# É Matemática, OXENTE!

## O Jornal de Matemática Olímpica

**Número 29, volume 1, dezembro de 2023**
**ISSN 2526-8651**

## Editorial

Caros Leitores,

Estamos juntos desta vez na 29ª edição do nosso jornal.

No editorial da primeira edição do ano de 2023 fizemos um aceno às perspectivas para o ano que se iniciava, destacando que "várias realidades nos fazem antever um novo tempo do ponto de vista educacional e científico para o nosso país". E assim foi, com reflexos no nosso jornal.

Encerramos o ano colhendo bons frutos. Para além das atividades em torno da produção do jornal, selamos uma parceria com o informativo da Sociedade Brasileira de Matemática no intuito de uma integração com notícias e conteúdos. Ademais, na Semana de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco (XV SEMAT) tivemos a possibilidade de ofertar uma oficina na qual a seção "Quem pergunta, quer saber!" serviu de motivação para um maior contato dos alunos de licenciatura com o nosso periódico, que em 2023 contabilizamos cerca de 60.000 acessos.

A presente edição traz na seção *artigo* um trabalho intitulado *Uma Abordagem Olímpica das Progressões Geométricas*, de autoria dos professores Eudes Mendes Barboza e Thiago Yukio Tanaka, da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE); e da estudante do PROFMAT-UFRPE Gésica Peixoto Campos. O artigo faz uma ponte entre a clássica abordagem desse conteúdo no ensino médio e como ele aparece de forma mais avançada nas questões de olimpíadas.

A seção *curiosidade* traz a contribuição da aluna Allana Mylena Gomes de Amorim, do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, abordando *O Enigma de Einstein*, que como verão, não se deve creditar a este grande cientista.

A *indicação de leitura* apresenta a sugestão da aluna Roberta Elaine Domingos de Araújo, do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, acerca de *O Livro da Matemática*, uma obra de divulgação com uma proposta de oferecer uma visão geral da matemática, seus campos mais importantes e seu desenvolvimento numa abordagem cronológica.

A seção *Quem pergunta, quer saber!* resolve um problema de geometria, proposto por um professor, no qual a inserção de um elemento não presente no enunciado abre caminho para a resolução da questão.

Finalizamos a edição com *Problemas Propostos e soluções de questões anteriores* enviadas pelos leitores; *soluções de problemas da I Copa Nordestina de Matemática* (CONEMAT - 2023) - competição olímpica entre estudantes do Ensino Fundamental com idade igual ou menor que 15 anos - e com informes acerca de alguns eventos em sintonia com a proposta do Jornal.

Durante a finalização da edição anterior, com o apoio da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT), do PIC - Programa de Iniciação Científica da OBMEP e do POTI - Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo, realizamos uma palestra intitulada *Balanceamento ótimo de vetores um por um*, na qual Victor Reis, medalhista de ouro na Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e representante do Brasil na Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), apresenta a demonstração de um resultado que combina uma generalização de um Teorema sobre balanceamento de prefixos de Banaszczyk para árvores, com um argumento de clonagem para encontrar distribuições em vez de colorações.

Com um grandíssimo obrigado por prestigiar o É Matemática, Oxente! no ano que finda, desejamos um feliz Natal e um 2024 pleno de boas realizações.

O Comitê Editorial.

# Sumário



# 1. Artigo

## Uma Abordagem Olímpica das Progressões Geométricas


Eudes Mendes Barboza, Gésica Peixoto Campos & Thiago Yukio Tanaka

UFRPE - CEGEN - Departamento de Matemática
52171-900 - Recife - PE - Brasil


### Introdução

Ao longo das últimas edições do jornal "É Matemática, Oxente!", diversos esforços foram feitos com o intuito da propagação de conhecimentos no tema das Sequências Numéricas, assunto central da área de Álgebra dentro das Olimpíadas de Matemática. No artigo [1], as autoras trazem um detalhamento sobre recorrências lineares de primeira e segunda ordem, seus métodos de resolução e como aplicar estes resultados problemas sobre sequências numéricas, em especial, dando ênfase à sequência de Fibonacci. Já no artigo, [21] há uma abordagem sobre Progressão Aritmética nas Olimpíadas nacionais e internacionais, fazendo um destaque no objeto definido no artigo como o *Triângulo Aritmético de Números Ímpares*, que é uma estrutura de números ímpares organizados em formato triangular como no Triângulo de Pascal. Daí trabalhando os diversos conceitos de Progressões Aritméticas de primeira e segunda ordens. De modo indireto, sob a perspectiva dos estudo dos fractais, em [19] há diversos exemplos e problemas propostos que utilizam o conceito de Progressões Geométricas (PGs) em suas soluções, porém sem um detalhamento sobre o tema de progressão geométrica em si. Ainda sobre o artigo de fractais, dentre os problemas trazidos há alguns extraídos da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT), então recomendamos fortemente para todos que participam desta olimpíada.

Neste artigo traremos um detalhamento sobre o tema das PGs fazendo uma abordagem com problemas retirados das Olimpíadas, de materiais de treinamentos olímpicos nacionais e internacionais e de vestibulares, seguindo uma linha similar às dos artigos [1, 21].

A escrita desenvolvida neste artigo visa uma abordagem que estabeleça uma relação estreita entre os conceitos envolvidos com o tema e como aplicá-los para solucionar problemas que tenham um perfil olímpico ou de concurso, além de trazer possibilidades distintas de soluções utilizando diferentes recursos. Assim, o trabalho pode ser facilmente utilizado, com ou sem adaptação, como fonte de estudo e pesquisa para discentes e docentes interessados tanto no tema das Progressões Geométricas em si, quanto na sua relação com a matemática olímpica.

## Conceitos e Propriedades

As *Progressões Geométricas* são sequências numéricas em que há uma *Recorrência de Primeira Ordem*, precisamente, há uma relação envolvendo dois termos consecutivos, a qual explanaremos em breve. Sobre o tema das sequências recorrentes, convidamos o(a) leitor(a) para a leitura do artigo [1]. As PGs são casos particulares de recorrências de primeira ordem da forma

$$a_n = f(n)a_{n-1}, \tag{1}$$

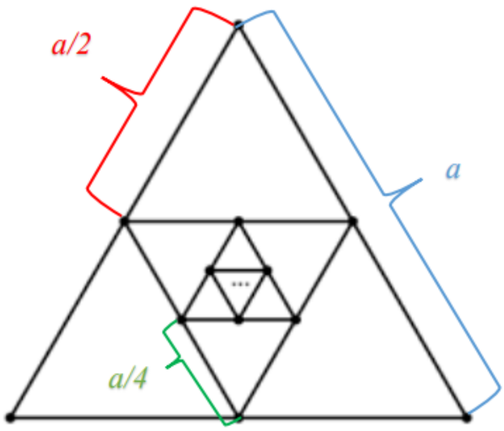
no caso em que $f(n)$ é constante. Apesar de já estar definida pelo comentário anterior, mas uma vez que essa definição é a principal do trabalho, escreveremos a definição de uma PG.

**Definição 1.1** (Progressão Geométrica (PG))**.** Dizemos que uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma PG quando satisfaz a recorrência $a_n = qa_{n-1}$, para todo $n \geq 2$. A constante $q$ é chamada *Razão da PG.*

**Observação 1.1.** Para o intuito deste trabalho, vamos desconsiderar PGs nas quais $q \in \{0, 1\}$.

**Exemplo 1.1.** Seja um triângulo equilátero de lado $a$. A partir dele, considere um novo triângulo cujos vértices são os pontos médios de cada lado do primeiro. Obtemos assim um novo triângulo equilátero de lado $a/2$. Procedendo similarmente, obtemos um terceiro triângulo equilátero de lado $a/4$. Veja figura.

**Figura 1: Sequência de Triângulos Equiláteros**




Fonte: Autores

Repetindo este procedimento, obtemos a PG $(a, a/2, a/4, ..., a/2^{n-1}, ...)$, em que cada termo representa a medida dos lados dos triângulos equiláteros construídos neste processo.

É possível utilizar o argumento de *Produtos Telescópicos* para encontrar uma expressão para o $n$-ésimo termo da sequência dada em (1), em termos do parâmetro $n$ relativo à posição do termo, é o que chamamos de *Lei de Formação* ou *Fórmula do Termo Geral.*

Escrevendo sucessivamente todos os termos da expressão em (1) desde $a_n$ até o termo $a_{p+1}$, com $p + 1 < n$, vamos obter

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & f(n)a_{n-1} \\ a_{n-1} & = & f(n-1)a_{n-2} \\ & \vdots & \\ a_{p+2} & = & f(p+1)a_{p+1} \\ a_{p+1} & = & f(p)a_p. \end{array} \tag{2}$$

Efetuando o produto dos termos escritos em (2) no mesmo sentido da igualdade, ou seja, fazemos o produto de todos os termos do lado esquerdo e do lado direito da igualdade, podemos usar a lei do cancelamento sistematicamente, simplificando o termo do lado direito da igualdade de uma linha superior com o termo do lado esquerdo da linha imediatamente inferior,

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & f(n)\cancel{a_{n-1}} \\ \cancel{a_{n-1}} & = & f(n-1)\cancel{a_{n-2}} \\ & \vdots & \\ \cancel{a_{p+2}} & = & f(p+1)\cancel{a_{p+1}} \\ \cancel{a_{p+1}} & = & f(p)a_p. \end{array} \tag{3}$$

Dessa forma, obtemos

$$a_n = a_p \prod_{i=p}^{n} f(i). \tag{4}$$

**Observação 1.2.** Perceba que a expressão obtida em (4) é relativa a uma recorrência dada por (1). Isso significa que para encontrar o termo geral de expressões com tal formato, precisaremos sempre determinar uma fórmula para o produtório $\prod_{i=p}^{n} f(i)$.

Sendo as PGs casos particulares de (1), em que $f(i) = q$ para todo $i$, então, nessa situação, podemos escrever (4) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_n &= a_p \textstyle\prod_{i=p}^{n} q \\ &= a_p \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-p \text{ vezes}} \\ &= a_p q^{n-p}, \end{aligned} \tag{5}$$

que é usualmente conhecida como *Fórmula Generalizada do Termo Geral da PG*. No caso particular $p = 1$ (que é equivalente a desenvolver a expressão em (2) até o termo $a_2$), obteríamos

$$a_n = a_1 q^{n-1} \tag{6}$$

cuja expressão conhecemos por *Fórmula do Termo Geral de uma PG* ou *Lei de Formação da PG*.

Nosso próximo exemplo trará a noção de PG relacionada com o assunto de Geometria. Ela está como uma questão não resolvida do material do projeto olímpico do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) chamado Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI). Este um dos maiores projetos de treinamento de matemática olímpica no contexto nacional e totalmente gratuito. Para conhecer o projeto veja [16].

**Exemplo 1.2** (Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI), Álgebra, Nível 2, Recorrência, [9])**.** Prove que, quando os lados de um triângulo estão em PG, o mesmo ocorre para as alturas.

*Solução.* Sejam $a_1$, $a_2$ e $a_3$, os três lados do triângulo que estão, nesta ordem, em PG, e $h_1$, $h_2$ e $h_3$ as alturas relativas a cada um desses lados, respectivamente. Por estarem em PG, $a_2 = a_1 q$ e $a_3 = a_2 q$, com $q$ a razão da PG. Além disso, como a área de um triângulo pode ser calculada por meio da metade do produto entre a base e a altura relativa a esta base, então:

$$\text{Área} = \frac{a_1 \cdot h_1}{2} = \frac{a_2 \cdot h_2}{2} = \frac{a_3 \cdot h_3}{2}. \tag{7}$$

Por meio da segunda igualdade em (7),

$$\begin{aligned} \frac{a_1 \cdot h_1}{2} = \frac{a_2 \cdot h_2}{2} \quad &\Rightarrow \quad \frac{a_1 \cdot h_1}{2} = \frac{a_1 q \cdot h_2}{2} \\ &\Rightarrow \quad h_1 = q \cdot h_2. \end{aligned}$$

Pela última igualdade em (7),

$$\begin{aligned} \frac{a_2 \cdot h_2}{2} = \frac{a_3 \cdot h_3}{2} \quad &\Rightarrow \quad \frac{a_2 \cdot h_2}{2} = \frac{a_2 q \cdot h_3}{2} \\ &\Rightarrow \quad h_2 = q \cdot h_3, \end{aligned}$$

assim, $h_1$, $h_2$ e $h_3$, nesta ordem, formam uma PG cuja razão é igual a $\frac{1}{q}$. Ou também, $h_3$, $h_2$, $h_1$, nesta ordem, formam uma PG de razão $q$.

$\blacksquare$

Nosso segundo exemplo foi retirado de uma das provas seletivas da Índia para a equipe que representa o país na *International Mathematical Olympiad (IMO)*.

**Exemplo 1.3** (*Pre-Regional Mathematical Olympiad (Pre-RMO)*, 2017, Problema 5, [17])**.** Sejam $u$, $v$, $w$ números reais em progressão geométrica tais que $u > v > w$. Suponha que

$$u^{40} = v^n = w^{60},$$

determine o valor de $n$.

*Solução.* Como os números reais $u$, $v$ e $w$ formam uma PG de três termos, então podemos reescrever $u$ e $w$ em função de $v$ da seguinte forma: $u = \dfrac{v}{q}$ e $w = vq$, onde $q$ é a razão da PG. Substituindo na identidade dada no enunciado,

$$\left(\frac{v}{q}\right)^{40} = v^n = (vq)^{60}. \tag{8}$$

Pela primeira igualdade em (8) e utilizando as propriedades da potência,

$$\begin{aligned} \left(\frac{v}{q}\right)^{40} = v^n \quad &\Rightarrow \quad v^{40-n} = q^{40} \\ &\Rightarrow \quad v^{\frac{40-n}{40}} = q. \end{aligned}$$

Analogamente, pela segunda igualdade em (8),

$$\begin{aligned} v^n = (vq)^{60} \quad &\Rightarrow \quad v^{n-60} = q^{60} \\ &\Rightarrow \quad v^{\frac{n-60}{60}} = q. \end{aligned}$$

Segue que

$$v^{\frac{40-n}{40}} = v^{\frac{n-60}{60}}$$

e como as bases dessas potências são iguais, para que a igualdade seja válida, os expoentes também devem ser iguais, então

$$\begin{aligned} \frac{40-n}{40} = \frac{n-60}{60} \quad &\Rightarrow \quad 4n - 240 = 240 - 6n \\ &\Rightarrow \quad 10n = 480 \\ &\Rightarrow \quad n = 48. \end{aligned}$$

■

A seguir, apenas utilizando os conceitos iniciais, provaremos o resultado sobre produto de termos.

**Exemplo 1.4.** Seja $P_n$ o produto dos $n$ primeiros termos de uma PG, ou seja,

$$P_n = \prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$$

Mostre que $P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

*Solução.* Utilizando (6) para cada um dos termos do produto,

$$\begin{aligned} P_n &= a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n \\ &= a_1 \cdot (a_1 q) \cdot \ldots \cdot (a_1 q^{n-2}) \cdot (a_1 q^{n-1}) \\ &= a_1^n q^{1+2+\cdots+n-2+n-1} \\ &= a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}. \end{aligned}$$

Na última igualdade usamos que a soma dos $n-1$ primeiros números naturais é dada por

$$1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

■

O argumento de produtos telescópicos utilizado para obter as fórmulas (5) e (6) também tem sua importância no contexto olímpico como uma ferramenta que permite a resolução de questões envolvendo sequências que possuam em sua recorrência com o princípio multiplicativo igual ou similar das PGs. Este tipo de argumento pode ser visto a seguir do problema extraído da *American Mathematics Competition*, que é uma competição estadunidense e que funciona também como uma seletiva para determinar a equipe olímpica dos Estados Unidos que irá competir nas Olimpíadas Internacionais de Matemática.

**Exemplo 1.5** (*American Mathematics Competition (AMC)*, 1999, 12, Problema 13, [2])**.** Defina uma sequência de números reais $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... por $a_1 = 1$ e $a_{n+1}^3 = 99a_n^3$, para todo $n \geq 1$. Determine o valor de $a_{100}$.

*Solução 1.* Utilizando a recorrência, escrevemos todas as relações desde $a_{100}$ até $a_2$,

$$\begin{aligned} a_{100}^3 &= 99 \cdot a_{99}^3 \\ a_{99}^3 &= 99 \cdot a_{98}^3 \\ &\vdots \\ a_3^3 &= 99 \cdot a_2^3 \\ a_2^3 &= 99 \cdot a_1^3. \end{aligned}$$

Vamos proceder como em (3), fazendo o produto telescópico e cancelando sistematicamente o termo do lado direito da igualdade com o termo da linha imediatamente inferior que está do lado esquerdo,

$$\begin{array}{rcl} a_{100}^3 & = & 99 \cdot \cancel{a_{99}^3} \\ \cancel{a_{99}^3} & = & 99 \cdot \cancel{a_{98}^3} \\ & \vdots & \\ \cancel{a_3^3} & = & 99 \cdot \cancel{a_2^3} \\ \cancel{a_2^3} & = & 99 \cdot a_1^3 \end{array},$$

de modo a obter

$$a_{100}^3 = 99^{99} \cdot a_1^3.$$

Como $a_1 = 1$, então $a_{100}^3 = 99^{99}$, portanto $a_{100} = \sqrt[3]{99^{99}} = 99^{33}$.

*Solução 2.* Extraindo a raiz cúbica em ambos lados da identidade $a_{n+1}^3 = 99a_n^3$, obtemos

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{99}a_n,$$

portanto, via Definição 1.1, a sequência é uma PG em que $a_1 = 1$ e $q = \sqrt[3]{99}$. Pela fórmula do termo geral (6),

$$a_{100} = a_1 q^{99} = 1 \cdot \left(\sqrt[3]{99}\right)^{99} = 99^{33}.$$

■

O exemplo a seguir, extraído do Banco de Questões preparatórias para a Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas de 2018, nos dá uma perspectiva de como o assunto se relaciona com a área de Teoria dos Números.

**Exemplo 1.6** (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), Banco de Questões, 2018, Problema 26, [13])**.** Os números 10, 11 e 12 podem pertencer a uma mesma progressão geométrica?

*Solução.* Vamos supor, por absurdo, que 10, 11 e 12 fazem parte de uma mesma PG de razão $q$. Considere $r$, $s$ e $t$ números naturais distintos, tais que:

$$10 = a_{r+1} = a_1 \cdot q^r \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{10}{q^r}, \tag{9}$$

$$11 = a_{s+1} = a_1 \cdot q^s \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{11}{q^s}, \tag{10}$$

$$12 = a_{t+1} = a_1 \cdot q^t \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{12}{q^t}. \tag{11}$$

Daí, igualando as frações (9) e (10):

$$\begin{aligned} \frac{10}{q^r} = \frac{11}{q^s} \quad &\Rightarrow \quad \frac{q^s}{q^r} = \frac{11}{10} \\ &\Rightarrow \quad q^{s-r} = \frac{11}{10}. \end{aligned} \tag{12}$$

E as frações (10) e (11):

$$\begin{aligned} \frac{11}{q^s} = \frac{12}{q^t} \quad &\Rightarrow \quad \frac{q^t}{q^s} = \frac{12}{11} \\ &\Rightarrow \quad q^{t-s} = \frac{12}{11}. \end{aligned} \tag{13}$$

Objetivando que os expoentes da razão $q$ fiquem iguais, elevaremos o resultado obtido em (12) a $t-s$ e o resultado de (13) a $s-r$,

$$\left(\frac{12}{11}\right)^{s-r} = q^{(t-s)(s-r)} = \left(\frac{11}{10}\right)^{t-s}.$$

Utilizando o primeiro e o último termo da igualdade acima temos,

$$\begin{aligned} & 10^{t-s} \cdot 12^{s-r} = 11^{t-s} \cdot 11^{s-r} \\ \Rightarrow \quad & 10^{t-s} \cdot 12^{s-r} = 11^{(t-s)+(s-r)} \\ \Rightarrow \quad & (2 \cdot 5)^{t-s} \cdot (2^2 \cdot 3)^{s-r} = 11^{t-r} \\ \Rightarrow \quad & 2^{t+s-2r} \cdot 3^{s-r} \cdot 5^{t-s} = 11^{t-r} \\ \Rightarrow \quad & 2^{t+s-2r} \cdot 3^{s-r} \cdot 5^{t-s} \cdot 11^{r-t} = 1. \end{aligned}$$

A identidade acima nos diz que estamos escrevendo o número 1 como produto de potências dos números primos 2, 3, 5 e 11, portanto, a única solução ocorre quando todos os expoentes são nulos formando os seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} t+s-2r & = & 0 \\ s-r & = & 0 \\ t-s & = & 0 \\ r-t & = & 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} t & = & r \\ s & = & r \\ t & = & s \end{array} \right. .$$

Ou seja, $r = s = t$, um absurdo, pois supomos inicialmente que $r$, $s$ e $t$ eram números naturais distintos. Logo, 10, 11 e 12 não podem pertencer a uma mesma PG. ■

Uma PG de termos positivos e cuja razão é maior do que 1, possui um rápido crescimento, mas é rápido mesmo! Por exemplo, você aceitaria trabalhar em um lugar que lhe pagassem 1 centavo, mas dobrassem o seu salário a cada mês? Sem pensar muito, a resposta provável seria um belo "não!", porquanto você notou que nos primeiros meses de ofício, iria receber em reais $a_1 = 0,01$, $a_2 = 0,02$, $a_3 = 0,04$, $a_4 = 0,08$, $a_5 = 0,16$, nesse ponto você já recusaria de imediato. Mas usando a expressão dada em (6), teríamos

$$a_{30} = 0,01 \cdot 2^{29} = 5.368.709,12,$$

ou seja, em cerca de 30 meses você estaria, provavelmente, recebendo um dos maiores salários do mundo.

Esta questão também é abordada no famoso e incrível livro "O Homem que Calculava" [20], do autor Malba Tahan, pseudônimo do brasileiro Júlio César de Mello e Souza, quando traz uma lenda sobre o pagamento pela criação do jogo de xadrez. Não vamos dar nenhum "*spoiler*" sobre o livro. Convidamos vocês à leitura do breve texto na revista É Matemática, Oxente! sobre esta obra na edição de Setembro de 2018 [11], assim como a leitura deste livro.

## Soma dos Termos de uma PG

Agora investigaremos como somar os primeiros termos de uma PG e, em uma situação especial, veremos até mesmo a soma para infinitos termos.

Considere $S_n$, a soma dos $n$ primeiros termos de uma PG, ou seja,

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n.$$

Nosso objetivo será encontrar uma expressão que nos permita descobrir $S_n$ sem a necessidade de desenvolver todos os $n$ cálculos de cada termo.

Note que

$$\begin{aligned} qS_n &= q\sum_{j=1}^{n} a_j = q(a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n) \\ &= a_1q + a_2q + ... + a_{n-1}q + a_nq \\ &= a_2 + a_3 + ... + a_n + a_nq, \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned} S_n(q-1) &= qS_n - S_n \\ &= \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + ... + \cancel{a_n} + a_nq \\ &\quad -(a_1 + \cancel{a_2} + ... + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n}) \\ &= a_nq - a_1. \end{aligned}$$

Reorganizando a expressão, para $q \neq 1$, obtemos:

$$S_n = \frac{a_nq - a_1}{q-1},$$

ou seja, quando for conveniente, podemos utilizar a expressão do termo geral em $a_n$ de modo a obter uma expressão para $S_n$ apenas em função de $a_1$ e $q$,

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}. \quad (14)$$

Veremos como aplicar estes conceitos resolvendo o seguinte problema da Olimpíada Cearense de Matemática.

**Exemplo 1.7** (Olimpíada Cearense de Matemática (OCM), 1991)**.** Determine a soma dos $n$ primeiros termos da sequência: $1$, $1+2$, $1+2+2^2$, $1+2+2^2+2^3$, ... , $1+2+2^2+2^3+...+2^{k-1}$.

*Solução.* Para uma melhor visualização, escrevemos os termos da sequência até a posição $n$,

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1+2 \\ a_3 &= 1+2+2^2 \\ &\vdots \\ a_{n-2} &= 1+2+...+2^{n-3} \\ a_{n-1} &= 1+2+2^2+...+2^{n-2} \\ a_n &= 1+2+2^2+...+2^{n-2}+2^{n-1} \end{aligned}.$$

Podemos observar que cada $a_k$ (linha) corresponde a soma dos $k$ primeiros termos de uma PG, cujo primeiro termo é igual a 1 e a razão é igual a 2. Assim, cada termo $a_k$ corresponde a soma dos $k$ primeiros termos da sequência descrita anteriormente. Utilizando a fórmula dada em (14),

$$a_k = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{k-1} = \frac{1 \cdot (2^k - 1)}{2 - 1} = 2^k - 1.$$

Assim,

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & 2^1 - 1 \\ a_2 & = & 2^2 - 1 \\ & \vdots & \\ a_{n-1} & = & 2^{n-1} - 1 \\ a_n & = & 2^n - 1 \end{array}.$$

Somando todos os termos acima, obtemos

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ &= 2^1 - 1 + 2^2 - 1 + ... + 2^{n-1} - 1 + 2^n - 1 \\ &= (2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^n) - n \\ &= \frac{2^1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} - n \\ &= 2^{n+1} - (n + 2). \end{aligned}$$

Na penúltima igualdade usamos, novamente, a soma dos termos de uma PG cujo primeiro termo e a razão são iguais a 2.

■

**Exemplo 1.8** (OBMEP - Banco de Questões 2014, Problema 10, [12]). Calcule a soma

$$1 + 11 + 111 + 1111 + ... + \underbrace{111...11}_{n \text{ 1's}}.$$

*Solução:* Reescreveremos os termos da sequência como somas de potências de 10 até a posição $n$.

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & 10^0 \\ a_2 & = & 10^0 + 10^1 \\ & \vdots & \\ a_{n-1} & = & 10^0 + 10^1 + ... + 10^{n-2} \\ a_n & = & 10^0 + 10^1 + ... + 10^{n-2} + 10^{n-1} \end{array}.$$

Note que cada $a_j$ (linha) corresponde a soma dos $j$ primeiros termos de uma PG, no qual o primeiro termo é $10^0$ e a razão é 10. Portanto, usando a fórmula dada em (14),

$$a_j = \frac{10^0 \cdot (10^j - 1)}{10 - 1} = \frac{10^j - 1}{9} = \frac{10^j}{9} - \frac{1}{9},$$

com $1 \leq j \leq n$. Deste modo,

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & \frac{10^1}{9} - \frac{1}{9} \\ a_2 & = & \frac{10^2}{9} - \frac{1}{9} \\ & \vdots & \\ a_{n-1} & = & \frac{10^{n-1}}{9} - \frac{1}{9} \\ a_n & = & \frac{10^n}{9} - \frac{1}{9} \end{array}$$

e somando todos os termos, obtemos

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ &= \frac{10^1}{9} - \frac{1}{9} + \frac{10^2}{9} - \frac{1}{9} + ... + \frac{10^n}{9} - \frac{1}{9} \\ &= \left(\frac{10^1}{9} + \frac{10^2}{9} + ... + \frac{10^n}{9}\right) - \frac{n}{9} \\ &= \frac{\frac{10^1 \cdot (10^n - 1)}{10 - 1}}{9} - \frac{n}{9} \\ &= \frac{10}{81} \cdot (10^n - 1) - \frac{n}{9}. \end{aligned}$$

Perceba que no numerador utilizamos novamente a soma dos termos da PG, cujo primeiro termo e a razão são iguais a 10. ■

**Observação 1.3.** Essa questão traz um ponto bastante importante. Se um número $A$ na base 10 tem escrita da forma $\underbrace{aaa...aaa}_{n \text{ dígitos } a}$, então podemos escrever

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{aaa...aaa}_{n \text{ dígitos } a} = a \cdot \underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos } 1} \\ &= \frac{a}{9} \cdot \underbrace{999...999}_{n \text{ dígitos } 9} = \frac{a}{9} \cdot (10^n - 1). \end{aligned}$$

Se por um lado razões maiores do que um possuem crescimento rápido, se agora a razão $q$ satisfaz $-1 < q < 1$, ou seja, $|q| < 1$, podemos calcular até mesmo a soma de infinitos termos de uma PG, denotada por $S_\infty$. Não aprofundaremos aqui, pois há a necessidade do conceito de limite de sequências. Entenderemos esse fato por meio de uma noção intuitiva de pensamento. Se a razão é tal que $0 < |q| < 1$, então multiplicando por $|q|$, teremos $0 < |q|^2 < |q| < 1$. Refazendo esse passo sucessivas vezes concluímos que $0 < |q|^n < |q|^{n-1} < ... < |q|^2 < |q| < 1$, isso significa que as potências de $|q|^n$ estão ficando cada vez menores. Vamos considerar um exemplo particular apenas para ilustração. Se $q = 0,1$, perceba que $q^2 = 0,01$, $q^3 = 0,001$, de modo que

$$q^n = \underbrace{0,00...001}_{n \text{ zeros}}.$$

Você consegue perceber para qual valor $q^n$ está "convergindo"? O que acontece, não provaremos aqui, contudo note que se $n$ tende a infinito (corresponderia a somar infinitos termos em $S_n$), então $|q|^n$ fica cada vez menor e tende para zero, de modo que ao considerarmos a soma dos infinitos termos teremos:

$$S_\infty = \frac{a_1(0-1)}{q-1} = \frac{-a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}. \qquad (15)$$

Vejamos uma aplicação em um exemplo extraído do ITA.

**Exemplo 1.9** (Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), 1975, Problema 13, [18])**.** A expressão $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \cdots$ vale

*Solução:* Para facilitar a visualização, vamos escrever os denominadores da expressão em forma de potência de 2,

$$\frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \cdots.$$

Podemos observar que os numeradores e os denominadores estão determinando duas sequências. Nos numeradores, a sequência é uma PA de razão 1, cujo $n$-ésimo termo é $n$. Já nos denominadores, há uma PG de razão 2, na qual o $n$-ésimo termo é $2^{n-1}$. Assim, cada termo do somatório é o produto dos $n$-ésimos termos de uma PA com uma PG. Denotando por $S$ a soma inicial, perceba que podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &\quad + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ &\quad + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \\ &\quad + ... + \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + ... + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}}_{n-1 \text{ vezes}} + ... \end{aligned}$$

Podemos reescrever $S$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + ...\right) \\ &\quad + ... + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-3}} + ...\right) + .... \end{aligned}$$

Note que, dentro de cada parênteses, há uma soma infinita de termos de uma PG, e todas as PGs possuem razão igual a $1/2$. Assim, usando (15) obtemos:

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}\right) \\ &\quad + ... + \left(\frac{\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}\right) + ... \\ &= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-2}} + ... \\ &= \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4. \end{aligned}$$

■

**Exemplo 1.10** (*American Mathematics Competitions (AMC)*, 2016, Problemas 12B, Problema 14, modificado,[3])**.** Em uma PG cujo segundo termo é igual a 1 e a soma infinita dos termos é positiva, qual é o menor valor possível para essa soma?

*Solução.* Seja $q$ a razão da PG. Como $a_2 = 1$, então pela recorrência

$$a_2 = a_1 \cdot q = 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{q}.$$

Por (15) a soma da PG infinita é

$$S_\infty = \frac{\frac{1}{q}}{1-q} = \frac{1}{q \cdot (1-q)}.$$

Como por hipótese esta soma é positiva, então

$$\begin{aligned} S_\infty \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{q \cdot (1-q)} \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad q \cdot (1-q) \geq 0. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade das Médias, a qual garante que o valor da Média Aritmética entre quaisquer números é maior do que ou igual ao valor da Média Geométrica entre eles, considerando então o caso com dois números, tomando $q$ e $1-q$, fazendo as médias arimética e geométrica entre eles e usando a Desigualdade das Médias (ver [8]), obtemos

$$\frac{q + (1-q)}{2} \geq \sqrt{q \cdot (1-q)} \tag{16}$$

(observe que faz sentido calcular $\sqrt{q \cdot (1-q)}$ uma vez que provamos que $q \cdot (1-q) > 0$). Elevando então a expressão (16) ao quadrado, e organizando os termos, vamos obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \geq q \cdot (1-q) \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{q \cdot (1-q)} \geq 4 \\ &\Rightarrow \quad S_\infty \geq 4. \end{aligned}$$

Portanto, o menor valor assumido pela soma infinita de uma PG com essas condições da hipótese é 4.

■

**Observação 1.4.** Uma questão importante e interessante a observar é que as somas infinitas não são objetos simples, mais precisamente, nem sempre é fácil decidir se uma soma infinita de termos "converge" para um valor finito, e quando houver a convergência, qual é este valor. Por exemplo, considerando a soma infinita:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ...$$

intuitivamente, como os termos estão diminuindo cada vez mais, isso nos dá a impressão que se $n$ é muito grande então a contribuição de $\frac{1}{n}$ será muito pequena (e próximo a zero) para esse somatório, o que nos dá a impressão que há um valor "limitante" ao somarmos esses infinitos termos, mas isso não é verdade. O somatório é infinito e é conhecido como Série Harmônica. Recomendamos a leitura do artigo [4] para conhecer um pouco mais sobre este objeto. Ainda sobre a observação, é possível escrever as famosas constantes $\pi$ e $e$ como somatórios infinitos (não nos adentraremos, é a nível de curiosidade) da seguinte forma:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$$

e

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + \frac{(-1)^n}{2n+1} + ...\right).$$

## Problemas Propostos

**Problema 1.1** (Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), 2011, Nível Universitário, Primeira Fase, Problema 1, [14]). Calcule o valor de

$$\sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{\min\{m, n\}}{3^{m+n}}.$$

**Problema 1.2** (Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI), Álgebra, Nível 2, Sequências, [10]). Uma sequência é definida por $a_1 = 2$ e $a_n = 3a_{n-1} + 1$. Determine a soma $a_1 + a_2 + ... + a_n$.

**Dica:** Reescreva $a_n - a_{n-1}$ em função de seus termos anteriores, em seguida utilize o argumento de produtos telescópicos.

**Problema 1.3** (*Olimpiada Matemática Española*, Fase Nacional, 2016, Concurso Final, Barcelona, Problema 1, [7]). Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma progressão aritmética e $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma progressão geométrica tais que: $a_1 = g_1 \neq 0$, $a_2 = g_2$, $a_{10} = g_3$. Prove que para cada inteiro positivo $p$ existe um inteiro positivo $m$ tal que $g_p = a_m$.

**Dica:** Se necessitar de conceitos envolvendo Progressões Aritméticas, veja [21].

**Problema 1.4** (*Indian Statistical Institute (ISI) entrance Bachelor of Statistics (Honours)*, 2003, Problema 3, modificado, [6])**.** Suponha que $a$, $b$ e $c$ são três números reais distintos que estão, nesta ordem, em PG e satisfazem

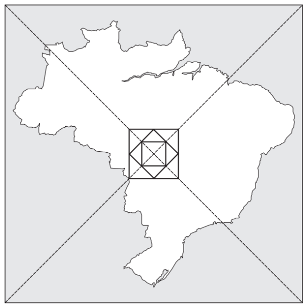
$$a + b + c = xb.$$

Prove que $x < -1$ ou $x > 3$.

**Problema 1.5** (Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI), Álgebra, Nível 2, Recorrência, [9])**.** Seja $(a_n)$ uma PG. Mostre que $P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$, em que $P_n$ corresponde ao produto dos $n$ primeiros termos da PG, ou seja, $P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$.

**Problema 1.6** (Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT), 2016, nível 3, Problema 8, [15])**.** Um tapete de Sierpinski pode ser construído da seguinte forma: A partir de um quadrado de lado 1 dividimos cada lado em $k$ partes iguais onde $k$ é ímpar e maior ou igual a 3, dividindo assim o quadrado de lado 1 em $k^2$ subquadrados iguais. Remova o subquadrado central. Agora divida cada um dos subquadrados restantes novamente em $k^2$ subquadrados iguais e novamente remova os subquadrados centrais. Repita o processo em cada um dos novos subquadrados restantes e assim por diante. O Tapete de Sierpinski é a figura que sobra após a remoção dos subquadrados em cada etapa. Qual a área do tapete de Sierpinski?

**Problema 1.7** (Revista Professor de Matemática (RPM), Logaritmos - Um curso alternativo, Problemas Básicos, $2^a$ ilustração, [5])**.** Quantos quadrados são necessários para "cobrir" o Brasil, supondo o processo indicado na figura em que o quadradinho inicial tem 1 cm de lado e o quadrado externo tem lado igual a 4.500 km?



**Problema 1.8** (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) - Banco de Questões 2018, Problema 10, [13])**.** Um jogo é composto das seguintes regras:

**(i)** Em cada rodada, ocorre o lançamento de um dado comum não viciado.

**(ii)** Se sair o número 3, então o jogador A ganha.

**(iii)** Se sair um dos números do conjunto $\{4, 5, 6\}$, então o jogador B ganha.

**(iv)** Se sair um dos números do conjunto $\{1, 2\}$, então o dado é lançado outra vez até resultar em 3 ou 4 ou 5 ou 6.

Qual a probabilidade do jogador B vencer?


## Agradecimentos

A autora e os autores agradecem o apoio do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) nos projetos Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI), Polo Recife e no Projeto de Extensão da UFRPE Polo de Treinamento Olímpico em Matemática (PTOM - UFRPE). Agradecem também ao Programa de Pós-Graduação de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) por todo o apoio e suporte.


## Referências


[1] ARAÚJO, Y. L. R.; SANTOS, H. P. de S. Recorrências Lineares. É Matemática, Oxente!, Recife, v. 1, n. 23, p. 2-10, jun. 2022. Disponível em: <https://ematematicaoxente.com.br/wp-content/uploads/2023/03/jornal_23ed.pdf>. Acesso em: 01 set. 2023.

[2] *Art of Problem Solving - 1999 AMC 12 Problems*. Disponível em: <https://artofproblemsolving.com/downloads/printable_post_collections/4863>. Acesso em: 29 ago. 2023.

[3] *Art of Problem Solving - 2016 AMC 12B Problems*. Disponível em: <https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2016_AMC_12B_Problems/Problem_14>. Acesso em: 03 out. 2023.

[4] ÁVILA, G. As Séries Infinitas. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, 30. ed. Disponível em: <https://www.rpm.org.br/cdrpm/30/3.htm>. Acesso em: 21 ago. 2023.

[5] FRAENKEL, R. Logaritmos: Um curso alternativo. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, 4. ed. Disponível em: <https://www.rpm.org.br/cdrpm/4/5.htm>. Acesso em: 12 ago. 2023.

[6] *Indian Statistical Institute (ISI) entrance Bachelor of Statistics (Honours) - 2003, Problem 3*, Disponível em: <https://www.cheenta.com/geometric-progression-isi-entrance-b-stat-hons-2003-problem-3/>. Acesso em: 03 out. 2023.

[7] *LII Olimpiada Matemática Española*. Disponível em: <http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es/_csanchez/olimp2016_archivos/fase_nacional_problemas/enunciados.pdf>. Acesso em: 03 out. 2023.

[8] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., MORGADO, A.C. Amatemática do Ensino Médio Vol.2. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[9] Material POTI - Recorrências - Parte I. Disponível em: <https://poti.impa.br/uploads/material_teorico/cg5bhn7jgkoos.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2023.

[10] Material POTI - Sequências. Disponível em: <https://poti.impa.br/uploads/material_teorico/diqafy8dofks4.pdf>. Acesso em: 03 out. 2023.

[11] MELO, S. Indicações de Leituras. É Matemática, Oxente! v. 1, n. 8, 7 p. set. 2018. Disponível em: <https://ematematicaoxente.com.br/wp-content/uploads/2023/03/jornal_8ed.pdf>. Acesso em: 01 out. 2023.

[12] OBMEP Banco de Questões 2014. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1iLIHuWVHyTbng4cgd6RLYWuOwB2cCAfz/view>. Acesso em: 04 set. 2023.

[13] OBMEP Banco de Questões 2018. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1dxeDt_-5HyFg8I1MXlaZJo0a03axzWqq/view>. Acesso em: 14 ago. 2023.

[14] Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/1Fase_NivelU_2011.pdf>. Acesso em: 25 fev. 2023.

[15] Olimpíada Pernambucana de Matemática. Disponível em: <https://www.opemat.com.br/uploads/provasgabaritos/2016-nivel3.pdf>. Acesso em: 03 out. 2023.

[16] Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo. Disponível em: <https://poti.impa.br/>. Acesso em: 21 fev. de 2021.

[17] *Pre-Regional Mathematical Olympiad*. Disponível em: <https://www.cheenta.com/geometric-progression-and-integers-prmo-2017-question-5/>. Acesso em: 21 set. 2023.

[18] Questões ITA 1975 Matemática. Disponível em: <https://cosseno.com/questoes/ITA/1975/Matematica>. Acesso em: 29 ago. 2023.

[19] SOBRAL FILHO, M. A.; ALBUQUERQUE, A. C. C. . Geometria Fractal: alguns "monstros" famosos. É Matemática, Oxente!, Recife, v. 1, n. 12, p. 1-9, set. 2019. Disponível em: <https://ematematicaoxente.com.br/wp-content/uploads/2023/03/jornal_12ed.pdf>. Acesso em: 21 ago. 2023.

[20] TAHAM, M. O Homem que Calculava, 83 ed. Rio de Janeiro: Record, 1981.

[21] VITAL, P.; TANAKA, T. Y.; GUEDES, G. Progressão Aritmética e Triângulo Aritmético de Números Ímpares. É Matemática, Oxente!, Recife, v. 1, n. 27, p. 2-13, jul. 2023. Disponível em: <https://ematematicaoxente.com.br/wp-content/uploads/2023/03/jornal_23ed.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2023.

# 2. Curiosidades

## O Enigma de Einstein

Allana Mylena Gomes de Amorim[1]

Caros leitores, vocês já ouviram falar do "O Enigma de Einstein", também conhecido como "Teste de Einstein", e por que ele não foi criado pelo próprio Einstein?

Na edição de número 27 do Jornal É Matemática, OXENTE! [2], o problema 3 da seção "Problemas" referente à Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico (OBRL) - 2021 - 1ª Fase - Nível Gama aborda uma situação com 3 personagens, em que cada um tem uma característica própria e distinta. São dadas dicas a fim de ser possível relacionar corretamente cada personagem com suas características. Tal desafio lógico envolvido na resolução do problema citado acima está relacionado ao "Teste de Einstein". No entanto, não há nenhuma comprovação que de fato foi Einstein quem o escreveu. Inclusive, é mais fácil pensar que seu nome foi dado ao problema com o intuito de conquistar popularidade.

No livro "O Enigma de Einstein" [3], de Jeremy Stangroom (2011), é apresentado o desafio lógico com a premissa que apenas 2% da população seria capaz de solucioná-lo. Porém, é razoável pensar que é possível para os outros 98% da população resolvê-lo, pois o problema envolve apenas raciocínio lógico, podendo ser relacionado às noções mais elementares sobre conjuntos, relações, e até mesmo funções.

**O enigma é o seguinte:**

Há cinco casas diferentes e em cada uma há 5 características distintas atribuídas. São elas: cor, nacionalidade, bebida, cigarro e animal. Mais detalhadamente:

(I) Cor: amarelo, azul, branco, verde e vermelho;

(II) Nacionalidade: alemão, dinamarquês, inglês, norueguês e sueco;

(III) Bebida: água, café, chá, cerveja e leite;

(IV) Cigarro: Blends, Blue Master, Dunhill, Pall Mall e Prince;

(V) Animal: cachorros, cavalos, gatos, pássaros e peixes.

**As dicas são:**

1. O inglês mora na casa vermelha;
2. O suíço tem um cão como animal de estimação;
3. O dinamarquês bebe chá;
4. A casa verde fica imediatamente à esquerda da casa branca;
5. O dono da casa verde bebe café;
6. O proprietário que fuma Pall Mall tem um pássaro;
7. O dono da casa amarela fuma Dunhill;
8. O proprietário morando na casa do centro bebe leite;
9. O norueguês mora na primeira casa;
10. O dono que fuma Blends mora ao lado do que cria gatos;
11. O proprietário que cria um cavalo mora ao lado do que fuma Dunhill;

[1]Discente do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco e monitora do Jornal É Matemática, OXENTE!

12. O dono que fuma Blue Masters bebe cerveja;
13. O alemão fuma Prince;
14. O norueguês mora ao lado da casa azul;
15. O proprietário que fuma Blends mora ao lado do que bebe água.

**A pergunta é:** quem é o dono do peixe?

**Uma boa estratégia para respondê-la é:** Inicialmente construir uma tabela para facilitar a relação e visualização das informações já conhecidas com as que ainda faltam. Tal tabela teria como colunas as casas e como linhas as características, por exemplo.

**Tabela 1:** Construção inicial da tabela

| | Casa 1 | Casa 2 | Casa 3 | Casa 4 | Casa 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Cor | | | | | |
| Origem | | | | | |
| Bebida | | | | | |
| Cigarro | | | | | |
| Animal | | | | | |

Depois iniciar com as dicas que contêm afirmações claras, como : "O norueguês mora na primeira casa", "O norueguês mora ao lado da casa azul" e "O proprietário morando na casa do centro bebe leite". Observe os exemplos dados na construção a seguir.

**Tabela 2:** Preenchimento das informações fornecidas

| | Casa 1 | Casa 2 | Casa 3 | Casa 4 | Casa 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Cor | | Azul | | | |
| Origem | Norueguês | | | | |
| Bebida | | | leite | | |
| Cigarro | | | | | |
| Animal | | | | | |

Em seguida, classificar as dicas em possíveis casas. Por exemplo, dadas as dicas acima sabemos que a cor verde pode ser da casa 2 ou 3, pois pela dica 4 a casa verde fica do lado esquerdo da casa Branca. Além disso, pela dica 5, o dono da casa verde bebe café. Assim, a cor verde só pode ser da casa 4 o que implica que a casa 5 é branca.

**Tabela 3:** Classificação das dicas em possíveis casas

| | Casa 1 | Casa 2 | Casa 3 | Casa 4 | Casa 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Cor | | Azul | Verde | Branca | |
| Origem | Norueguês | | | | |
| Bebida | | | leite | Café | |
| Cigarro | | | | | |
| Animal | | | | | |

Seguindo dessa forma, ao final haverá dicas que dependem da tentativa e estimativa feita, que por fim completam a tabela.

De modo geral, apesar do "Enigma de Einstein" não ser necessariamente proposto por ele e não ser restrito para apenas 2% da população, a verdade é que ele é um exercício do pensamento lógico. Podendo ser trabalhado por professores para engajar os alunos em assuntos como teoria dos conjuntos, relações, e também integrar com a construção de tabelas. Verificamos que questões com a mesma proposta podem ser vistas tanto em provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), por exemplo nas de 2023 - Nível 2 - Q.18 e 2018 - Nível A - Q.20, quanto no banco de questões da OBMEP de 2018 - Nível 1 - Q.12. Além disso, para nossos leitores também pode ser uma forma de descontrair e exercitar o pensamento lógico.

## Referências


[1] SIMÕES, Márcio. O problema que Einstein não criou: Quem é o dono do peixinho?. Imaginário Puro, 2019. Disponível em: https://imaginariopuro.wordpress.com/2019/05/07/o-problema-que-einstein-nao-criou-quem-e-o-dono-do-peixinho/. Acesso em: 01, nov. de 2023.

[2] É Matemática, Oxente!: O Jornal de Matemática Olímpica. Disponível em: https://ematematicaoxente.com.br. Acesso em: 04, nov. de 2023.

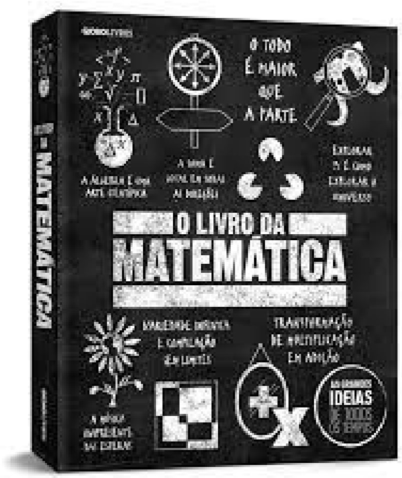
[3] Literatura e educação : gêneros, políticas e propostas / organização Maria Amélia Dalvi...[et al.]. – Campos dos Goytacazes, RJ : Brasil Multicultural, 2018. p 46.

# 3. Indicações de Leituras

## O Livro da Matemática

Roberta Elaine Domingos de Araújo[2]

A obra **"O Livro da Matemática"** faz parte da coleção best-seller *As grandes ideias de todos os tempos* que tem mais de 20 títulos publicados de assuntos tão diversos como filosofia, economia e história, entre outros.




O Livro da Matemática está repleto de explicações concisas, sem formalidades, com infográficos que descomplicam teorias complexas e citações que facilitam a visualização e memorização dos conceitos, além de ilustrações que complementam e brincam com nossa compreensão dos números.

Nele podemos observar a Matemática em cronologia, com a jornada histórica dos humanos descobrindo a matemática como modo de classificá-la e arranjá-la de forma ordenada. Iniciando no século IX a.C. na China, essa história vai passando por textos indianos de 100 d.C., por árabes da Idade Média, pela Europa renascentista e finalmente pelos enigmas modernos como Sudoku. Por exemplo, na Introdução fala-se sobre quadrados mágicos, que são arranjos de números em tabelas com a mesma quantidade de linhas e colunas nos quais a soma de cada linha, coluna e diagonal é sempre igual, abordando de maneira interessante uma das mais antigas formas recreativas da Matemática.

O capítulo, Século XIX, traz uma explanação sobre matrizes cujas aplicações podem ser observadas na matemática, física e ciência da computação. Neste último exemplo, encontramos aplicabilidade em computação gráfica e na descrição do fluxo de um fluido. A evidência mais remota conhecida de tais arranjos data de 2600 a.C. na Civilização Maia da América Central. Alguns historiadores creem que o povo maia resolvia equações por meio de manipulações dos números em linhas e colunas, citando como evidência decorações que parecem grades em monumentos e trajes sacerdotais.

Este livro tem muitas das grandes ideias em matemática, as descobertas mais antigas até algumas mais recentes, numa linguagem acessível, descrevendo de onde vieram, quem as descobriu e o que as tornam significantes. Dessa forma, com a sua compreensão ao longo da História e da visão das pessoas e sociedades em que foram descobertas, podemos apreciar toda a beleza do conhecimento que a Matemática pode nos proporcionar.

Por isso é uma leitura complementar e envolvente tanto para curiosos no assunto quanto para os estudantes mais entusiasmados.

### Referências.

[1] O Livro da Matemática / editor consultor Karl Warsi; tradução Maria da Anunciação Rodrigues. -1.ed.- Rio de Janeiro: Globo Livros, 2020.

# 4. Quem pergunta, quer saber!

## Revista do Professor de Matemática (RPM, nº 39, p.58)

Severino Barros de Melo[3]

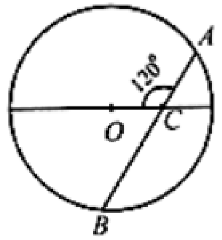
[2]Discente do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco e monitora voluntária do Jornal É Matemática, OXENTE!

[3]Docente da Universidade Federal Rural de Pernambuco

Quando estamos diante de problemas de geometria, muitas vezes se faz necessário a introdução de um elemento auxiliar, presente de modo implícito no enunciado. A inserção deste elemento torna-se chave para a descoberta do caminho rumo à solução do problema. Essa situação se verifica na questão seguinte com relação ao segmento OM . A pergunta foi feita à Revista do Professor de Matemática (RPM, n.39, p.58) por dois professores de Matemática de Teresina (PI).

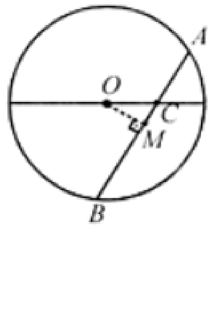
**Pergunta:**

Determinar a área do círculo da figura, sendo dados $O\widehat{C}A = 120°$, $AC = 4\,cm$, e $BC = 6\,cm$.



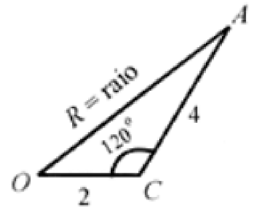

**Resposta da RPM:**

A reta perpendicular à corda $\overline{AB}$, pelo ponto O, que é o centro da circunferência, corta a corda em seu ponto médio M, logo: $BM = MA = 5$ e, então, $CM = 1$. No triângulo $\triangle OMC$, retângulo em M, temos $\cos 60° = \dfrac{CM}{OC} = \dfrac{1}{2}$, então $OC = 2$.




No $\triangle OCA$ conhecemos, então, o ângulo de $120°$ e seus lados adjacentes $OC = 2$ e $AC = 4$; logo pela lei dos cossenos, podemos escrever:
$R^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cos(120°) = 20 - 16(-\dfrac{1}{2}) = 28.$

A área do círculo é $28\pi cm^2$.




# 5. Soluções de Olimpíadas

## I Copa Nordestina de Matemática

Nesta edição apresentaremos a resolução das questões da prova da I Copa Nordestina de Matemática (CONEMAT), realizada em Julho de 2023.

**Problema 5.1.** Um bidígito de um número é qualquer número formado por dois algarismos consecutivos desse número. Por exemplo, 35 e 52 são bidígitos de 352, já o 32 não é bidígito de 352. Seja $n$ um número natural. Um número $X$ é chamado de $n$-cangaceiro, se $X$ for obtido através da multiplicação de todos os algarismos e todos os bidígitos de n. Por exemplo, 1656 é 123-cangaceiro, pois $1656 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 23$. O número 2034 é $n$-cangaceiro para algum $n$?

*Solução.* A fatoração em primos do número 2024 é $2^3 \cdot 503$, sendo assim, não existe tal número, pois 503 não pode ser nem dígito e nem bidígito de um número.
□

**Problema 5.2.** Júlio escreveu em seu caderno todas as equações da forma $x^2 + ax + b = 0$ que possuem duas raízes inteiras e distintas tais que $a$ e $b$ são números inteiros satisfazendo a inequação $-2 < 2a + b < 2$. Encontre todas as equações escritas por Júlio.

*Solução.* Primeiramente note que sendo $\alpha$ e $\beta$ as raízes de $x^2 + ax + b = 0$ temos que

$$x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta).$$

Dái, $4 + 2a + b = (2 - \alpha)(2 - \beta)$, o que nos dá $2 < (2 - \alpha)(2 - \beta) < 6$.

Como $\alpha$ e $\beta$ são inteiros então $(2 - \alpha)(2 - \beta) = 3, 4$ ou $5.$.

Então temos os seguintes casos:

1): $(2 - \alpha) = 1, (2 - \beta) = 3$, o que nos dá $\alpha = 1$, $\beta = -1$ e a equação $x^2 - 1$;

2): $(2-\alpha)=-1,(2-\beta)=-3$, o que nos dá $\alpha=3$, $\beta=5$ e a equação $x^2-8x+15$;

3): $(2-\alpha)=1,(2-\beta)=4$, o que nos dá $\alpha=1$, $\beta=-2$ e a equação $x^2+x-2$;

4): $(2-\alpha)=-1,(2-\beta)=-4$, o que nos dá $\alpha=3$, $\beta=6$ e a equação $x^2-9x+18$;

5): $(2-\alpha)=1,(2-\beta)=5$, o que nos dá $\alpha=1$, $\beta=-3$ e a equação $x^2+2x-3$;

6): $(2-\alpha)=-1,(2-\beta)=-5$, o que nos dá $\alpha=3$, $\beta=7$ e a equação $x^2-10x+21$;

Os casos em que $(2-\alpha)=2,(2-\beta)=2$ e $(2-\alpha)=0,(2-\beta)=0$ foram excluídos pois não fornecem raízes distintas. Dese modo, encontramos todas as equações escritas por Júlio.

□

**Problema 5.3.** Um número natural $a$ é chamado nordestino se para todo natural $n$ o número $p_n=a^{n+3}+3a^n+3$ é composto.

a) Mostre que 3 e 8 são números nordestinos.

b) Mostre que existem mais de 600 números nordestinos no conjunto $\{1,2,...,2023\}$.

c) Mostre que existem mais de 800 números nordestinos no conjunto $\{1,2,...,2023\}$.

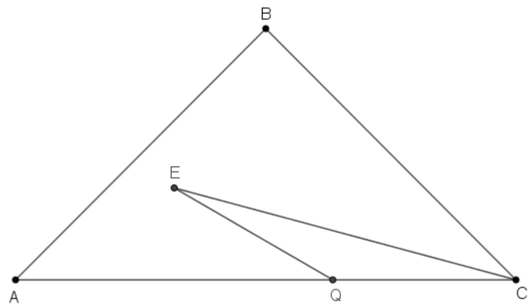
*Solução.* a) Observe que se $a=3$ então $p_n=3^{n+3}+33^n+3$ é multiplo de $3$ para todo $n$ natural. Se $a=8$ então $p_n=8^{n+3}+38^n+3$ é múltiplo de $7$ para todo $n$ natural. Desse modo $3$ e $8$ são nordestinos.

b) Note que se $a\equiv 0 \pmod 3$, então $p_n$ é composto. Sabemos que há 674 de tais números.

c) Observe que se $a\equiv 1 \pmod 7$ então $p_n$ é composto. Sabemos que há 230 desses números. A interseção corresponde aos números $a\equiv 15 \pmod{21}$ cuja quantidade é 96. Assim obtivemos ao menos 808 números nordestinos.

□

**Problema 5.4.** Abaixo, temos o triângulo $ABC$, no qual é possível marcar o ponto $E$ no seu interior, e o ponto $Q$ em $AC$, de modo que $AB=CE$, $\measuredangle BCE=\measuredangle EAC$ e $\measuredangle BAE=\measuredangle ECA=\measuredangle QEC=30^\circ-\dfrac{\measuredangle BCE}{2}$.




a) Mostre que o triângulo $ABE$ é isósceles.

b) Encontre os ângulos do triângulo $ABC$.

*Solução.* a) Como $\angle BAE=\angle ECA$ e $\angle BCE=\angle EAC$, podemos concluir que o triângulo $ABC$ é isósceles de base $AC$, sendo $AB=BC$. Logo, o triângulo $BCE$ é isósceles de base $BE$, sendo $\angle EBC=\angle BEC=90^\circ-\dfrac{\angle BCE}{2}$.
Somando os ângulos do triângulo $ABC$ e lembrando que $\angle BAE=\angle ECA=30^\circ-\dfrac{\angle BCE}{2}$, temos:

$$\begin{gathered}\angle ABE+\angle EBC+\angle BCE+\\ \angle ECA+\angle EAC+\angle BAE=180^\circ\end{gathered}$$

Essa equação é quivalente a

$$\begin{aligned}\angle ABE+90^\circ-\frac{\angle BCE}{2}&+\\ \angle BCE+30^\circ-\frac{\angle BCE}{2}&+\\ \angle BCE+30^\circ-\frac{\angle BCE}{2}&=180^\circ.\end{aligned}$$

Desse modo,
$\angle ABE=30^\circ-\dfrac{\angle BCE}{2}$.
A última igualdade mostra que o triângulo $ABE$ é isósceles de base $AB$, pois $\angle ABE$ é isósceles de base $AB$, pois $\angle ABE=\angle BAE$.

b) Note que o triângulo $CEQ$ é isósceles de base CE, já que $\angle ECA=\angle QEC=30-\dfrac{\angle BCE}{2}$, o que implica na congruência entre os triângulos $ABE$ e $CEQ$ pelo caso $ALA$, pois são isósceles com os mesmos ângulos nas bases e $AB=$

$CE$. Tal congruência revela que o triângulo $AQE$ é isósceles de base $AQ$, pois $AE = EQ$, donde $\angle AQE = \angle EAQ = \angle BCE$. Finalmente, pelo teorema do ângulo externo, temos $\angle AQE = \angle QEC + \angle ECQ$, o que é equivalente a $\angle BCE = 30° - \dfrac{\angle BCE}{2} + 30° - \dfrac{\angle BCE}{2}$, donde $\angle BCE = 30°$. Portanto, os ângulos internos do triângulo $ABC$ são $45°$, $45°$ e $90°$.

□

**Problema 5.5.** O professor Samuel escreveu uma lista de números inteiros no quadro e disse para seus alunos que a cada segundo eles poderiam escolher dois deles, digamos $p$ e $q$, e trocá-los por $p + q$ e $|p - q|$. A lista a seguir exibe um exemplo de uma sequência de trocas possível:

$$1, 2, 3 \to 3, 1, 3 \to 4, 2, 3 \to 6, 2, 3.$$

Se a lista $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ é transformando por meio de trocas em $8$ números iguais a $k$, quais os possíveis valores desse número?

*Solução.* Se $p$ é um número primo ímpar, $p$ divide $p$ e $q$ se, e somente se, $p$ divide $p + q$ e $|p - q$. Portanto, se há um divisor primo ímpar em $k$, então ele deve dividir todos os números iniciais. Isso é um absurdo. Logo, $k$ é uma potência de $2$. Logo, $k$ é uma potência de $2$. Como qualquer operação com $8$ irá criar um número maior que $8$, o valor de $k$ é pelo menos $8$. Vamos mostrar que $k$ pode ser qualquer número da forma $2^n$ com $n \geq 3$. Primeiramente, vamos mostrar como exibir uma lista com $8$ números iguais a $8$:

$$\begin{aligned}
&\underline{1}, 2, 3, 4, 5, 6, \underline{7}, 8 \to 6, \underline{2}, 3, 4, 5, \underline{6}, 8, 8 \to \\
&6, 4, \underline{3}, 4, \underline{5}, 8, 8, 8 \to \underline{6}, 4, \underline{2}, 4, 8, 8, 8, 8 \to \\
&8, \underline{4}, \underline{4}, 4, 8, 8, 8, 8 \to 8, 8, \underline{0}, \underline{4}, 8, 8, 8, 8 \to \\
&8, 8, \underline{4}, \underline{4}, 8, 8, 8, 8 \to 8, 8, \underline{8}, \underline{0}, 8, 8, 8, 8 \to \\
&8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8
\end{aligned}$$

Uma vez que tenhamos criado uma lista com $8$ números iguais a $a$, podemos gerar novas listas com os dobros desses números operando com pares deles:

$$a, a \to 2a, 0 \to 2a, 2a.$$

Assim, podemos gerar como valor de $a$ todas as potências de $2$ com expoente maior ou igual a $4$. □

## 6. Eventos

### Fiquem Ligados!!!

- **55º Programa de Verão 2024**
  - Local: Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
  - Data: 02 de Janeiro a 15 de Março de 2024
  - Mais informações: https://sites.google.com/view/verao2024/
- **XIII Escola de Verão em Matemática da UFS**
  - Local: Universidade Federal de Sergipe (UFS)
  - Data: 08 de Janeiro a 02 de Março de 2024
  - Mais informações: https://verao.mat.ufs.br/
- **Programa de Verão PGMAT UFBA - 2024**
  - Formato: online
  - Data: 08 de Janeiro a 08 de Março de 2024
  - Mais informações: http://verao.ime.ufba.br/index
- **Estágio Supervisionado Obrigatório: experiências na sala de aula de matemática**
  - Local: CEGEN - Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)
  - Data: 05 a 08 de Fevereiro de 2024
  - Mais informações: https://www.even3.com.br/estagio-supervisionado-obrigatorio-experiencias-na-sala-de-aula-de-matematica-394792/

## 7. Problemas

Convidamos o leitor a responder alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Enviem as soluções dos problemas propostos para o e-mail:*ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, o envio do arquivo (.tex), no modelo disponível no site, deve ser realizado até $\mathbf{26/02/2024}$.

**Problema 1.** (1ª CELL 2021) Seja $f : \{1, 2, ...\} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(n) - f(n+1) = f(n)f(n+1)$ para todo $n \geq 1$. Sabendo que $f(2020) = \dfrac{1}{4040}$, o valor de $f(1)$ é:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{4040}$

c) $\frac{1}{2021}$

d) $1$

e) $\frac{1}{2020}$.

**Problema 2.** (GN 2017 - 1ª fase) Quantos valores inteiros de $x$ no intervalo $[1, 100]$ fazem com que o determinante da seguinte matriz seja múltiplo de $3$?

$$\begin{pmatrix} x^2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & x+2 \end{pmatrix}$$

a) 0 b) 34 c) 64 d) 100.

**Problema 3.** (2ª fase - Nível 2 XXXV-OBM) Uma hora potência é uma hora cujo formato representa uma potência perfeita de número inteiro com expoente maior que 1, ou seja, algo no formato $a^b$ em que $a$ e $b$ são inteiros e $b > 1$. Por exemplo, $03 : 43$ é uma hora potência afinal $343 = 7^3$, mas $01 : 10$ não é uma hora potência, afinal $110$ não é potência exata de número inteiro. Também $02 : 89$ não é hora potência, embora $289 = 17^2$, pois não existe a hora $02 : 89$ já que os minutos vão apenas até 60. Quantas horas potências existem depois de $00 : 00$ e antes de $02 : 59$?

# 8. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n. 27, julho de 2023**.

**Problema 1.** (OBMEP 2015 - 1ª fase) O retângulo da figura possui área igual a $640cm^2$. Os pontos $B$ e $F$ são pontos médios dos lados $AC$ e $AE$, respectivamente. Qual é a área do triângulo $BDF$?

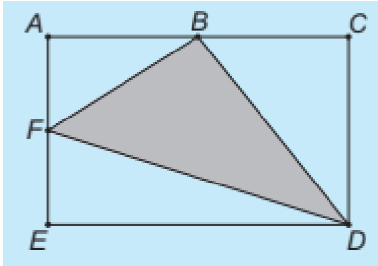
a) $100cm^2$

b) $120cm^2$

c) $160cm^2$

d) $220cm^2$

e) $240cm^2$




*Solução.* [4] Considerando $AC = ED = x$; $AE = CD = y$, como os pontos B e F são pontos médios dos seus segmentos, temos:

$$AF = FE = \frac{y}{2} \text{ e } AB = BC = \frac{x}{2}.$$

Assim, temos

$$A_{ACDE} = xy = 640;$$
$$A_{ABF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2} = \frac{xy}{8} = \frac{640}{8} = 80;$$
$$A_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{y}{2} = \frac{xy}{4} = \frac{640}{4} = 160;$$
$$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot y = \frac{xy}{4} = \frac{640}{4} = 160.$$

Daí, $A_{BDF} = 640 - (80 + 160 + 160) = 640 - 400 = 240\ cm^2$.

Resposta item e.

□

**Problema 2.** (OBMEP - 2017 - 1º Fase - Nível 3) Uma caixa contém nove bolas idênticas numeradas de $1$ a $9$. Uma primeira bola é sorteada, seu número é anotado e a bola é devolvida à caixa. Repete-se esse procedimento mais duas vezes, anotando-se também os números da segunda e terceira bolas sorteadas. Qual é a probabilidade de que a soma dos números nas duas primeiras bolas sorteadas não seja um múltiplo de $3$ e a soma dos números nas três bolas sorteadas seja um múltiplo de $3$?

a) $\dfrac{2}{9}$

b) $\dfrac{1}{3}$

c) $\dfrac{2}{3}$

d) $\dfrac{6}{9}$

e) $\dfrac{7}{9}$

[4] As soluções dos problemas 1 e 3 foram enviadas pelo leitor Amaro José de Oliveira Filho

*Solução.* Temos $9$ bolas identificadas com os números entre $1$ e $9$. Sorteando-se $3$ bolas teremos os números $a$, $b$, $c$ que variam de $1$ a $9$, ou seja, nosso espaço amostral é $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ eventos equiprováveis. Note que um número natural pode ser múltiplo de $3$ ou estar a uma distância de $1$ ou $2$ do próximo múltiplo de $3$. Como por exemplo temos o $7$, que está a uma distância $2$ de $9$ e o $8$ que está a uma distância $1$ de $9$. Assim, $a$ pode ser escolhido de $9$ maneiras, e, para que $a + b$ não seja múltiplo de $3$, $b$ não pode assumir $3$ dos $9$ valores, isto é, ou não pode assumir $3$, $6$ e $9$ ou não pode assumir $1$, $4$ e $7$ ou não pode assumir $2$, $5$ e $8$. Logo $b$ pode assumir $6$ valores.

Para escolher $c$, utilizando o mesmo raciocínio, queremos que ele assuma um dos três valores que tornam o resultado da soma $a + b + c$ um múltiplo de $3$. Portanto, para satisfazer as condições da questão teremos $a \cdot b \cdot c = 9 \cdot 6 \cdot 3$ que é igual a $162$ e a probabilidade é $\frac{162}{729} = \frac{2}{9}$.

□

**Problema 3.** (OBRL - 2021 1ª Fase Nível Gama) Três distintos rapazes: Asteroide; Apocalipe e Artitty moravam cada um em uma cidade distinta: Barozopolis (PR); Xique-xique (BA) e Sem-peixe (MG), tendo cada um uma característica própria: Louro, Moreno e Ruivo, Cada um com uma única profissão: Escritor de bilhete da sorte; Testador de Colchão e Testador de toboágua. Sabe-se ainda:

I. Asteroide é Testador de Colchão, não mora em Xique-xique (BA) e não é Louro.

II. Artitty não é Escritor de bilhete da sorte, mora em Sem-peixe (MG) e é ruivo.

Então é correto afirmar que:

a) Apocalipe é moreno.

b) Apocalipe não mora em Xique-xique (BA).

c) Apocalipe é Escritor de bilhete da sorte.

d) Apocalipe é Ruivo.

e) Apocalipe é Testador de Colchão.

*Solução.* Por (II) Artity não é Escritor de bilhete da sorte, mas também não é Testador de colchão, pois por (I) Asteroide é Testador de colchão, logo Artity é Testador de toboágua.

Daí, Apocalipe é Escritor de bilhete da sorte.

Resposta item c.

□