É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 28, volume 1, outubro de 2023

ISSN 2526-8651

Editorial

Caros Leitores,

Estamos novamente juntos, desta vez, com o lançamento da edição de outubro de 2023 do nosso É Matemática, OXENTE! Do último número para cá alguns fatos oxigenaram nossos objetivos, apontando que estamos no rumo certo. Dentre eles destacamos a aprovação do nosso projeto no Edital BEXT 2023, propiciando agregar à equipe do jornal uma aluna do curso de Licenciatura em Matemática como bolsista de extensão.

Do ponto de vista das relações externas, fechamos uma parceria com a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) no sentido de além de termos um pouco da nossa história publicada na edição 57 do noticiário, iremos contribuir com a publicação de questões olímpicas.

A presente edição traz na seção artigo um trabalho intitulado O Princípio da Indução Finita, de autoria da professora Isis Gabriella de Arruda Quinteiro Silva, da Universidade Federal do Agreste de Pernambuco. O artigo insere o leitor em um dos mais importantes métodos de demonstração em Matemática, bem como sua aplicação em diversos resultados, inclusive questões de olimpíadas.

A seção curiosidade apresenta a contribuição do professor Ricardo Nunes Machado Junior da Universidade Federal Rural de Pernambuco a respeito do TeX, LaTeX e PreTeXt, processadores de textos muito utilizados por pesquisadores, professores e estudantes de Matemática. A seção traz indicações de como aprofundar seus conhecimentos acerca desse tema, indicando alguns sites como referências.

A indicação de filme chega com A Prova, sugestão da aluna Roberta Elaine Domingos de Araújo, do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco e monitora voluntária do OXENTE. O filme é um drama que aborda as consequências familiares da vida de Robert, um matemático brilhante e sua filha Catherine, levando o expectador a uma reflexão acerca da genialidade, sanidade mental e relações sociais na vida privada.

A seção Quem pergunta, quer saber! responde à dúvida de um professor a respeito do que poderia acontecer na trigonometria se o raio do círculo trigonométrico assumisse um valor diferente de 1.

Finalizamos a edição com soluções de questões da OPEMAT 2021, nível 3, informes sobre eventos e os problemas propostos e resolvidos, fruto da contribuição dos nossos leitores.

No intervalo entre a edição anterior e a atual, realizamos uma live intitulada “O teorema de Pitágoras e algumas de suas generalizações” na qual Letícia Maria Menezes dos Santos e Yasmin Lopes de Carvalho, egressas do curso de Licenciatura em Matemática da UFRPE apresentaram e dialogaram acerca de um artigo de mesmo conteúdo publicado na 15ª edição do nosso jornal.

Um agradecimento especial a todos e todas que de diversas maneiras colaboraram nessa publicação e desejamos que aproveitem ao máximo essa edição.

O Comitê Editorial.

Sumário

1. Artigo

O Princípio da Indução Finita

Isis Gabriella de Arruda Quinteiro Silva
Universidade Federal do Agreste de Pernambuco
(Av. Bom Pastor s/n, Boa Vista) - Garanhuns-PE - Brasil
(55292-270)

Introdução

Os primeiros números que aparecem na vida de uma pessoa, ainda na fase da infância, são os números naturais, que surgem com a finalidade de contagem. Apesar desses números serem os mais simples no sentido de aparecerem em várias situações do cotidiano, existem alguns mistérios que os cercam. Por exemplo, se alguém nos perguntar o que é o conjunto dos números naturais, será que conseguiremos responder satisfatoriamente? Podemos descrever esse conjunto, de maneira intuitiva, dizendo quais são os seus elementos:

$$1\ ,\ 2 = 1+1,\ 3 = 2+1 = 1+1+1,\ ....$$

Entretanto, mesmo sabendo quais são os elementos representados pelos pontinhos, dificilmente conseguiremos demonstrar que alguma propriedade é válida para todos os números naturais utilizando essa caracterização.
Considere, por exemplo, a expressão $n^2 - n + 41$, sendo n qualquer número natural. Ao calcularmos o valor dessa expressão para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ...e $n = 40$, obtemos em todos esses casos, um número primo como resultado. Podemos então começar a pensar na possibilidade de que $n^2 - n + 41$ seja um número primo para todo $n \in \mathbb{N}$. Entretanto, como o conjunto dos números naturais é infinito, é impossível verificarmos se isso é verdade para todo n natural substituindo n por todos os possíveis valores que ele pode assumir em $\mathbb{N}$. Poderíamos pensar, então, em analisar o que acontece com a expressão quando substituímos n por uma grande quantidade de valores e tentar deduzir, com base nisso, o que ocorre para os outros valores de n (Será?????). Calculamos então o valor da expressão $n^2 - n + 41$ para $n = 41$, teremos $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ que não é um número primo, contrariando nossa expectativa. Esse exemplo nos mostra que analisar a veracidade de uma propriedade para qualquer quantidade de números naturais, NUNCA será suficiente para concluirmos que tal propriedade é verdadeira para todo número natural.
Uma alternativa para esse problema é caracterizar o conjunto dos números naturais através de alguma propriedade que o descreva de forma inequívoca. Neste texto, apresentamos o Princípio da Indução Finita, resultado que possibilita uma caracterização completa do conjunto dos números naturais. Inicialmente, considere um subconjunto S dos números reais que possui as seguintes propriedades:

(1) S contém o número 1.

(2) Toda vez que S contém um número n, ele necessariamente contém o número $n + 1$.

(3) Não existe subconjunto próprio de S satisfazendo as condições (1) e (2).

Antes de continuarmos, faremos algumas considerações sobre essas propriedades.

Observação 1.1. No estágio em que estamos, não temos condições de mostrarmos que tal conjunto S satisfazendo as propriedades anteriores existe. Por isso, admitiremos o seguinte axioma: Existe um único subconjunto dos números reais que possui as propriedades (1) , (2) e (3). Este conjunto será chamado de conjunto dos números naturais e será denotado por $\mathbb{N}$.

Observação 1.2. A propriedade (3) é conhecida como *Axioma da Indução*.

O Axioma da Indução nos fornece uma das mais poderosas técnicas de demonstração utilizadas na matemática: a demonstração por indução. Descrevemos essa técnica de demonstração, que é comumente chamada de Princípio da Indução Finita, a seguir.

Teorema 1.1. *(Princípio da Indução Finita- Primeira Forma) Considere uma sentença aberta $P(n)$ definida sobre o cojunto dos números naturais (veja [4]). Suponha que:*

(i) $P(1)$ *é verdadeira e que, além disso,*

(ii) *sempre que* $P(n)$ *é verdadeira para algum* $n \in \mathbb{N}$*, necessariamente* $P(n+1)$ *é verdadeira. Então,* $P(n)$ *é verdadeira para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Se as condições (i) e (ii) são satisfeitas, então o subconjunto S de $\mathbb{R}$ que contém todos os números $n \in \mathbb{N}$ tais que $P(n)$ é verdadeira, satisfaz as condições (1) e (2) descritas anteriormente. Segue então da propriedade (3) que $S = \mathbb{N}$. Portanto, nesse caso, a sentença é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

No uso do Princípio da Indução Finita, ao supormos que $P(n)$ é verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, tal $P(n)$ é chamada *Hipótese de Indução*. O primeiro registro que se tem na história sobre uma demonstração por indução é de 1575 e a técnica foi utilizada por *Francesco Maurolycos*. É preciso deixarmos claro que a Indução Matemática é diferente da indução empírica das ciências naturais, em que é comum, após um certo número finito de experimentos, enunciar leis gerais que governam o fenômeno em questão. Essas leis são tidas como verdades até que se prove o contrário. Na matemática, não há lugar para afirmações verdadeiras até prova em contrário. Sugerimos ao leitor que se sentir curioso com essa questão, a leitura de [4], onde tratamos de maneira simples sobre essa questão.
A indução empírica foi batizada, ironicamente, pelo matemático filósofo do século passado ***Bertrand Russel***, de ***indução galinácea***, com base na seguinte ilustração:

Havia uma galinha nova no quintal de uma velha senhora. Diariamente, ao entardecer, a boa senhora levava milho para as galinhas. No primeiro dia, a galinha, desconfiada, esperou que a senhora se retirasse para se alimentar. No segundo dia, a galinha, prudentemente, foi se alimentando enquanto a senhora se retirava. No nonagésimo dia, a galinha, cheia de intimidade, já não fazia caso da velha senhora. No centésimo dia, ao se aproximar da senhora, a galinha, por indução, foi ao encontro dela para reclamar seu milho. Qual não foi a sua surpresa quando a senhora pegou-a pelo pescoço com a intenção de pô-la na panela.

Essa historinha ilustra a forma como a indução empírica é utilizada. Note que, neste exemplo, não utiliza-se o fato de $P(n)$ é verdadeira, para algum $n \in \mathbb{N}$, para concluir que $P(n+1)$ é verdadeira.
Exibimos a partir de agora alguns exemplos em que o uso do Princípio da Indução se faz essencial para a verificação de algumas propriedades envolvendo números naturais.

Exemplo 1.1. Vamos mostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $5^n + 2.11^n$ é divisível por 3.

Solução:
1. Para $n = 1$, temos que $5^1 + 2.11^1 = 27$ que é divisível por 3.
2. Suponha agora que, para algum $n \in \mathbb{N}$, $5^n+2.11^n$ é divisível por 3. Logo, existe um número inteiro a

tal que

$$5^n + 2.11^n = 3a.$$

Multiplicando por 5 ambos os lados desta igualdade, temos

$$5.3a = 5^{n+1} + 5.2.11^n = 5^{n+1} + 2.11.11^n - 12.11^n.$$

Daí, segue que

$$5^{n+1} + 2.11^{n+1} = 5.3a + 12.11^n$$

$$= 3.(5a + 4.11^n).$$

O resultado segue então pelo Princípio da Indução Finita.

Exemplo 1.2. Uma progressão aritmético-geométrica é uma sequência (a_n) tal que a_1, q e r são números reais dados, com $q \neq 1$, e, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$a_{n+1} = q.a_n + r.$$

Mostre que $a_n = a_1.q^{n-1} + r.\frac{q^{n-1}-1}{q-1}$.

Solução: Usaremos o Princípio da Indução Finita para verificarmos que

$$a_n = a_1.q^{n-1} + r.\frac{q^{n-1}-1}{q-1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(i) Se $n = 1$, verificamos facilmente que a expressão é válida.

(ii) Suponha que a expressão é válida para algum $n \in \mathbb{N}$, isto é, que $a_n = a_1.q^{n-1} + r.\frac{q^{n-1}-1}{q-1}$. Vamos verificar que a expressão também vale para $n + 1$. Temos:

$$a_{n+1} = q.a_n + r$$

$$= q.\left(a_1.q^{n-1} + r.\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right) + r$$

$$= a_1.q^n + r.\frac{q^n - 1}{q-1}.$$

O resultado segue então pelo Princípio da Indução Finita.

Pode ocorrer de uma propriedade ser válida para todos os números naturais a partir de um determinado número a, mas não necessariamente para valores menores que a. Por exemplo, a desigualdade $2^n > n^2$ não é verdadeira para $n = 2, 3, 4$, mas é possível mostrar que essa propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 5$, utilizando o seguinte resultado, que é uma generalização da versão apresentada anteriormente do Princípio da Indução Finita.

Teorema 1.2. *(Princípio da Indução Finita- Generalização) Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$ e seja $a \in \mathbb{N}$. Suponha que:*
(i) $P(a)$ seja verdade e
(ii) $P(n+1)$ seja verdade sempre que $P(n)$ for verdade, para $n \geq a$.
Então, $P(n)$ é verdade para todo número natural $n \geq a$.

Demonstração: Defina o conjunto

$$S = \{m \in \mathbb{N}; P(m + a - 1) \text{ é verdade}\}.$$

Por (i), temos que $1 \in S$. Por outro lado, se $m \in S$, então $P(m + a - 1)$ é verdade. Logo, por (ii), $P(m + 1 + a - 1)$ é verdade. Portanto, $(m + 1) \in S$. Pelo Princípio da Indução Finita, segue que $S = \mathbb{N}$. Consequentemente, $P(n)$ é verdade para todo $n \geq a$.

Exemplo 1.3. Vamos mostrar que a sentença aberta $P(n) : 2^n > n^2$ é válida para todo número natural $n \geq 5$.

Solução: Temos:

(i) Se $n = 5$, temos $2^5 = 32 > 5^2 = 25$.

(ii) Suponhamos agora que $2^n > n^2$, para algum número natural $n \geq 5$. Temos $2^{n+1} = 2.2^n > 2.n^2$. Note que, para $n \geq 3$, $2n^2 > (n + 1)^2$, pois esta desigualdade equivale a $n(n - 2) > 1$. Daí, deduzimos que $2^{n+1} > (n+1)^2$, ou seja, que $P(n+1)$ é verdade. Concluímos o resultado pelo teorema anterior.

Apresentamos ainda uma versão mais geral do Princípio da Indução Finita, muito útil na demonstração de certas propriedades. Vejamos:

Teorema 1.3. *(Indução Completa) Sejam $a \in \mathbb{N}$ e $P(n)$ uma sentença aberta em $\mathbb{N}$. Suponha que*
(i) $P(a)$ é verdade e que

(ii) *Se, para algum n, tem-se que $P(i)$ é verdade para todo $a \leq i \leq n$, então $P(n+1)$ é verdade. Então, $P(n)$ é verdade para todo $n \geq a$.*

Demonstração: Considere o conjunto

$$V = \{n \in \mathbb{N}; n \geq a, P(n)\text{é verdade}\}.$$

Queremos mostrar que o conjunto $W = \{n \in \mathbb{N}; n \geq a\} \backslash V$ é vazio. Suponha, por absurdo (veja [4]), que tal conjunto é não-vazio. Assim, ele deve possuir um menor elemento (Aqui estamos usando uma propriedade do conjunto dos números reais chamada *Princípio da Boa Ordenação*), digamos k. Por (i), $a \notin W$. Portanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $k = a + n > a$. Assim, $a, a+1, ..., k-1 \notin W$. Logo, $a, a+1, ..., k-1 \in V$. Por (ii) conclui-se que $k = k-1+1 \in V$, o que contradiz o fato de $k \in W$. O uso dessa segunda forma pode ser necessário algumas vezes, como por exemplo, na demonstração do *Teorema Fundamental da Aritmética*, que foi abordado em [6], cuja demonstração está apresentada a seguir.

Teorema 1.4. *(Teorema Fundamental da Aritmética) Todo número natural maior ou igual a dois admite decomposição em fatores primos única a menos da ordem dos fatores.*

Demonstração: A demonstração será dividida em duas etapas. Inicialmente, provaremos a existência de tal decomposição em fatores primos para todo número natural maior ou igual a 2 e, em seguida, provaremos que essa decomposição é única.
Sendo $n > 1$ um número natural qualquer, queremos provar que existe uma decomposição de n em fatores primos. Para isso, usaremos a indução completa:

1. Começando com $n = 2$, vemos que ele possui uma decomposição em fatores primos, já que ele próprio é um número primo. Essa decomposição é chamada de decomposição trivial.

2. Seja n um número natural, com $n > 2$. Suponhamos agora que, todo número natural $2 \leq k \leq n$, admite uma decomposição em fatores primos. Vamos mostrar que $n+1$ também admite uma decomposição em fatores primos.
Se $n+1$ for um número primo, então $n+1$ admite a decomposição trivial, da mesma forma que o número 2.
Se $n+1$ não for primo, então n possui dois divisores positivos p e q, tais que $n+1 = p.q$ e $2 \leq p, q \leq n$. Pela hipótese de indução, p e q admitem uma decomposição em fatores primos (trivial ou não!). Usando as decomposições em fatores primos de p e de q, obtemos uma decomposição em fatores primos para $n+1$, o que demonstra o resultado para todo número natural maior que um.

Resta-nos mostrar a unicidade da decomposição em fatores primos. Para isto, supomos que um número natural n, com $n \geq 2$, admite duas decomposições em fatores primos:

$$n = p_1.p_2. \ldots p_r$$

e

$$n = q_1.q_2. \ldots q_s.$$

Daí, temos

$$p_1.p_2. \ldots p_r = q_1.q_2. \ldots q_s.$$

Concluímos então, que p_1 divide $q_1.q_2. \ldots q_s$. Como $q_1, q_2, \ldots, q_s$ são primos, cada um deles só admite um único divisor maior que 1, a saber, o próprio número. Portanto, p_1 deve ser igual a um dos números $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Digamos $p_1 = q_1$, já que o produto é comutativo. Repetimos esse argumento para cada p_i e concluímos que $r = s$ e $p_2 = q_2$, $p_3 = q_3$ $\ldots$, $p_r = q_r$, o que conclui a demonstração.

Exemplo 1.4. Em 1834, o matemático alemão *Johann Peter Gustav Lejaune Dirichlet*, enunciou o seguinte princípio, apelidado de *Princípio da Casa dos Pombos*:
Seja dada uma casa de pombos com n buracos e suponha que haja m pombos querendo ocupá-los. Se

$m > n$, então algum buraco deverá ser ocupado por mais de um pombo.

Este princípio também leva o nome de Princípio das Gavetas, pois pode ser enunciado, de modo equivalente, como segue:

Teorema 1.5. *(Princípio de Dirichlet) Queremos guardar m objetos em n gavetas. Se $m > n$, então alguma gaveta deverá conter mais de um objeto.*

Demonstração: Vamos mostrar este resultado usando o Princípio da Indução Finita sobre o número n de gavetas.
Para $n = 1$, o resultado é óbvio pois, se temos mais de um objeto e uma só gaveta, teremos que acomodar nesta gaveta mais de um objeto.
Suponha então o resultado válido para um certo número n de gavetas e consideremos a situação de termos $n + 1$ gavetas e $m > n + 1$ objetos. Queremos mostrar que o resultado vale também nesse caso, para aplicar a Indução Matemática e concluir que vale para todo número natural n.
Depois de acomodar todos os objetos nas $n + 1$ gavetas, escolha uma gaveta ao acaso. Se nesta gaveta há mais de um objeto, a nossa afirmação está provada. Se nesta gaveta não há nenhum objeto, nas n gavetas restantes estão acomodados $m > n + 1 > n$ objetos, o que, pela hipótese de indução, acarreta que em uma das gavetas há mais de um objeto. Se na gaveta escolhida há exatamente um objeto, nas n gavetas restantes estão distribuídos $m - 1 > n$ objetos, o que, novamente, pela hipótese de indução, acarreta que em uma das gavetas há mais de um objeto. Recomendamos [5] para uma leitura mais aprofundada do tema.

Nas próximas seções trazemos exemplos onde o uso do Princípio da Indução Finita é aplicado. Divirtam-se!

Exemplos interessantes

Exemplo 1.5. (Desigualdade de Bernoulli) Vale que: $(1 + x)^n \geq (1 + nx)$, $x > -1$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demonstração: Este resultado pode ser provado por indução em n.
(i) Para $n = 0$, temos

$$1 = (1 + x)^0 \geq (1 + 0.x) = 1.$$

(ii) Para $n = 1$, vale

$$(1 + x)^1 = (1 + x) \geq (1 + 1.x) = (1 + x).$$

(iii) Por hipótese de indução suponha o resultado válido para algum n. Então $(1 + x)^n \geq (1 + nx)$. Como $x > -1$, temos $1 + x > 0$ e $(1 + x).(1 + x)^n \geq (1 + x).(1 + nx)$.
Daí, temos

$$(1 + x)^{n+1} \geq (1 + x + nx + nx^2) \geq (1 + (n + 1)x),$$

pois $nx^2 \geq 0$.
Segue que a desigualdade vale para $n + 1$ e, pelo princípio da indução finita, vale para todo n.

Exemplo 1.6. Se conhece por Série Harmônica a soma de um número infinito de termos da forma $\frac{1}{n}$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Neste exemplo, usaremos o Princípio da Indução Finita para mostrar que a série harmônica é divergente, isto é, sua soma não é finita.
Partindo da sequência infinita

$$\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right)$$

pode ser construída outra sequência infinita chamada sequência das somas parciais da Série Harmônica

$$(S_n) = \left(1, 1 + \frac{1}{2}, ..., 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}, ...\right)$$

Isto é, $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$. Vamos estudar uma subsequência infinita (S_{2^n}) da sequência (S_n):

$$(S_{2^n}) = (S_1, S_2, S_4, S_8, ...S_{2^n}, ...).$$

Vamos mostrar que $S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$. Para concluir a prova por indução em n, basta observar que

$$S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + ... + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\geq S_{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + ... + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Daí, temos

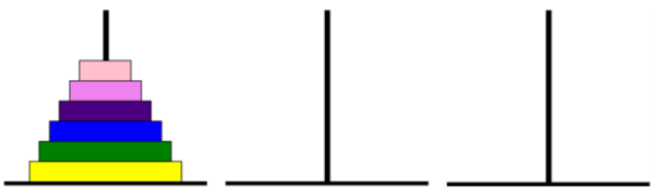
$$S_{2^{n+1}} \geq S_{2^n} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = S_{2^n} + \frac{1}{2}$$

$$\geq 1 + n.\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + (n+1)\frac{1}{2},$$

utilizando a hipótese de indução para n. Portanto, o resultado é válido para todo $n \in \mathbb{N}$.
Mostrar que $S_{2^n} \geq 1+\frac{n}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, acarreta no fato de que a série harmônica $S_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ é uma série divergente, tendo em vista que $S_n > S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$. Para o leitor interessado no tema, recomendamos a leitura de [13].

Exemplo 1.7. (Torre de Hanói) A torre de Hanói é um jogo formado por n discos de diâmetros distintos com um furo no seu centro e uma base onde estão fixadas três hastes. Inicialmente, todos os discos encontram-se em uma das hastes de modo que nenhum disco esteja sobre um outro de diâmetro menor.

Figura: Torre de Hanói



Fonte: Google

O objetivo do jogo é transferir a pilha de discos para uma outra haste, movendo um disco de cada vez, de modo que, a cada passo, nenhum disco fique sobre um outro disco de diâmetro menor. Podemos nos fazer duas perguntas a respeito desse jogo:

1. O jogo tem solução para todo $n \in \mathbb{N}$?
2. Em caso afirmativo, é possível determinarmos o número mínimo j_n de movimentos para resolver o problema com n discos?

Usaremos o Princípio da Indução Finita para responder afirmativamente a primeira pergunta e, posteriormente, para determinar o número mínimo k_n de movimentos para resolver o problema com n discos. Começamos considerando a sentença aberta

$$P(n) : \text{O jogo com n discos possui solução.}$$

Claramente, $P(1)$ é verdade. Suponha que $P(n)$ seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que o jogo com $n+1$ discos tem solução. Para isto, resolvemos o problema para os n discos superiores da pilha (Hipótese de Indução) transferindo-os para uma das hastes livres. Em seguida, transferimos o disco que restou na haste original para a haste que está vazia. Feito isto, transferimos os n discos que estão juntos, para a haste onde se encontra o disco de maior diâmetro (usamos aqui novamente a hipótese de indução). Assim, o problema com $n+1$ discos também possui solução e, pelo Princípio da Indução Finita, concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para determinar uma fórmula para j_n, observe que, para resolver o problema para $n+1$ discos com o menor número de passos, temos, necessariamente, que passar duas vezes pela solução mínima do problema com n discos. Temos, então que $j_{n+1} = 2j_n + 1$. Obtemos, assim, uma progressão aritmético-geométrica (j_n) cujo termo geral é, de acordo com o exemplo 2, dado por

$$j_n = 2^n - 1.$$

Esse jogo foi criado pelo matemático francês Edouard Lucas, em 1882 que, para tornar o jogo mais interessante, criou a seguinte história. Segundo ele, na origem do tempo, num templo oriental, Deus colocou 64 discos de ouro puro perfurados ao redor de uma de três colunas de diamante e ordenou a um grupo de sacerdotes que movessem os discos para uma outra coluna, respeitando as regras citadas anteriormente. Quando a tarefa fosse concluída, o mundo acabaria.

Mesmo que a lenda fosse verdade, não precisaríamos temer o fim do mundo pois, se, a cada segundo, um sacerdaote movesse um disco, o tempo mínimo para que a fatalidade ocorresse seria de $2^{64} - 1$ segundos, o que nos dá aproximadamente um bilhão de séculos!!!!!

O problema da Torre de Hanói é demasiadamente interessante e, por isso, é a estrela do livro ***A Matemática no Jogo Torres de Hanói***, que pode ser encontrado em [12], publicado recentemente pela Sociedade Brasileira de Matemática. Recomendo a leitura do mesmo num momento de descontração.

Podemos encontrar muitos outros exemplos interessantes clássicos como esse em [2], dentre os quais podemos citar "O Enigma do Cavalo de Alexandre", "Descobrindo a Moeda Falsa", "A Pizza de Steiner" e "Os Coelhos de Fibonacci".

Questões de Olimpíadas Resolvidas

Exemplo 1.8. (OBMEP - Banco de Questões 2016 - Nível 3 - Questão 19)

A sequência de Fibonacci começa com $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, e, a partir do segundo termo, cada novo termo é obtido somando-se os dois anteriores, ou seja, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para $n \geq 0$. Assim, os primeiros termos da sequência de Fibonacci são

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1$$

$$F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8.$$

1. Verifique que $F_{n+3} < 5F_n$, $\forall n \geq 3$.

Solução: Iniciaremos mostrando que a sequência de Fibonacci é crescente, isto é, $F_{n-1} < F_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para isto, usaremos a Segunda Forma do Princípio da Indução Finita.

(i) Se $n = 1$, temos $F_0 = 0 < F_1 = 1$.

(ii) Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ é verdade que $F_{k-1} < F_k$, para todo $k \leq n$. Assim, temos $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} < F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$, por hipótese de indução.

Como a sequência de Fibonacci é crescente, temos:

$$F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1} =$$

$$2F_{n+1} + F_n = 3F_n + 2F_{n-1} < 3F_n + 2F_n = 5F_n.$$

2. Seja n um inteiro positivo. Mostre que entre potências consecutivas de n existem no máximo n números de Fibonacci.

Solução: Sejam n^k e n^{k+1} as potências consecutivas de n. Supondo que o primeiro número de Fibonacci maior que n^k seja F_q, teremos $F_q, F_{q+1}, F_{q+2}, ..., F_{q+n-1}$, n números de Fibonacci consecutivos, todos maiores que n^k. Logo,

$$F_{q+2} = F_{q+1} + F_q > n^k + n^k = 2n^k$$

$$F_{q+3} = F_{q+2} + F_{q+1} > 2n^k + n^k = 3n^k$$

$$F_{q+4} = F_{q+3} + F_{q+2} > 3n^k + n^k = 4n^k$$

$$\ldots$$

$$F_{q+n-1} > (n-1)n^k$$

$$F_{q+n} > n.n^k = n^{k+1}.$$

Se tivermos $n + 1$ números de Fibonacci, o número F_{q+n} seria maior que n^{k+1}, logo teremos no máximo n números de Fibonacci entre duas potências de n.

Os números de Fibonacci originaram-se a partir de um problema com coelhos, publicado no livro ***Liber Abacci***, no ano de 1202 , por Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci. Nessa questão não é necessário ter um conhecimento aprofundado da sequência de Fibonacci, pois o enunciado traz a definição. A resolução da questão é a partir dessa definição, onde $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, fazemos as substituições dos números F_{n+1} e F_{n+2} um número qualquer F_{q+n} da sequência por suas respectivas expressões e com mais algumas operações algébricas concluímos as demonstrações das desigualdades.

Exemplo 1.9. (OBMEP- Banco de Questões 2011- Nível 3- Questão 89). Seja n um número inteiro positivo. Para cada um dos inteiros $n+1, n+2, ..., 2n$, considere o seu maior divisor ímpar. Mostre que a soma de todos esses divisores é igual a n^2.

Solução: Chamaremos de S_n a soma dos maiores divisores ímpares dos números $n+1, n+2, ..., 2n$. Seja $P(n) : S_n = n^2, \forall n \in \mathbb{N}$.

(i) Se $n = 1$, temos que o maior divisor ímpar de $S_n = n^2 = 1$.

(ii) Suponhamos que S_n seja verdade para algum n. Se queremos calcular S_{n+1}, que é a soma dos maiores divisores ímpares dos números $n+2, n+3, ..., 2n, 2n+1, 2(n+1)$, como $n+1$ e $2(n+1)$ têm os mesmos divisores ímpares (Pense nisso!), isso é equivalente a somar os maiores divisores ímpares de

$$n+1, n+2, ..., 2n+1, n+1$$

que é igual a $S_n + (2n+1)$. Assim,

$$S_{n+1} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Portanto, o resultado é válido para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.10. (OBMEP- Banco de Questões 2011- Nível 3- Questão 85)
a. Mostre que a identidade

$$a^{n+1} + b^{n+1} = (a+b)(a^n + b^n) - ab(a^{n-1} + b^{n-1})$$

é sempre verdadeira.
b. Sejam a e b números reais tais que $a + b = 1$ e $ab = -1$. Mostre que o número $a^{10} + b^{10}$ é inteiro.

Solução do item a : Observe que

$$(a+b).(a^n + b^n) = a^{n+1} + ab^n + ba^n + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + ab(a^{n-1} + b^{n-1}).$$

Daí,

$$a^{n+1} + b^{n+1} = (a+b)(a^n + b^n) - ab(a^{n-1} + b^{n-1}).$$

Solução do item b : Mostraremos um resultado mais geral do que o que é pedido no exercício. Utilizaremos a Segunda Forma do Princípio da Indução Finita para mostrar que $a^n + b^n$ é inteiro, para todo $n \in \mathbb{N}$.
(i) Se $n = 1$, temos $a^1 + b^1 = a + b = 1$.
(ii) Suponhamos que o resultado seja válido para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Vamos mostrar que $a^{n+1} + b^{n+1}$ também é um número inteiro. Utilizando a expressão do item a, temos

$$a^{n+1} + b^{n+1} = (a+b)(a^n + b^n) - ab(a^{n-1} + b^{n-1})$$

$$= 1.(a^n + b^n) + 1.(a^{n-1} + b^{n-1}).$$

Por hipótese de indução,$(a^n + b^n)$ e $(a^{n-1} + b^{n-1})$ são inteiros e a soma de inteiros é um número inteiro.

Exemplo 1.11. (OBMEP- Questão 30- Nível 3- 2013) Lendo os pensamentos de Ivan: Sérgio pediu para Ivan pensar em um número inteiro positivo. Depois, pediu para Ivan calcular a soma de seus algarismos e, finalmente, elevar ao quadrado o resultado. Sem falar o número em que pensou inicialmente, Ivan contou que obteve como resultado final x. Mostre a Sérgio como chegar às seguintes conclusões:

(1) Se Ivan tivesse pensado em um número com 3 ou menos algarismos, então x seria menor do que 730.

(2) Se Ivan tivesse pensado em um número com 4 algarismos, então x seria menor do que o número no qual Ivan pensou.

(3) Se Ivan tivesse pensado em um número com 5 ou mais algarismos, então x seria menor do que o número em que Ivan pensou.
Sérgio fez depois o seguinte: Considerou o número x que Ivan disse, calculou a soma de seus algarismos

e elevou ao quadrado o resultado. Quanso Sérgio falou para Ivan o número que obteve, Ivan disse com surpresa que esse foi o número em que havia pensado.

(4) Determine todos os possíveis valores para o número que Ivan pensou.

Solução do item (1): Se Ivan tivesse pensado em um número com 3 ou menos algarismos, então a soma de seus algarismos seria, no máximo, $9 + 9 + 9 = 27$. Então o número final de Ivan x seria, no máximo, $27^2 = 279$.

Solução do item (2): Se Ivan tivesse pensado em um número com 4 algarismos, digamos $abcd$, então $x = (a+b+c+d)^2$. Distinguimos duas possibilidades.
Primeiro, se $a = 1$, então

$$x \leq (1 + 9 + 9 + 9)^2 = 784 < abcd.$$

Agora, $a \geq 2$, então

$$x \leq (9 + 9 + 9 + 9)^2 = 1296 < abcd.$$

Solução do item (3): Suponhamos que Ivan pensou em um número com $n \geq 5$ algarismos, digamos $a_1a_2...a_n$. Daí $x = (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2$. Logo,

$$x \leq (9 + 9 + ... + 9)^2 = (9n)^2 = 81n^2.$$

Observe que

$$10^{n-1} \leq a_1a_2...a_n.$$

Então, para mostrar que $x < a_1a_2...a_n$, basta mostrar que, para todo inteiro $n \geq 5$, vale $81n^2 < 10^{n-1}$.
Para isto, usaremos o Princípio da Indução Finita.
(i) Se $n = 5$, temos: $81n^2 = 81.25 = 1755 < 10^{5-1} = 10000$.
(ii) Suponhamos que essa desigualdade é válida para algum inteiro $n \geq 5$. Vamos mostrar que ela também vale para $n + 1$. Como $n \geq 5$, temos:

$$81.(n + 1)^2 < 81.(2n)^2$$

$$= 4.81n^2 < 4.10^{n-1} < 10.10^{n-1} = 10^n.$$

Portanto, $81.n^2 < 10^{n-1}$, para todo $n \geq 5$.

Solução do item (4): Seja I o número pensado por Ivan. Vamos mostrar que $I < 730$. Suponhamos, por absurdo (veja [4]) que $I \geq 730$. Como I é o número final obtido por Sérgio a partir de x, podemos aplicar a parte a (para Sérgio no lugar de Ivan) e concluir que x tem quatro ou mais algarismos. Logo, usando as partes b e c para Sérgio, concluímos que $x > I$. Em particular, $x \geq 730$. Pela parte a, sabemos que I deve ter 4 ou mais algarismos. Logo, usando as partes b e c, concluímos que $I > x$. Chegamos, assim, a uma contradição. Portanto, $I < 730$. Além disso, como I é o número final de Sérgio, I é um quadrado perfeito. Basta, então verificarmos qual dos valores $1^2, 2^2, 3^2, ..., 27^2 = 729$ pode ser admitido por I. Fazendo isto, concluímos que os possíveis valores para o número que Ivan pensou são $1, 81, 169, 256$.

Problemas Propostos

Nesta seção, propomos alguns problemas ao leitor. Outros problemas igualmente interessantes podem ser encontrados em [11].

Problema 1.1. (Olimpíada Cearense de Matemática - 1999) A seguir, apresentamos a "demonstração" do seguinte "resultado".
"Para todo n, num conjunto de n bolas, todas elas possuem a mesma cor."
Como consequência deste "resultado", podemos concluir que "Todas as bolas do mundo têm a mesma cor."

Demonstração: A "demonstração" da afirmação será feita usando o Princípio da Indução Finita. O resultado e válido para $n = 1$ pois, num conjunto com uma bola, todas elas têm a mesma cor. Suponha que o teorema é válido para todo conjunto com i bolas. Considere um conjunto com $i+1$ bolas. Retirando uma delas, o conjunto restante possui i bolas e pela hipótese indutiva todas possuem a mesma cor, digamos amarela. Retire uma das bolas amarelas desse conjunto e retorne a bola de cor desconhecida, anteriormente retirada. Obtemos novamente um conjunto com i bolas e pelo que foi discutido anteriormente possui $i-1$ bolas amarelas e pela hipótese indutiva possui todas as bolas de mesma cor. Segue que a bola de cor desconhecida também é amarela. Assim todas as $i+1$ bolas são amarelas. Sabemos que existem bolas de diversas cores. Então, o que há de errado com a demonstração anterior?

Problema 1.2. (Olimpíada Cearense de Matemática- 2000)
Considere todos os subconjuntos não vazios do conjunto $\{1, 2, ..., n\}$, dos n primeiros números naturais. Para cada um desses subconjuntos calculamos o produto de seus elementos. Encontre a soma de todos os produtos obtidos. (Obs: Se um subconjunto tem um único elemento, esse elemento é o produto).

Problema 1.3. ($XXXI$ Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte 2020- Fase única- Nível Universitário)
A soma $(1^2+1).1!+(2^2+1).2!+...+(2020^2+1).2020!$ é igual a:
(a) 2020.2021!
(b) 2021.2020!
(c) 2021.2022!
(d) 2020.2022!
(e) 2021.2023!
O leitor pode encontrar a solução deste problema em [10].

Problema 1.4. (Olimpíada Russa - 2001)
Em uma festa, existem $2n+1$ pessoas. Sabemos que para qualquer grupo de n pessoas, existe uma pessoa fora do grupo que as conhecem. Mostre que existe uma pessoa que conhece todos na festa.

Problema 1.5. (Olimpíada Russa - 1995)
Em um plano, considere um conjunto finito de quadrados idênticos cujos lados são paralelos. Para quaisquer $k+1$ quadrados, pelo menos dois deles contêm pontos em comum. Prove que este conjunto pode ser dividido em não mais que $2k-1$ subconjuntos de modo que, em cada subconjunto, todos os quadrados tenham um ponto em comum.

Referências

[1] *Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Volume 17, fev. 2020* , Edição Ermac.

[2] Abramo Hefez, *Iniciação Científica OBMEP 2006*.

[3] Abramo Hefez, *Aritmética Coleção PROFMAT 2016* , Sociedade Brasileira de Matemática .

[4] *www.ematematicaoxente.com.br*, Volume 9 (2018). Acesso em abril/2023.

[5] *www.ematematicaoxente.com.br*, Volume 10 (2019). Acesso em abril/2023.

[6] *www.ematematicaoxente.com.br*, Volume 20 (2020). Acesso em abril/2023.

[7] *www.portaldaobmep.impa.br*, Módulo 48. Acesso em agosto/2023.

[8] César Polcino Milies, Sônia Pitta Coelho, *Números Uma Introdução Matemática* , Edusp, 3 Edição, (2006).

[9] Rogério Ricardo Steffenon, Felipe Milan Guarnieri, *Belos Problemas de Matemática Discreta* , Coleção Olimpíadas de Matemática, SBM,(2022).

[10] *youtu.be/Icp19d-zm1Q?si=xOkpSl8UQFr-0OYE*. Acesso em agosto/2023.

[11] *cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep*. Acesso em agosto/2023.

[12] *www.sbm.org.br*. Acesso em agosto/2023.

[13] *www.rpm.org.br/cdrpm/30/3.htm*. Acesso em agosto/2023.

2. Curiosidades

TEX, LATEX e PreTeXt

Ricardo Nunes Machado Junior[1]

O LaTeX é um "programa" de preparação de documentos. Ao contrário do Microsoft Word, que é um processador de texto do tipo "O que você vê é o que você obtém", o LaTeX funciona compilando texto e comandos não formatados em um documento preparado. Por exemplo, o Jornal "É Matemática, Oxente!" é escrito em LaTeX.

O TeX foi lançado em 1978, ele foi projetado e escrito pelo cientista da computação e professor da Universidade de Stanford, Donald Knuth (veja [1]).

O LaTeX foi originalmente escrito no início dos anos 80 por Leslie Lamport na SRI International (veja [2]). Lançado pela primeira vez em 1994, mas atualizado gradualmente a partir de 2015, a versão atual é o LaTeX2e. O LaTeX é uma linguagem de marcação descritiva de alto nível que acessa o poder do TeX de uma maneira mais fácil para os escritores. Ele fornece aos autores comandos prontos para requisitos de formatação e layout, como cabeçalhos de capítulos, notas de rodapé, referências cruzadas e bibliografias.

A dupla TeX e LaTeX transformou as publicações em matemática e ciências, possibilitando escrever conteúdo técnico em PDF de alta qualidade. Estes softwares são gratuitos e podem ser instalados em diversos sistemas operacionais. Atualmente, o LaTeX pode ser facilmente utilizado na nuvem, como por exemplo a plataforma Overleaf (veja [3]) que está disponível desde 2014 e é usado por mais de 11 milhões de estudantes e acadêmicos em 6.800 instituições em todo o mundo.

Embora o PDF ainda seja um formato valorizado, materiais no formato de páginas interativas em HTML é ainda mais interessante. Em 2014, Rob Beezer lançou o PreTeXt (`https://pretextbook.org/`), uma plataforma de autoria também gratuita para criar materiais didáticos, como livros e artigos. O PreTeXt permite que os usuários escrevam em um arquivo do tipo XML que quando compilado pode gerar arquivos de diversos formatos, incluindo HTML, EPUB e também TeX.

O PreTeXt já chamou a atenção da Associação Americana de Matemática, a qual já publicou em sua revista Focus diversos artigos sobre ele. O primeiro foi em 2019 com o título: PreTeXt - The Future Of Textbooks (veja [4]).

Os materiais escritos em PreTeXt são multiplataforma e podem ser facilmente lidos em smartphones, tablets e computadores, já que as margens dos documentos são automaticamente ajustadas de acordo com o dispositivo. Além disso, é possível usar recursos interativos produzidos em GeoGebra, SageMath, HTML5 Canvas, JSXGraph, JessieCode, etc, veja exemplos no endereço: `http://surl.li/kcvcc`.

Um número significativo de livros didáticos já foram publicados em PreTeXt. Uma lista de exemplares está disponível (em inglês) na galeria: `https://pretextbook.org/gallery.html`, bem como uma lista mais completa (também em inglês) com projetos em desenvolvimento no catálogo: `https://pretextbook.org/catalog.html`.

Escrever em PreTeXt é como escrever numa mistura de HTML com TeX (toda a parte matemática se escreve exatamente como em TeX). O autor escreve o conteúdo dentro dos ambientes de capítulos, seções, teoremas, etc e a estética é gerada automaticamente ao compilar o arquivo. Aproveito para divulgar que o autor desta curiosidade possui alguns projetos em desenvolvimento feitos em PreTeXt, o principal é o de Análise Combinatória que possui diversos recursos interativos feitos em SageMath (veja [5]).

Referências

[1] Knuth, Donald Ervin. The Computers & Typesetting, Vol. A: The Texbook.

[1] Professor do Departamento de Matemática da UFRPE

Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1986.

[2] Lamport, Leslie. "LATEX - A Document Preparation System Addison-Wesley."Reading, MA 1985.

[3] https://www.overleaf.com. Acessado em 06/09/2023.

[4] http://surl.li/kcvdb. Acessado em 06/09/2023.

[5] https://prof-ricardomachado.github.io/notas-combinatoria/indice.html. Acessado em 06/09/2023.

3. Indicações de Leituras

A Prova

Roberta Elaine Domingos de Araújo[2]

O filme é um drama de 2005 disponível no Prime Video que aborda a história de uma jovem perseguida pelo passado do pai e explora a ligação entre genialidade e loucura, as delicadas relações entre pais e filhas e a essência da verdade e da família. A Prova conta a história de Catherine, filha de Robert, um matemático intelectual e brilhante, mas mentalmente perturbado, que escreveu centenas de manuscritos e teorias inovadoras. Ela se privou por anos dos estudos e da diversão. Enquanto trabalhava e se dedicava a cuidar do pai doente de esclerose, conseguiu provar uma teoria que os matemáticos tentavam há décadas. Após a morte do pai e próximo de celebrar os seus 27 anos, Catherine tem de lidar não só com a chegada da sua irmã, Claire, que foi indiferente a ela por anos, como também com as atenções de Hal, um ex-aluno do seu pai, que espera encontrar algum trabalho de grande valor nos 103 cadernos e manuscritos de Robert. À medida que se confronta com a afeição de Hal e os planos de vida de Claire, que deseja vender a casa da família com o intuito de levá-la para morar em Nova York, Catherine se vê diante de um questionamento: quanto de loucura - ou de genialidade - terá herdado do seu pai?

Em nossa sociedade é comum a associação equivocada e generalizada entre transtorno mental e algum déficit ou aumento de inteligência. No campo da educação é possível ver com uma certa frequência estudantes brilhantes que possuem um equilíbrio e tranquilidade diante das dificuldades escolares do dia a dia e, por outro lado, outros que se frustram frente a qualquer situação de mudança. O filme não vem nos mostrar que existe uma relação entre loucura e inteligência, mas que a falta de respeito e amor podem levar às frustrações que acabam prejudicando o desempenho acadêmico e pessoal.

Referências.

[1] ADOROCINEMA. A Prova. Disponível em: https://www.adorocinema.com/filmes/filme-53691/. Acesso em: 23 jan. 2023.

[2] HOSPITAL SANTA MÔNICA ENSINO E PESQUISA. Tudo o que você precisa saber sobre Transtorno Mental. Disponível em: https://hospitalsantamonica.com.br/tudo-o-que-voce-precisa-saber-sobre-transtorno-mental/. Acesso em: 18 fev. 2023.

[2]Discente do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco

4. Quem pergunta, quer saber!

Revista do Professor de Matemática (RPM, nº 53, p.54)

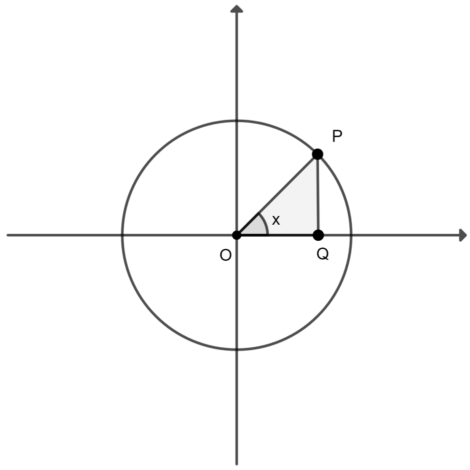
Severino Barros de Melo[3]

Observamos atualmente vários desvios no ensino e aprendizagem da trigonometria. Alguns alunos se contentam em memorizar os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30, 45 e 60 graus por meio de uma conhecida regra mnemônica, e muitos chegam a confundir os valores numéricos com as definições desses entes matemáticos. Uns poucos se aventuram em saber "decorado" as definições do seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo. Mesmo assim, os valores obtidos se restringem a ângulos entre 0 e 90 graus. Perguntas do tipo: qual o seno de 270 graus ou o cosseno de -60 graus ficam de fora nesse tipo de abordagem.

Ao se proceder ao cálculo de senos, cossenos, tangentes e demais funções trigonométricas a partir do círculo, estamos vivenciando um processo muito mais rico e abrangente. De fato, inclusive do ponto de vista histórico, esse modo de se adentrar à trigonometria carrega em si um percurso que vai de AlBattani (Matemático Árabe do século IX) a Euler (1707-1783), que na sua obra ***Introductio in analysin infinitorum*** introduz a ideia do círculo de raio unitário. Nesse contexto, faz sentido a seguinte pergunta que encontramos na Revista do Professor de Matemática (RPM, nº 53, p.54) .

Pergunta: Sou professor de Ciências e Matemática numa 8ª série e veio a dúvida: Por que o círculo trigonométrico tem raio igual a 1? Se o raio fosse 2 o que mudaria?

Resposta da RPM: Quando se estudar Matemática, algumas unidades de comprimento têm nome. Por exemplo, 1 cm, 1 km, etc. Mas, na maioria das vezes, é o usuário que escolhe uma unidade de comprimento conveniente. Quando o professor desenha no quadro-negro um quadrado de lado "um" e o aluno o copia desenhando no caderno um quadrado de lado "um", o professor e o aluno escolheram uma unidade de comprimento diferente, que é o comprimento do lado desenhado. Quando se desenha um sistema de coordenadas, escolhe-se ao longo do eixo x um ponto para representar o número 1, isto é, escolhe-se uma unidade de comprimento que, em geral, também não é nenhuma daquelas que têm nome. Pois bem, ao estudar as funções circulares (trigonométricas), é conveniente atribuir ao raio o comprimento 1, obtendo:



$$sen\ x = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{1} = PQ \text{ e}$$
$$cos\ x = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{1} = OQ.$$

Se o raio tivesse n, unidades, teríamos:

$$sen\ x = \frac{PQ}{n} \text{ e } cos\ x = \frac{OQ}{n}.$$

[3]Docente da Universidade Federal Rural de Pernambuco

5. Soluções de Olimpíadas

OPEMAT 2021 - Nível 3

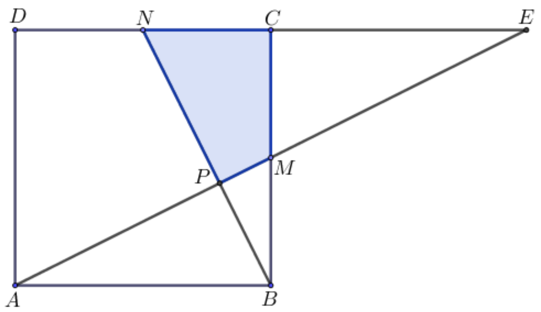
Nesta edição apresentaremos a resolução das questões discursivas e de verdadeiro ou falso da prova da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2021 referentes ao nível 3.

Questão 1. A primeira questão foi anulada por conta de um erro de digitação.

Questão 2. Considere o quadrado $\square ABCD$, N e M são pontos médios dos lados DC e CB, respectivamente. Seja P o ponto de interseção dos segmentos BN e AM. Então, a razão entre as áreas do quadrilátero $PMCN$ e do quadrado $\square ABCD$ é igual a:

Solução 1.

Seja E a interseção da prolongação dos intervalos AM e DC.



Considerando o quadrado $\square ABCD$, temos

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = x.$$

Por um lado, os triângulos ΔADE e ΔMCE são semelhantes pelo critério ângulo ângulo. Desde que M é o ponto médio do segmento BC então $\overline{MC} = \frac{x}{2}$ e pelo critério de semelhança, temos

$$\frac{x}{x + \overline{CE}} = \frac{\frac{x}{2}}{\overline{CE}}.$$

Assim, podemos concluir que $\overline{CE} = x$.

Por outro lado, os trângulos ΔABP e ΔNPE são semelhantes pelo critério ângulo ângulo. No que segue denotaremos por h a altura do triângulo ΔABP relativa a base AB e por H a altura do triângulo ΔNPE relativa a base NE. Além disso, desde que N é o ponto médio do segmento DC então $\overline{NC} = \frac{x}{2}$. Pelo critério de semelhança, temos

$$\begin{aligned} \frac{H}{h} &= \frac{\overline{NE}}{x} \\ &= \frac{\frac{x}{2} + x}{x} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $2H - 3h = 0$. Além disso, $H + h = x$. Resolvendo o sistema de equações, obtemos $h = \frac{2x}{5}$.

No que segue, denotamos a área do triângulo ΔXYZ por $A(\Delta XYZ)$. Cálculo da área do triângulo ΔPBM.

$$\begin{aligned} A(\Delta PBM) &= A(\Delta ABM) - A(\Delta ABP) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BM} - \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h \\ &= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{2x}{5} \\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{5} \\ &= \frac{x^2}{20}. \end{aligned}$$

Finalmente, a área do quadrilátero $PMCN$ é dada por

$$\begin{aligned} A(PMCN) &= A(\Delta NCB) - A(\Delta PBM) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{NC} - \frac{x^2}{20} \\ &= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x}{2} - \frac{x^2}{20} \\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{20} \\ &= \frac{x^2}{5}. \end{aligned}$$

Portanto, a razão entre as áreas do quadrilátero $PMCN$ e do quadrado $\square ABCD$ será

$$\frac{A(PMCN)}{A(\square ABCD)} = \frac{\frac{x^2}{5}}{x^2} = \frac{1}{5}. \tag{1}$$

Solução 2.

Temos, $[PBM] + [PMCN] = \frac{1}{4}[ABCD]$ Representamos por x a medida do lado do quadrado $ABCD$, temos $NC = CM = \frac{x}{2}$. Como os triângulos $\triangle CME$ e $\triangle BMA$ são congruentes (critério ALA), segue que $CE = x$.

Aplicando o teorema de Menelaus, ao $\triangle NBC$ e reta transversal $\overleftrightarrow{PME}$, temos:

$$\frac{EC}{EN} \cdot \frac{PN}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} = 1.$$

Agora, substituindo as medidas dos segmentos conhecidos em relação a x na relação acima, obtemos,

$$\frac{x}{3x/2} \cdot \frac{PN}{PB} \cdot \frac{x/2}{x/2} = 1,$$

que fornece

$$\frac{PN}{PB} = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{PB}{PN} = \frac{2}{3}.$$

Note que as alturas H (repeito do lado BC) do $\triangle BCN$ e h (respeito do lado BM) do $\triangle PBM$ satisfazem

$$\frac{H}{h} = \frac{BN}{BP} = \frac{BP + PN}{BP} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

Resultado que segue usando a semelhança dos triângulos NCB e PQB, onde Q é o pé da altura do ponto P no segmento MB. Agora, sendo $H = \frac{x}{2}$, obtemos que $h = \frac{x}{5}$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{[BMP]}{[BMP] + [PMCN]} &= \frac{[BMP]}{[BCN]} = \frac{\frac{h \cdot x/2}{2}}{\frac{x^2}{4}} \\ &= \frac{\frac{x}{5} \cdot \frac{x}{4}}{\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

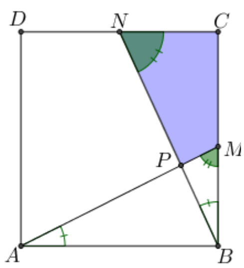
Isto fornece que,

$$\frac{[BMP]}{1/4[ABCD]} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{[BMP]}{[ABCD]} = \frac{1}{20}.$$

Agora, como a área do quadrilátero $PMCN$ é a diferença entre as áreas dos triângulos $\triangle NBC$ e $\triangle BMP$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{[PMCN]}{[ABCD]} &= \frac{[NBC] - [BMP]}{[ABCD]} \\ &= \frac{[NBC]}{[ABCD]} - \frac{[BMP]}{[ABCD]} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Solução 3.



É claro que os $\triangle ABM$ é congruente com $\triangle BCN$, o que segue aplicando o critério LAL. Daí, podemos obter que

$$\begin{cases} \widehat{BAM} = \widehat{CBN} \\ \widehat{BMA} = \widehat{CNB} \end{cases}$$

Portanto, $\triangle BMP \approx \triangle BNC$ (semelhantes).

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ABM$ (ou $\triangle BCN$), obtemos $AM = BN = \frac{\sqrt{5}}{2}\ell$, onde ℓ é o comprimento do lado do quadrado $ABCD$, pois

$$BN^2 = NC^2 + CB^2 = (\ell/2)^2 + \ell^2 = \frac{5}{4}\ell.$$

A razão de semelhança dos $\triangle BMP$ e $\triangle BNC$ é:

$$r = \frac{BN}{BM} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}\ell}{\ell/2} = \sqrt{5} \quad \left[= \frac{\text{hipotenusa de}\triangle BNC}{\text{hipotenusa de}\triangle BMP}\right].$$

Com isto, temos:

$$\begin{aligned} (\bullet) \quad & \sqrt{5} = \tfrac{NC}{PM} \Rightarrow PM = \tfrac{\ell/2}{\sqrt{5}} = \tfrac{\sqrt{5}}{10}\ell \\ (\bullet) \quad & \sqrt{5} = \tfrac{CB}{PM} \Rightarrow PB = \tfrac{\ell}{\sqrt{5}} = \tfrac{\sqrt{5}}{5}\ell \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} [PBM] &= \text{área}(\triangle PBM) = \frac{PM \cdot PB}{2} = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{5}}{10}\ell \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}\ell}{2} = \frac{1}{20}\ell^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} [PMCN] &= [NBC] - [PBM] = \frac{1}{4}\ell^2 - \frac{1}{20}\ell^2 = \\ &= \frac{4}{20}\ell^2 = \frac{1}{5}\ell^2. \end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{[PMCN]}{[ABCD]} = \frac{\frac{1}{5}\ell^2}{\ell^2} = \frac{1}{5}.$$

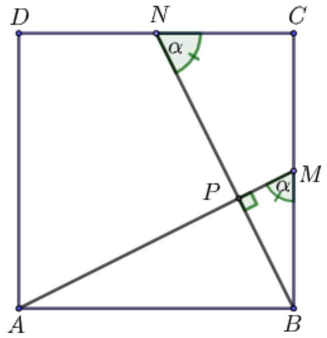
Variante 01: Uma vez que a razão de semelhança entre os triângulos $\triangle BMP$ e $\triangle BNC$ é $\sqrt{5}$, então a razão entre as áreas dos triângulos $\triangle BNC$ e $\triangle BMP$ verifica

$$\frac{1}{5} = \frac{[BMP]}{[BNC]} = \frac{[BNC] - [PMCN]}{[BNC]} = 1 - \frac{[PMCN]}{\frac{1}{4}[ABCD]}.$$

Daí,

$$\frac{[PMCN]}{[ABCD]} = \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}.$$

Variante 02: (trigonometria para calcular PB e PM).



Em $\triangle BCN$, temos

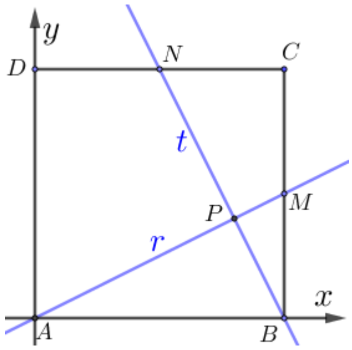
$$(\bullet)\ \operatorname{sen}\alpha = \frac{\ell}{\frac{\sqrt{5}}{2}\ell} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (\bullet)\ \cos\alpha = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\ell} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Agora no $\triangle PBM$ (reto em P), usando os valores de $sen\alpha$ e $\cos\alpha$ obtidos acima, temos

$$\begin{array}{ll} (\bullet) & \operatorname{sen}\alpha = \frac{PB}{\ell/2} \Rightarrow PB = \frac{\ell}{2}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{2}\ell \\ (\bullet) & \cos\alpha = \frac{PM}{\ell/2} \Rightarrow PM = \frac{\ell}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{10}\ell \end{array}$$

O resto segue como na solução dada anteriormente.

Solução 4. Usando coordenadas.



Segundo o desenho ao lado, usando que o comprimento do lado do quadrado é ℓ, temos:

$$A(0,0), \quad B(\ell,0), \quad C(\ell,\ell), \quad D(0,\ell)$$
$$M(\ell,\ell/2), \quad N(\ell/2,\ell).$$

A seguir, vamos determinar as coordenadas do ponto P.

- Equação da reta r que passa por A e M é dada por:

$$y - 0 = \frac{\ell - 0}{\ell/2 - \ell}(x - 0) \ \Rightarrow\ y = \frac{1}{2}x$$

- Equação da reta t que passa por B e N, é:

$$y - 0 = \frac{\ell - 0}{\ell/2 - \ell}(x - \ell) \ \Rightarrow\ y = -2(x - \ell)$$

O ponto P é a interseção das retas r e t.

$$\begin{cases} r: x - 2y = 0 \\ t: 2x + y = 2\ell \end{cases}$$

Fazendo $-2(r) + (t)$ temos que

$$\begin{cases} 5y = 2\ell \ \Rightarrow\ y = \frac{2}{5}\ell \\ x = 2y = 2\left(\frac{2}{5}\ell\right) = \frac{4}{5}\ell \end{cases}$$

$$\text{Logo,}\ P\left(\frac{4}{5}\ell, \frac{2}{5}\ell\right).$$

Agora, calculamos a área do triângulo determinado pelos pontos B, M e P, $[BMP]$. Temos

$$\begin{aligned} [BMP] &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_M & y_M & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \ell & 0 & 1 \\ \ell & \ell/2 & 1 \\ \frac{4}{5}\ell & \frac{2}{5}\ell & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \ell & 0 & 1 \\ 0 & \ell/2 & 0 \\ -\frac{1}{5}\ell & \frac{2}{5}\ell & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\ell}{5}\right) \\ &= \frac{1}{20}\ell. \end{aligned}$$

Como,

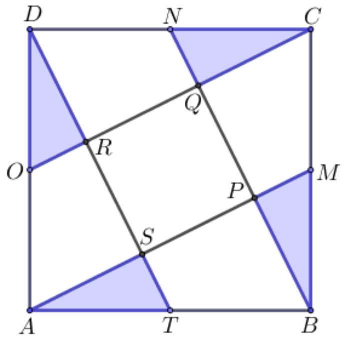
$$\begin{aligned} [PMCN] &= [NBC] - [BMP] = \frac{1}{4}\ell^2 - \frac{1}{20}\ell^2 \\ &= \frac{4}{20}\ell^2 = \frac{1}{5}\ell^2. \end{aligned}$$

Segue que,

$$\frac{[PMCN]}{[ABCD]} = \frac{\frac{1}{5}\ell^2}{\ell^2} = \frac{1}{5}.$$

Solução 5. Geométrica.

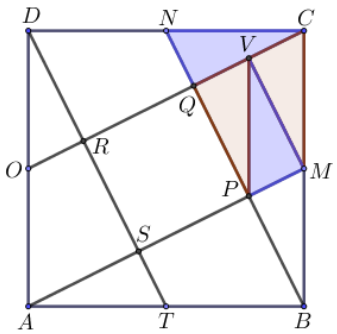
Consiste em dividir o quadrado $ABCD$ em 20 triângulos congruentes, onde o quadrilátero $PMCN$ é composto por 4 desses triângulos.



Na figura ao lado, O é ponto médio de AD e T é ponto médio de AB. Usando o critério ALA, os triângulos a seguir (em azul) são congruentes:

$$\triangle PMB, \quad \triangle QNC, \quad \triangle ROD, \quad \triangle STA$$

Ainda, é claro que tais triângulos são retângulos. Ou seja, os ângulos em P, Q, R e S são retos



Na figura ao lado, V é o ponto médio do segmento QC. Como M é ponto médio de CB, segue que VM é paralelo a QB e $VM = \frac{1}{2}QB$. Ainda, $PMCQ$ é um retângulo e os triângulos $\triangle MVP$, $\triangle QPV$ são congruentes. Além disso, é claro que (pelo critério ALA), $\triangle VMC$ é congruente com $\triangle QPV$. Usando que OC é paralelo a AM e que VM é paralelo a QB, pelo critério ALA, segue que $\triangle VCM$ é congruente a $\triangle PMB$. Note que o quadrilátero $PMCN$ é composto por 4 triângulos congruentes e que o triângulo NCB por 5.

Finalmente, sendo os triângulos: $\triangle NCB$, $\triangle TBN$, $\triangle DNT$ e $\triangle TAD$ congruentes, segue que o quadrado $ABCD$ possui 20 triângulos menores congruentes. Daí,

$$\frac{[PMCN]}{[ABCD]} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

Questão 3. Arthur encontrou uma grande quantidade de livros e teve a ideia de empilha-los na borda de uma mesa da seguinte forma: O livro da base, ou seja, aquele que está mais embaixo encontra-se inteiramente em cima da mesa de modo que sua extremidade coincide com a extremidade (borda) da mesa; O 1º livro, livro do topo, se estende metade do seu comprimento em relação ao 2º livro; o 2º livro se estende um quarto de seu comprimento em relação ao 3º, o 3º livro se estende um sexto de seu comprimento em relação ao quarto e assim sucessivamente.

Taci, sua mãe, perguntou: Empilhando dessa forma é possível que o livro do topo fique inteiramente além da mesa? E afirmou: isso só acontecerá se a coordenada x_G do centro de gravidade do empilhamento dada pela média ponderada

$$x_G = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n,}$$

em que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as coordenadas dos centros de gravidades de cada livro e $m_1, m_2, \ldots, m_n$ suas respectivas massas, estiver sobre a mesa. Sabendo que todos os livros têm a mesma forma de paralelepípedo retângulo de base $L \times L$ e mesma massa, responda a pergunta feita por Taci justificando a sua resposta.

Solução:

Colocando a origem do eixo x no ponto do livro mais afastado da borda da mesa temos que

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{L}{2} \\
x_2 &= \frac{L}{2} + \frac{L}{2(n-1)} \\
x_3 &= \frac{L}{2} + \frac{L}{2(n-1)} + \frac{L}{2(n-2)} \\
x_4 &= \frac{L}{2} + \frac{L}{2(n-1)} + \frac{L}{2(n-2)} + \frac{L}{2(n-3)} \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Como todos os livros possuem a mesma massa m, podemos cancelar m no numerador e no denominador na expressão de x_G. Assim, somando as expressões para os x_j pelas colunas temos que

$$x_G = \frac{1}{n}\left[n\cdot\left(\frac{L}{2}\right)+(n-1)\cdot\frac{L}{2(n-1)}+(n-2)\cdot\frac{L}{2(n-2)}+\ldots+2\cdot\frac{L}{2\cdot 2}+1\cdot\frac{L}{2\cdot 1}\right].$$

Logo,

$$x_G = \frac{1}{n}\left[n\cdot\frac{L}{2}+(n-1)\cdot\frac{L}{2}\right] = L\cdot\left(\frac{2n-1}{2n}\right).$$

Como $\frac{2n-1}{2n}$ é menor que 1, $L\left(\frac{2n-1}{2n}\right) < L$ e o centro de gravidade da pilha de livros está sobre a mesa e nesta condição o livro do topo está inteiramente além da mesa.

Questão 4. Pensando em sua segurança, a mãe de Dafne a proibiu de entrar na cozinha. Certo dia, sua mãe a encontra a um passo de entrar na cozinha. Lembrando que Dafne adora brinquedos, sua mãe pega uma sacola que contém n de seus brinquedos favoritos e n brinquedos dos quais não se interessa muito. A cada passo que Dafne está prestes a dar, sua mãe pega aleatoriamente um brinquedo na sacola, mostra a Dafne e depois deixa o brinquedo no chão. Se o brinquedo em questão for um dos que ela não se interessa muito, Dafne dá um passo em direção a cozinha e se for um de seus favoritos, ela dá um passo na direção oposta. Qual a probabilidade de que Dafne entre na cozinha?

Solução:

Imagine que a cozinha está a esquerda de Dafne e que uma sequência de movimentos realizada por Dafne pode ser descrita por um anagrama $\mathbf{x}$ de n letras D (representando os passos à direita) e n letras E (representando os passos a esquerda). Dafne não entrará na cozinha se qualquer prefixo $x_1x_2\ldots x_k$ de $\mathbf{x}$ tiver pelo menos tantos D's quanto E's.

Seja a o número de D's e b o número de E's em um prefixo $x_1x_2\ldots x_k$ de $\mathbf{x}$. Evidentemente, tem-se $a, b \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Então, em um dado momento, podemos identificar a posição de Dafne pelo par ordenado (a, b) em $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a, b \in \{0, 1, \ldots, n\}\}$. O número de anagramas $\mathbf{x}$ corresponde ao número de caminhos de $(0, 0)$ até (n, n) em $\mathcal{R}$ que se situam abaixo da diagonal $y = x$.

Para contar tais caminhos, contemos todos os caminhos possíveis de $(0, 0)$ até (n, n) em $\mathcal{R}$ e retiremos destes aqueles que passam pela diagonal $y = x$. Ora, o número de caminhos de $(0, 0)$ até (n, n) é simplesmente o número de anagramas $\mathbf{x}$ que contém n letras D e n letras E, ou seja, $\binom{2n}{n}$.

Agora considere um caminho que passe pela diagonal $y = x$. Tal caminho necessariamente toca a reta $y = x + 1$ em pelo menos um ponto. Para cada um desses caminhos, construímos um novo caminho da seguinte forma: o novo caminho é idêntico ao caminho original até o primeiro ponto em que toca a reta $y = x + 1$. A partir desde ponto, o novo caminho será simétrico ao caminho original em relação a reta $y = x + 1$. O caminho resultante assim será um caminho de $(0, 0)$ até o ponto $(n - 1, n + 1)$. Além disso, a correspondência entre os caminhos originais e os caminhos refletidos é biunívoca. Segue que o número de caminhos que passam pela diagonal $y = x$ é $\binom{2n}{n-1}$.

Portanto, o número de caminhos que se situam abaixo da diagonal é dado por

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Sendo A o evento em que Dafne entra na cozinha, então a probabilidade de A ocorrer é

$$P(A) = 1 - \frac{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n}{n+1}.$$

Questão 5. Qual é o dígito da posição 2021 de 8095! (Contando da direita para esquerda)?

Solução:(Adaptada da solução oficial) Observe que 8095! possui exatamente 2020 zeros em sua expansão decimal. Para verificar, basta observar que

$$\left[\frac{8095}{5}\right]+\left[\frac{8095}{25}\right]+\left[\frac{8095}{125}\right]\left[\frac{8095}{625}\right]+\left[\frac{8095}{3125}\right] = 2020.$$

Temos então que 10^{2020} é a maior potência de 10 que divide 8095 fatorial. Dessa forma defina

$$x = \frac{8095!}{10^{2020}}.$$

Observe que o dígito na posição 2021 de 8095 fatorial é o dígito das unidades de x e que x é diferente de zero.

Como o expoente da maior potência de 2 que divide 8095! é maior do que 2020, então x é par. Assim,

$$x \equiv 2 \text{ ou } 4 \text{ ou } 6 \text{ ou } 8 \pmod{10}.$$

Temos que

$$x = \frac{8095!}{10^{2020}} \Rightarrow x = \frac{8095!}{2^{2020}5^{2020}}.$$

$$2^{2020}x = \frac{8095!}{5^{2020}}.$$

Pelo teorema de Wilson temos que para todo número primo p

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

Note que

$$\frac{8095!}{5^{2020}} \equiv (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot (11.12.13.14) \ldots$$
$$\ldots (8091 \cdot 8092 \cdot 8093 \cdot 8094) \equiv$$
$$\equiv (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^{2020} \cdot M \equiv (-1)^{2020} \cdot M \pmod{5}.$$

E o que é M?

Perceba que quando dividimos 1619 por 5 obtemos 323 e resto 4. isso quer dizer que temos 323 blocos completos e um bloco com apenas 4 elementos. O mesmo quando dividimos 323 por 5 e assim sucessivamente. Logo

$$M \equiv (-1)^4 \cdot 4 \equiv 4.$$

Como $2^{2020} \equiv 1 \pmod{5}$, segue que

$$x \equiv 2^{2020}x \equiv \frac{8095!}{5^{2020}} \equiv 4 \pmod{5}.$$

Assim temos o sistema de congruências:

$$\begin{cases} x \equiv 0 & \pmod{2} \\ x \equiv 4 & \pmod{5} \end{cases}$$

Logo, temos que $x \equiv 4 \pmod{10}$.

6. Eventos

Fique ligado! Participe!

- **III FEIRA AMAZONENSE DE MATEMÁTICA**
  - Local: Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal do Amazonas (UFAM)
  - Data: 16 a 18 de outubro de 2023
  - Mais informações: https://www.even3.com.br/iii-feira-amazonense-de-matematica-304018/
- **XVI ENAMA**
  - Local: Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas (UFAL)-Maceió – AL
  - Data: 08 a 10 de Novembro de 2023
  - Mais informações: https://im.ufal.br/pt-br/institucional/informes/xvi-enama-2023
- **Congreso Internacional de GeoGebra**
  - Local: Córdoba
  - Data: 9 a 12 de Novembro de 2023
  - Mais informações: https://congresogeogebra.org
- **XV SEMANA DA MATEMÁTICA DA UFRPE**
  - Local: Universidade Federal Rural de Pernambuco
  - Data: 29 de Novembro a 02 de Dezembro de 2023

– Mais informações: http://semat.dm.ufrpe.br/

- **VIII Fórum Nacional de Formação Inicial de Professores que Ensinam Matemática**

  – Local: Instituto Federal do Piauí (Campus Teresina Central - Predio C) - Teresina-PI

  – Data: 30 de novembro a 02 de dezembro de 2023

  – Mais informações: https://www.even3.com.br/viii-forum-nacional-de-formacao-inicial-de-professores-que-ensinam-matematica-343596/

7. Problemas

Convidamos o leitor a responder alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Enviem as soluções dos problemas propostos para o e-mail:*ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, o envio do arquivo (.tex), no modelo disponível no site, deve ser realizado até **15/12/2023**.

Problema 1. (1ª fase - 16ª OBMEP) Quantas vezes o número 17^2 deve aparecer dentro do radicando na igualdade

$\sqrt{17^2+17^2+\cdots+17^2} = 17^2+17^2+17^2$

para que ela seja verdadeira?

(a) 2601 (c) 289 (e) 9

(b) 861 (d) 51

Problema 2 (OBMEP - 2019 - 1º Fase - Nível 3)**.** Em uma lanchonete, um pão de queijo, dois cachorros-quentes e um suco de laranja custam juntos R\$ 31,00; já três pães de queijo, três cachorros-quentes e dois sucos de laranja custam juntos R\$ 59,00. Qual é a diferença entre os preços de um cachorro-quente e de um pão de queijo?

a) R\$ 1,00 c) R\$ 2,00 e) R\$ 3,00

b) R\$ 1,50 d) R\$ 2,50

Problema 3. (2ª fase - Nível 3 XXXI-OBM Q.4) No programa de auditório *Toto Bola*, o apresentador Ciço Magallanes dispõe de duas caixas idênticas. Um voluntário da platéia é chamado a participar da seguinte brincadeira: ele recebe dez bolas verdes e dez bolas vermelhas e as distribui nas duas caixas, sem que o apresentador veja, e de modo que em cada caixa haja pelo menos uma bola. Em seguida, o apresentador escolhe uma das caixas e retira uma bola. Se a bola for VERDE, o voluntário ganha um carro. Se for VERMELHA, ele ganha uma banana. A máxima probabilidade que o voluntário tem de ganhar um carro é igual a $\frac{m}{n}$, em que m e n são inteiros positivos primos entre si. Determine o valor de $m+n$.

8. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n. 26, abril de 2023**. [4]

Problema 1. (32ª OCM - Nível 1) Se vale a soma $32^3+32^3+32^3+32^3 = 32^x$. Qual o valor de x?

Solução 1. Podemos escrever a equação na forma $32^x = 4\cdot 32^3$ e aplicando logaritmo na base 32, temos $\log_{32} 32^x = \log_{32} 32^3 + \log_{32} 4$, daí $x = 3+\log_{32} 4$.

Mas temos que: $\log_{32} 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 32} = \frac{2}{5}$, concluímos então que $x = 3+\frac{2}{5} = \frac{17}{5}$. □

Solução 2. Escrevendo o número 32 numa potência de 2, temos $(2^5)^x = 4\cdot(2^5)^3 \Leftrightarrow 2^5x = 2^2\cdot 2^{15}$, daí $5x = 17$ e concluímos que $x = \frac{17}{5}$. □

Problema 2 (8ª OBMEP - 1ª FASE)**.** Pedro vai participar de um programa de prêmios em que há uma urna contendo quatro bolas com valores diferentes e desconhecidos por ele, que serão sorteadas

[4] Soluções enviadas pelo leitor Amaro José de Oliveira Filho

uma a uma até que ele decida ficar com uma delas. Ele observa o valor das duas primeiras bolas sorteadas e as descarta. Se o valor da terceira bola sorteada for maior que os das duas primeiras, ele ficará com ela e, caso contrário, ficará com a bola que restou. Qual é a probabilidade de Pedro ficar com a bola de maior valor?

a) $\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{3}{8}$ e) $\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{5}{12}$

Solução 1. Numeramos as quatro bolas de 1 a 4, do menor para o maior. Assim, há $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ ordens possíveis para a retirada das bolinhas todas igualmente prováveis. Dessas retiradas, Pedro fica com o prêmio de maior valor nos seguintes casos:

1) A bolinha 4 sai na 3ª retirada; neste caso, seu número é necessariamente maior que os das duas primeiras.

2) A bolinha sai na 4ª retirada, desde que a bolinha 3 saia em uma das duas primeiras retiradas (caso contrário, ou seja, se ela sair na 3ª retirada, Pedro ficará com ela, por seu número ser maior que o das duas primeiras).

O maior número de possibilidades para o primeiro caso é $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Para o segundo caso há 2 possibilidades para a posição em que sai a bolinha 3 (1ª ou 2ª), 2 possibilidades para a bolinha que sai na 3ª posição e 1 possibilidade para a bolinha que sai na 4ª retirada, num total de $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ possibilidades.

Logo, o número de casos favoráveis é $6+4 = 10$ e a probabilidade de que Pedro tire o prêmio de maior valor é $\dfrac{10}{24} = \dfrac{5}{12}$.

□

Solução 2. Numeramos as quatro bolinhas de 1 a 4, do menor para o maior valor. Pedro tira o prêmio máximo em duas situações: quando a bolinha 4 sai na 3ª posição ou quando ela sai na 4ª posição e a bolinha 3 sai em uma das duas primeiras. A probabilidade do primeiro evento é $\frac{1}{4}$ e a do segundo é $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$.

Logo, a probabilidade de ele tirar o prêmio máximo é $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$, dando a resposta do item d.

□

Problema 3. (OBRL - 2021 2ª Fase Nível Ômega) Nesse quadrado mágico multiplicativo, o produto dos números de cada linha e de cada coluna dá sempre o mesmo resultado, podendo haver números repetidos. Considere a distribuição iniciada na figura abaixo.

8	4	R
W	6	8
6	U	G

Se as regras descritas forem todas obedecidas, $R + W + U + G$ será igual a:

a) 19 c) 33 e) 29.

b) 27 d) 22

Solução. Temos $8 \cdot 4 \cdot R = W \cdot 6 \cdot 8 = 6 \cdot U \cdot G = 8 \cdot W \cdot 6 = 4 \cdot 6 \cdot U = R \cdot 8 \cdot G$. Por essas igualdades percebemos que $8 \cdot 4 \cdot R = R \cdot 8 \cdot G$ $(R \neq 0)$, o que implica em $G = 4$. Daí as igualdades ficam da seguinte forma $8 \cdot 4 \cdot R = W \cdot 6 \cdot 8 = 6 \cdot U \cdot 4 = 8 \cdot W \cdot 6 = 4 \cdot 6 \cdot U = R \cdot 8 \cdot 4$. Eliminando os números que têm os mesmos fatores as igualdades se reduzem a $8 \cdot 4 \cdot R = W \cdot 6 \cdot 8 = 6 \cdot U \cdot G$. Combinando dois a dois e simplificando obtemos:

$$8 \cdot 4 \cdot R = W \cdot 6 \cdot 8 \Leftrightarrow 2R = 3W \tag{2}$$

$$8 \cdot 4 \cdot R = 6 \cdot U \cdot 4 \Leftrightarrow 4R = 3U \tag{3}$$

$$W \cdot 6 \cdot 8 = 6 \cdot U \cdot 4 \Leftrightarrow 2W = U. \tag{4}$$

Substituindo o valor de U de (3) em (2) teremos $4R = 3 \cdot 2W \Leftrightarrow 2R = 3W$, que é igual a equação (1), o que leva a uma indeterminação. Neste caso faremos as seguintes considerações:

1. Fazendo $W = 2$ teremos $U = 4$ e $R = 3$ e o nosso quadrado fica da seguinte forma

8	4	3
2	6	8
6	4	4

   Os produtos dos números das linhas e das colunas são todos iguais a 96, porém a soma $R + W + U + G = 3 + 2 + 4 + 4 = 13$ (não é nenhum dos itens dados).

2. Fazendo $W = 4$ teremos $U = 8$ e $R = 6$ e nosso quadrado fica da seguinte forma

8	4	6
4	6	8
6	8	4

   Os produtos dos números das linhas e das colunas são todos iguais a 192, porém a soma $R + W + U + G = 6 + 4 + 8 + 4 = 22$, dando como resposta o item d.

$\square$