < (b-1) \leq 8$; o que mostra que não existe número de plataforma para $c = 1$,

ii) Para $c = 8$, de $a = \frac{c(b-1)}{9}$ segue que 9 tem que dividir $(b-1)$, o que é impossível já que $(b-1) \leq 8$;

Logo, a afirmação é FALSA.

Na **afirmação** (E), podemos observar que

i) para $c = 2, 4, 5, 7, 8$ de $a = \frac{c(b-1)}{9}$ segue que 9 tem que dividir $(b-1)$, o que é impossível já que $(b-1) \leq 8$;

ii) Para $c = 3$, temos $a = \frac{3(b-1)}{9} = \frac{b-1}{3}$ e segue que 3 tem que dividir $(b-1)$ o que nos dá $b = 4$ ou $b = 7$ e os números mistos encontrados são $3\frac{1}{4} = \frac{13}{4}$ e $3\frac{2}{7} = \frac{23}{7}$; logo temos dois números de plataformas;

iii) para $c = 6$, temos $a = \frac{6(b-1)}{9} = \frac{2(b-1)}{3}$ e novamente 3 tem que dividir $(b-1)$ o que nos dá $b = 4$ ou $b = 7$ e os números mistos encontrados são $6\frac{2}{4} = \frac{26}{4}$ e $6\frac{4}{7} = \frac{46}{7}$; logo temos 2 números de plataformas;

iv) Para $c = 9$, temos $a = \frac{9(b-1)}{9} = (b-1)$ e como $1 \leq a, b \leq 9$, temos $a = 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$, para $b = 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2$ respectivamente. Assim os números mistos encontrados são $9\frac{7}{8} = \frac{79}{8}$, $9\frac{6}{7} = \frac{69}{7}$, $9\frac{5}{6} = \frac{59}{6}$, $9\frac{4}{5} = \frac{49}{5}$, $9\frac{3}{4} = \frac{39}{4}$, $9\frac{2}{3} = \frac{29}{3}$, $9\frac{1}{2} = \frac{19}{2}$.

Assim, temos um total de 12 números e são eles: $9\frac{8}{9}$, $3\frac{1}{4}$, $3\frac{2}{7}$, $6\frac{2}{4}$, $6\frac{4}{7}$, $9\frac{7}{8}$, $9\frac{6}{7}$, $9\frac{5}{6}$, $9\frac{4}{5}$, $9\frac{3}{4}$, $9\frac{2}{3}$ e $9\frac{1}{2}$. Portanto, a afirmação (E) é FALSA.

□

Problema 6.2. Quais valores de m, com m natural, satisfazem que $m^4 - 671$ seja uma potência de 5?

Solução. Os valores de m que satisfazem a equação

$$m^4 - 671 = 5^k,$$

ou equivalentemente,

$$m^4 = 671 + 5^k.$$

Observe que o número m é par. Como m é par, m^4 é múltiplo de 8. Isso motiva analisar essa equação módulo 8. Note inicialmente, que as potências pares de 5 deixam resto 1 na divisão por 8 e as potências ímpares de 5 deixam resto 5 na divisão por 8. Agora, como 671 deixa resto 7 na divisão por 8, então 5^k deve deixar resto 1 na divisão por 8. Isso nos diz que k é par. Logo $k = 2l$ com l inteiro. Daí, $m^4 - 5^{2l} = 671$. Utilizando produtos notáveis (produto da soma pela diferença), obtemos que

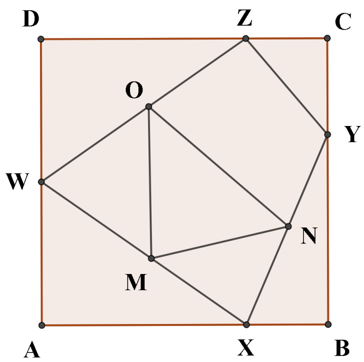
$$(m^2 - 5^l)(m^2 + 5^l) = 671 = 61 \cdot 11.$$

Desse modo, uma vez que $m^2 + 5^l > m^2 - 5^l$, temos dois casos a considerar. O primeiro, quando $m^2 - 5^l = 11$ e $m^2 + 5^l = 61$, então $2m^2 = 72$ e daí $m = 6$. De fato, $6^4 - 671$ é uma potência de 5.

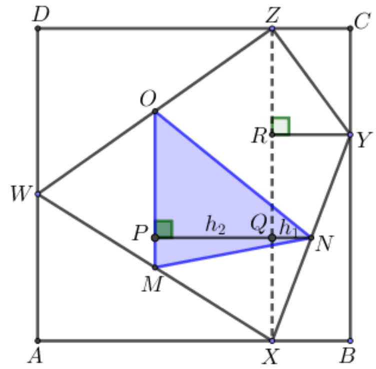
O outro caso é $m^2 - 5^l = 1$ e $m^2 + 5^l = 671$, o que dá $2m^2 = 672$. Como 672 não é o dobro de um quadrado perfeito, então, esse caso, não fornece solução inteira. Logo, a única solução é $m = 6$.

$\square$

Problema 6.3. O quadrado $ABCD$, da figura abaixo, tem área $16cm^2$. O segmento XZ é paralelo ao lado BC do quadrado. Se M, N e O são, respectivamente, os pontos médios dos segmentos WX, XY e ZW. Calcule a área do triângulo $\triangle MNO$.



Solução. O lado do triângulo é 4 cm. Pelo Teorema da Base Média, aplicado ao triângulo WXZ, obtemos que $MO = 2$ cm. A seguir, veremos que a altura relativa ao lado OM do triângulo MNO é 2 cm. Para tal, dividimos a altura $h = PN$ do triângulo MNO relativa ao lado MO na soma dos segmentos $h_1 = QN$ e $h_2 = PQ$, veja figura abaixo.

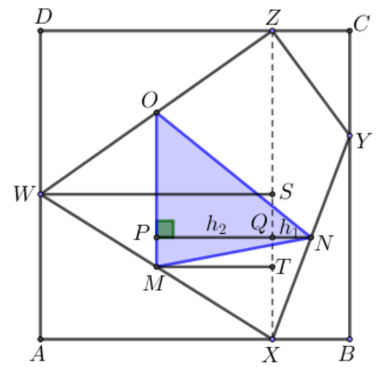


Seja R o pé da altura do triângulo XYZ relativa ao lado XZ. Sendo N ponto médio de XY e QN paralelo a RY, pelo Teorema de Tales no triângulo XYR, obtemos

$$\frac{XQ}{QR} = \frac{XN}{NY} \ (= 1).$$

Logo, Q é ponto médio de XR. Segue do Teorema da Base Média, $h_1 = QN = \frac{1}{2}RY$.

Por outro lado,



Seja S o pé da altura do triângulo XWZ relativa ao lado XZ. Se T é o ponto médio de SX, pelo Teorema da Base Média temos que $MT = \frac{1}{2}WS$ e MT é paralela a WS. Segue que $MTQP$ é retângulo e que

$$h_2 = PQ = MT = \frac{1}{2}WS.$$

Ainda, como é claro que $WS + RY$ é o comprimento do lado do quadrado, segue que a altura do $\triangle MNO$ verifica

$$\begin{aligned} h = h_1 + h_2 &= \frac{1}{2}RY + \frac{1}{2}WS \\ &= \frac{1}{2}(WS + RY) = \frac{1}{2}AB. \end{aligned}$$

Portanto, a área do $\triangle MNO$ é

$$\begin{aligned} \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} &= \frac{1}{2}MO \cdot \left(\frac{1}{2}AB\right) \\ &= \frac{1}{2}2 \cdot \left(\frac{1}{2}4\right) = 2\text{cm}^2. \end{aligned}$$

□

Problema 6.4. Considere a seguinte equação quadrática na incógnita x dada por

$$x^2 + \left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)x + \sqrt[3]{1-\sqrt{2}} = 0,$$

cujas raízes reais são dadas por m e n. Sabendo que a expressão numérica $\dfrac{1}{m^3} + \dfrac{1}{n^3}$ na sua forma irredutível é dada por $a\sqrt{b} + c$, onde a e c são inteiros e b é um inteiro não negativo, calcule $a \cdot b + c$.

Solução. Após algumas manipulações algébricas, é possível perceber que

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^3} + \frac{1}{n^3} &= \frac{m^3 + n^3}{m^3 n^3} \\ &= \frac{(m+n)^3 - 3mn(m+n)}{(mn)^3}. \end{aligned}$$

Como as raízes da equação quadrática acima são os números reais m e n, então podemos fatorar a equação do seguinte modo:

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)x - \sqrt[3]{1-\sqrt{2}} &\equiv (x-m)(x-n) \\ &\equiv x^2 - (m+n)x + mn. \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que $m+n = -\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$ e $mn = \sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$. Além disso,

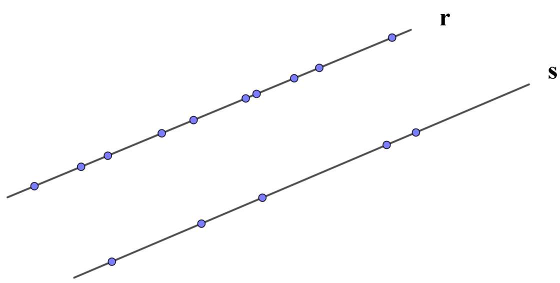
$$\begin{aligned} &\frac{(m+n)^3 - 3mn(m+n)}{(mn)^3} \\ &= \frac{\left(-\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)^3 + 3\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}}{\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}\right)^3} \\ &= 5\sqrt{2} + 6. \end{aligned}$$

Portanto, $\dfrac{1}{m^3} + \dfrac{1}{n^3} = 5\sqrt{2} + 6$, e consequentemente, $a \cdot b + c = 5 \cdot 2 + 6 = 16$.

□

Problema 6.5. Em um plano, considere duas retas paralelas e distintas r e s. Na reta r escolhemos 10 pontos distintos e na reta s escolhemos 5 pontos distintos. Determine a quantidade de triângulos que podemos formar com esses pontos.

Solução. Vamos dividir a solução em duas etapas:



Primeira etapa: Considere que apenas um dos vértices do triângulo é um dos pontos da reta r, isso mostra que temos 10 possibilidades para a escolha do vértice, consequentemente os outros 2 vértices devem pertencer os pontos da reta s. Como cada base do triângulo corresponde a uma corda que liga dois pontos, então vamos ter um total de $\frac{1}{2}.5.4 = 10$ possibilidades, pois é indiferente a corda AB ou a corda BA, onde A e B são dois pontos da reta s. Agora, basta usar o princípio multiplicativo e concluir que temos $10.10 = 100$ possíveis triângulos.

Segunda etapa: Repetindo o mesmo argumento acima, assumindo o único vértice na reta s e os outros dois vértices na reta r, então temos um total de $5.\frac{1}{2}10.9 = 225$ possibilidades.

Portanto, temos um total de $100 + 225 = 325$ triângulos construídos. □

7. Problemas

Convidamos o leitor a responder alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Enviem as soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, o envio do arquivo (.tex), no modelo disponível no site, deve ser realizado até **26/08/2024**.

Problema 1. (OBM - 2012) *Função Natural:* Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ e considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$ e, para todo natural $n \geq 1$, satisfaz as seguintes condições:

(i) $f(3n) = 3 \cdot f(n) + 1$;

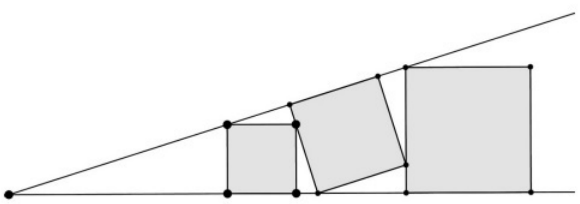
(ii) $f(3n + 1) = 3 \cdot f(n) + 2$;

(iii) $f(3n + 2) = 3 \cdot f(n)$.

Então, $f(2012)$ é igual a:

a) 101
b) 102
c) 103
d) 104
e) 105

Problema 2. (Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte (OMRN) - 2019) Na figura abaixo as medidas dos lados dos quadrados menores são 3 e 4.



A medida x do lado do quadrado maior é:

a) $\dfrac{11}{3}$
b) $\dfrac{13}{3}$
c) $\dfrac{14}{3}$
d) $\dfrac{16}{3}$
e) $\dfrac{19}{4}$

Problema 3 (XXXI Olimpíada de Matemática da Unicamp (OMU) - 2015)**.** Tinha 900 reais para comprar algumas camisas, todas com o mesmo preço. Como obtive um desconto de 60 reais no preço de cada camisa consegui comprar quatro camisas a mais do que previa inicialmente comprar com os 900 reais. Determine quantas camisas comprei e o preço que paguei por cada camisa.

8. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n. 29, dezembro de 2023**.

Problema 1. (1ª CELL 2021) Seja $f : \{1, 2, ...\} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(n) - f(n+1) = f(n)f(n+1)$ para todo $n \geq 1$. Sabendo que $f(2020) = \dfrac{1}{4040}$, o valor de $f(1)$ é:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{4040}$
c) $\frac{1}{2021}$
d) 1
e) $\frac{1}{2020}$.

Solução. Primeiramente, isolando $f(n+1)$, na expressão $f(n) - f(n+1) = f(n)f(n+1)$, obtemos:

$$f(n) = f(n+1)(f(n) + 1) \Rightarrow$$
$$f(n+1) = \frac{f(n)}{1 + f(n)}, \text{ se } f(n) \neq -1.$$

Considerando $f(1) = a$, note que:
para $n = 1$, temos

$$f(2) = \frac{f(1)}{1 + f(1)} = \frac{a}{1 + a}$$

e para $n = 2$, obtemos

$$f(3) = \frac{f(2)}{1 + f(2)} = \frac{\dfrac{a}{1+a}}{1 + \dfrac{a}{1+a}} = \frac{a}{1+a} \cdot \frac{1+a}{1+2a} = \frac{a}{1+2a}.$$

Continuando esse processo, aparentemente chegaremos a

$$f(n+1) = \frac{a}{1+na}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

De fato, provaremos pelo Princípio da Indução Finita (PIF), que isto ocorre.

Para o primeiro caso, $n=1$, obtemos

$$f(1+1) = f(2) = \frac{a}{1+a}.$$

Supondo que a sentença é válida para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$f(n+1) = \frac{a}{1+na},$$

mostraremos que também é válida para $n+1$, isto é:

$$f(n+1+1) = f(n+2) = \frac{a}{1+(n+1)a}.$$

Pela definição de f, sabemos que:

$$f(n+2) = \frac{f(n+1)}{1+f(n+1)}.$$

Por Hipótese de Indução:

$$\begin{aligned} f(n+2) &= \frac{\dfrac{a}{1+na}}{1+\dfrac{a}{1+na}} = \frac{\dfrac{a}{1+na}}{\dfrac{1+na+a}{1+na}} \\ &= \frac{a}{1+na} \cdot \frac{1+na}{1+na+a} = \frac{a}{1+(n+1)a}. \end{aligned}$$

Logo, pelo PIF temos $f(n+1) = \dfrac{a}{1+na}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, por $f(2020) = \dfrac{1}{4040}$, podemos obter o valor de a.

Observe que,

$$f(2020) = f(2019+1) = \frac{1}{4040}$$

e, por definição, $f(2019+1) = \dfrac{a}{1+2019a}$.

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+2019a} &= \frac{1}{4040} \\ \Rightarrow 4040a - 2019a = 1 \Leftrightarrow a &= \frac{1}{2021}. \end{aligned}$$

Portanto, $f(1) = a = \frac{1}{2021}$, sendo a resposta correta a alternativa (c). $\square$

Problema 8.1. (GN 2017 - 1ª fase) Quantos valores inteiros de x no intervalo $[1, 100]$ fazem com que o determinante da seguinte matriz seja múltiplo de 3?

$$\begin{pmatrix} x^2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & x+2 \end{pmatrix}$$

a) 0

b) 34

c) 64

d) 100.

Solução. Seja M a matriz dada no enunciado. Calcularemos o determinante de M usando o Teorema de Laplace, ou mais diretamente, a regra de Sarrus. Assim,

$$\begin{aligned} \det M &= 28 + 3x^2(x+2) + 70 - 2(x+2) \\ &\quad - 147 - 20x^2 \\ &= 3x^3 - 14x^2 - 2x - 53. \end{aligned}$$

Daí, precisamos encontrar os valores de x para os quais a expressão acima seja múltipla de 3. Podemos fazer isso de forma que a expressão seja congruente a 0 módulo 3.
Para todo x pertencente aos inteiros, temos

$$3x^2 \equiv 0 \mod 3.$$

Além disso, reescrevendo $-14x^2 - 2x - 53$, obtemos $(x^2 - 15x^2) + (x - 3x) + (1 - 54)$. Então,

$$\det M \equiv x^2 + x + 1 \mod 3.$$

A divisão por 3 deixa restos 0, 1 e 2. Verificando os valores de x na expressão para tais restos, temos

$$x \equiv 0 \mod 3 \Rightarrow x^2 + x + 1 \equiv 1 \mod 3$$

$$x \equiv 1 \mod 3 \Rightarrow x^2 + x + 1 \equiv 0 \mod 3$$

$$x \equiv 2 \mod 3 \Rightarrow x^2 + x + 1 \equiv 1 \mod 3.$$

Logo, os valores de x para os quais $\det M \equiv 0 \mod 3$ são da forma $x_k = 3k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Ademais, foi pedido na questão $x \in [1, 100]$. Como 100 é o último valor do intervalo e $100 \equiv 1 \mod 3$, temos $100 = 3 \cdot 33 + 1$. Assim, $k \in \{0, 1, 2, .., 33\}$.

Daí, se $x_k \in [1, 100]$ e há 34 valores de k, então há 34 valores possíveis para x, o que corresponde a alternativa (b). □

Problema 8.2. (2ª fase - Nível 2 XXXV-OBM Q.3) Uma hora potência é uma hora cujo formato representa uma potência perfeita de número inteiro com expoente maior que 1, ou seja, algo no formato a^b em que a e b são inteiros e $b > 1$. Por exemplo, 03 : 43 é uma hora potência afinal $343 = 7^3$, mas 01 : 10 não é uma hora potência, afinal 110 não é potência exata de número inteiro. Também 02 : 89 não é hora potência, embora $289 = 17^2$, pois não existe a hora 02 : 89 já que os minutos vão apenas até 60. Quantas horas potências existem depois de 00 : 00 e antes de 02 : 59?

Solução. Vamos contar as potências perfeitas de 0 a 259. Veja que, basta olharmos os expoentes primos,

pois se tivermos uma potência composta da forma $x \cdot p$, com p primo, também teremos a potência de um primo uma vez que $a^{xp} = (a^x)^p$. Temos:

1. 16 quadrados perfeitos $1^2, 2^2, \cdots, 16^2$
2. 6 cubos perfeitos $1^3, 2^3, \cdots, 6^3$
3. 3 potências quintas $1^5, 2^5$ e 3^5
4. 2 potências sétimas 1^7 e 2^7

Como citado, as potências de expoentes $4, 6$ e 8 já estão incluídas nas potências de 2. Note também que as potências de expoente 9 ou maior, mesmo com base 2, são maiores que 259 e, as que possuem base 1, já foram contadas.

Daí, tomando o cuidado de tirar 3 vezes o número 1, pois ele está sendo contado 4 vezes e 1 vez o número 64 que está sendo contado duas vezes ($64 = 8^2 = 4^3$), concluímos a princípio que existiriam $16 + 6 + 3 + 2 - 3 - 1 = 23$ possíveis horas potências distintas.

Entretanto, as potências $8^2, 9^2, 13^2$ e 14^2 são as que possuem o número formado pelas dezenas e unidades maiores que 60, logo não são horas potências. Finalmente, temos que a quantidade de horas potências depois de 00 : 00 e antes de 02 : 59 é $23 - 4 = 19$. □