É Matemática, Oxente!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 18, volume 1, Março de 2021
ISSN 2526-8651

Sumário

1. Artigo

Caos, Repetições e Tabuleiros

Ricardo Nunes Machado Junior
UFRPE - CEGEN - Departamento de Matemática
52171-900 - Recife-PE - Brasil

Introdução

Leonhard Paul Euler (1707-1783) resolveu o seguinte problema proposto por Nicolaus Bernoulli (1687-1759), conhecido como "O problema das cartas mal endereçadas": De quantas formas distintas pode-se colocar n cartas em n envelopes, endereçados a n destinatários diferentes, de modo que nenhuma das cartas seja colocada no envelope correto? Atualmente este problema é enunciado da seguinte maneira: quantas são as permutações caóticas com n elementos distintos?

Neste artigo, vamos abordar um pouco de permutações simples, permutações com repetições, o Princípio da Inclusão-Exclusão, permutações caóticas com todos elementos distintos e para finalizar, vamos analisar de forma mais detalhada as permutações caóticas, removendo a condição de que todos os elementos sejam distintos.

Permutações

Permutar uma lista de objetos é mudar a ordem em que os objetos da lista aparecem originalmente. Quando se trata do número de permutações de n objetos distintos, estamos contanto o número total de formas de ordenar estes n objetos. A notação para este número é dada por P_n e este valor pode ser obtido da seguinte maneira:

$$P_n = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$$

pois, temos n modos de escolher o objeto que ocupará o primeiro lugar, uma vez tomada essa decisão, teremos $n-1$ modos de se escolher o objeto que ocupará o segundo lugar, e assim por diante, até que haja apenas um único modo de se escolher o último objeto.

Exemplo 1. (OPEMAT 2019 - adaptado) Em uma viagem a Recife, o grupo formado pelos números 1, 2, 3, 4 e 5, resolveu tirar fotos próximo ao monumento do Parque das Esculturas do artista Pernambucano Francisco Brennand. Indecisos pela escolha da disposição na foto, eles concordaram em tirar várias fotos em todas as disposições possíveis, permutando os lugares entre si. Por fim, eles colocaram as fotos em ordem crescente de numeração formando a seguinte lista:

`1 2 3 4 5, 1 2 3 5 4, ... , 5 4 3 2 1`

Julgue as afirmações a seguir como verdadeira ou falsa.

a) Quem ocupa a última posição da vigésima foto é o 3.

b) A foto em que os números aparecem na disposição 32541, ocupa o 59º lugar desta lista.

c) A quantidade de fotos em que os números 1 e 2 aparecem separados é 96.

Solução: a) Temos 3! fotos começando com 12, 3! fotos começando com 13 e 3! fotos começando com 14. No total já temos 18 fotos. A 19ª foto contém o número 15234 e a 20ª foto contém o número 15243. Portanto a afirmação é verdadeira.
b) Antes do número 32541, temos 4! números começando por 1, 4! números começando por 2, 3! números começando por 31, 2! números começando por 321 e 2! números começando por 324. A quantidade total destes números é $2 \times 4! \times 3! \times 2 \times 2! = 2 \times 24 \times 6 \times 2^2 = 58$. O número que aparece na 59ª foto é 32514. Portanto a afirmação é falsa.
c) Podemos contar o número total de permutações, sem a restrição dos algarismos 12, e contar o número total de permutações com os algarismos 1 e 2 juntos. A diferença será a resposta. O número total de permutações é $5! = 120$. O número de permutações em que os algarismos 1 e 2 aparecem juntos é $2 \times 4! = 48$. Portanto, a resposta é $120 - 48 = 72$. Logo a afirmação é falsa.

■

Quando estamos contando o número de permutações, os objetos envolvidos podem aparecer repetidamente. Por exemplo, quantos são os anagramas da palavra AMARELA? Este é um caso de permutações com elementos repetidos, pois permutar os duas letras A, não muda o anagrama obtido. Para resolver este problema, podemos pensar da seguinte maneira. Coloque um índice em cada um dos A's, ficando com a seguinte "palavra": $A_1MA_2RELA_3$. Assim o número total de ordens possíveis é 7!. Agora podemos "descontar" o número de formas de ordenar as três letras A, dividindo pela quantidade de formas de ordená-las, que é 3!. Assim o total anagramas é

$$\frac{7!}{3!} = \frac{5040}{6} = 840.$$

O Teorema a seguir mostra como obter o número de permutações com elementos repetidos, no caso geral.

Teorema 1.1. *O número de permutações de n objetos, com um objeto repetido r_1 vezes, outro objeto repetido r_2 vezes, até o "último" objeto repetido r_k vezes, com*

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$$

é dado por

$$P_n^{r_1, r_2, \ldots, r_k} = \frac{n!}{r_1! \times r_2! \times \cdots \times r_k!}.$$

Exemplo 2. (OPEMAT 2016) A figura abaixo representa o mapa de uma cidade. Cada aresta representa uma rua e cada vértice representa um cruzamento. Quantos são os trajetos de comprimento mínimo ligando o ponto A ao ponto B?

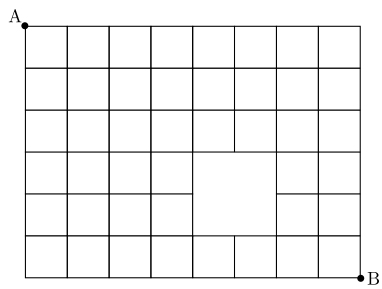


Figura 1.1: Mapa da cidade.

Solução: Adicionando um ponto no buraco do mapa e ligando os segmentos para completar o mapa, o número total de caminhos de A para B, é o número de permutações de ir para a direita 8 vezes e de ir para baixo 6 vezes, ou seja, $P_{8+6}^{8,6}$.

Para obter a resposta do problema, precisamos subtrair do total, o número de caminhos que passam pelo ponto adicionado. Para ir do ponto A para o ponto adicionado, precisamos ir cinco vezes para a direita e quatro vezes para baixo. Para ir do ponto adicionado para o ponto B, precisamos ir três vezes para a direita e duas vezes para baixo. Assim, o total de caminhos de A para B no mapa dado, é

$$P_{8+6}^{8,6} - P_{5+4}^{5,4} \times P_{3+2}^{3,2} = 1743.$$

■

Para mais exemplos e demonstrações, incluindo as demonstrações dos Teoremas 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4, veja a referência [1] que está disponível on-line, gratuitamente.

O Princípio da Inclusão-Exclusão

Vamos fixar duas notações. Denotaremos por $\#A$, a cardinalidade do conjunto A, ou seja, o número de elementos do conjunto A. Denotaremos por C_n^p, o número de combinações de n elementos tomados p a p, ou seja, o número de maneiras de escolher p elementos distintos, dentre n elementos distintos disponíveis, sem levar em conta a ordem.

Teorema 1.2. *(Princípio da Inclusão-Exclusão para dois conjuntos) Sejam A e B conjuntos finitos, então*

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

O caso geral se escreve da seguinte maneira:

Teorema 1.3. *(Princípio da Inclusão-Exclusão) Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos finitos, então*

$$\# \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \#A_i - \sum_{0<i<j\leq n} \#(A_i \cap A_j) + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{n-1}\#(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$

Exemplo 3. (OBM 2011) Três polígonos regulares, de 8, 12 e 18 lados respectivamente, estão inscritos em uma mesma circunferência e têm um vértice em comum. Os vértices dos três polígonos são marcados na circunferência. Quantos vértices distintos foram marcados?

Solução: Sejam A_k, $k = 8, 12, 18$, os conjuntos dos vértices dos polígonos com 8, 12 e 18 lados, respectivamente. Queremos calcular $\#(A_8 \cup A_{12} \cup A_{18})$. Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, temos

$$\begin{aligned} \#(A_8 \cup A_{12} \cup A_{18}) &= \\ &= \#A_8 + \#A_{12} + \#A_{18} - \#(A_8 \cap A_{12}) \\ &\quad -\#(A_8 \cap A_{18}) - \#(A_{12} \cap A_{18}) \\ &\quad +\#(A_8 \cap A_{12} \cap A_{18}). \end{aligned}$$

Como $\#A_k = k$, para concluir o cálculo, precisamos descobrir a cardinalidade de cada interseção.

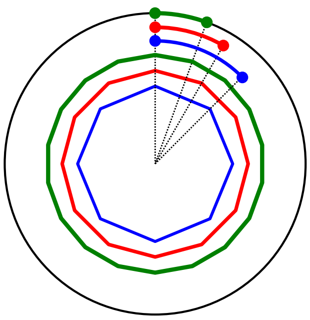


Figura 1.2: Polígonos encolhidos.

Usando a figura acima como referência, se expandirmos os polígonos até a circunferência, estaremos de acordo com o enunciado. O vértice em comum aos três polígonos foi desenhado no ponto extremo superior, sem perda de generalidade, pois independente de onde ele esteja, os polígonos podem ser girados para ficarem desta forma.

Considere os semicírculos que partem do extremo superior no sentido horário, até o vértice seguinte de A_k e assim sucessivamente, de um vértice de A_k até o seguinte. Desta forma cada conjunto A_k define k semicírculos. Teremos a interseção de dois ou três vértices quando a respectiva quantidade de extremidades dos semicírculos coincidirem. Portanto, usaremos o máximo divisor comum para calcular a quantidade de interseções dos vértices. Assim, $\#(A_i \cap A_j) = \text{mdc}(i, j)$, para $i, j \in \{8, 12, 18\}$, com $i \neq j$ e $\#(A_8 \cap A_{12} \cap A_{18}) = \text{mdc}(8, 12, 18)$. Logo,

$$\#(A_8 \cup A_{12} \cup A_{18}) = \\ = 8 + 12 + 18 - 4 - 2 - 6 + 2 = 28.$$

■

Permutações Caóticas Simples

Definição 1.1. Uma permutação de uma lista de n elementos é chamada de permutação caótica, quando nenhum dos elementos da permutação está na posição original.

O Teorema a seguir resolve "O problema das cartas mal endereçadas", proposto por Nicolaus Bernoulli.

Teorema 1.4. *O número de permutações caóticas, de uma lista com n elementos distintos, é dado por*

$$D_n = n! \times \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Exemplo 4. Quantos são os anagramas da palavra PRETO, sem que as letras fiquem na posição original?

A resposta desse problema é dada pelo número de permutações caóticas com 5 elementos distintos:

$$\begin{aligned} D_5 &= 5! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) \\ &= 5! - 5! + \frac{5!}{2!} - \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{4!} - \frac{5!}{5!} \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot 4 + 5 - 1 \\ &= 60 - 20 + 5 - 1 \\ &= 44. \end{aligned}$$

Permutações Caóticas com Repetições

Exemplo 5. Quantos são os anagramas da palavra AMARELA, sem que as letras fiquem na posição original?

Este é um problema de permutação caótica com elementos repetidos, portanto a resposta não é D_7. Observe que o número de soluções para a palavra AMARELA é o mesmo que o número de soluções para a "palavra" AAAMREL, vamos usar essa permutação para facilitar a explicação.

Para resolver o problema, vamos trocar $AAAMREL$ por $A_1A_2A_3MREL$, pois assim todas as letras ficam diferentes, e depois resolvemos o problema das permutações das letras A. Em seguida colocamos a palavra em um tabuleiro e usamos torres para representar as permutações. Cada permutação da palavra é representada por uma única forma de colocar 7 torres em um tabuleiro 7×7, de forma que uma torre não possa atacar a outra, ou seja, em linhas e colunas diferentes. Por exemplo

posição original:	A_1	A_2	A_3	M	R	E	L
permutação:	M	R	E	L	A_1	A_2	A_3

fica com a seguinte configuração no tabuleiro:

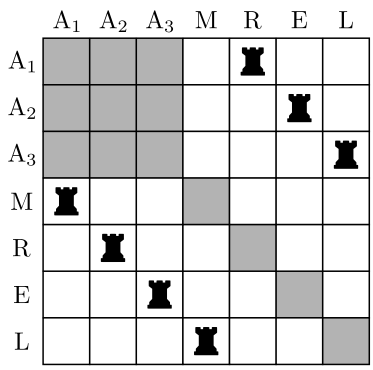


Figura 1.3: Tabuleiro para $A_1A_2A_3$MREL.

Para uma permutação simples, as torres podem ocupar qualquer quadrado, desde que uma não possa atacar a outra. No nosso caso, os quadrados cinzas são os lugares que não queremos colocar as torres, pois assim estamos evitando os casos em que alguma letra fica em seu lugar original. Chamaremos de subtabuleiro proibido, o subtabuleiro que não queremos colocar as torres.

Defina B_k = colocações de torres, na qual, a torre da linha k está em um subtabuleiro proibido.

A resposta do nosso problema será dado por

$$\frac{\#(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_7)^c}{3!}$$

ou seja, o número de elementos do complementar de $(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_7)$, dividido pelo número de maneiras de permutar as letras A_1, A_2, A_3. Pelo princípio da Inclusão-Exclusão, isso pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}7! - \sum_{i=1}^{7} \#B_i + \sum_{0<i<j\leq 7} \#(B_i \cap B_j) + \cdots \\ +(-1)^7 \#(B_1 \cap \cdots \cap B_7).\end{aligned} \tag{1}$$

A seguir, será mostrado que cada somatório de (1) envolvendo interseções de k conjuntos, pode ser calculado pelo produto de um valor r_k, a ser determinado, vezes o fatorial de $(7-k)$. Observe que

$$\sum_{i=1}^{7} \#B_i = r_1 \cdot (7-1)!$$

com $r_1 = 13$, pois se $i \in \{1,2,3\}$ temos 3 opções para colocar a torre na linha i, sobrando 6 torres para colocar cada uma em uma linha, logo $\#B_i = 3 \cdot 6!$. Para $j \in \{4,5,6,7\}$, $\#B_j = 6!$, pois temos apenas um lugar para colocar a torre na linha j, sobrando 6 torres para colocar cada uma em uma linha. Portanto, o valor do somatório é dado por

$$3 \cdot 6! + 3 \cdot 6! + 3 \cdot 6! + 6! + 6! + 6! + 6! = 13 \cdot 6!.$$

Seguindo com esse raciocínio, temos

$$\sum_{0<i<j\leq 7} \#(B_i \cap B_j) = r_2 \cdot (7-2)!$$

$$\vdots$$

$$\#(B_1 \cap \cdots \cap B_7) = r_7 \cdot (7-7)!$$

O problema agora é determinar os valores de cada r_i. Uma forma prática de fazer isso é usando o polinômio de torre:

Definição 1.2. Seja T um tabuleiro qualquer. O *polinômio de torre* de T é definido como

$$R(x,T) = \sum_{k=0}^{n} r_k(T) x^k,$$

no qual, $r_k(T)$ é o número de maneiras de colocar k torres em T, de forma que uma torre não possa atacar a outra e n é o número máximo de torres que é possível colocar em T, de forma que uma torre não possa atacar a outra. Em inglês esse polinômio é chamado de *Rook Polynomial.* Para mais informações veja as referências [2] e [3].

Note que na Definição 1.2, o tabuleiro não precisa ser quadrado nem retangular, pode inclusive ser um tabuleiro formado apenas pela parte cinza do tabuleiro da Figura 1.3.

Teorema 1.5. *Seja T um tabuleiro $n \times n$. O número de formas de colocar k torres em T, ($k = 0, 1, \ldots, n$) de forma que uma não possa atacar a outra é dado pelo coeficiente de x^k do polinômio:*

$$R(x,T) = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 \cdot k! \cdot x^k.$$

Demonstração: Precisamos escolher k linhas e k colunas no tabuleiro T, $n \times n$, para colocar as torres, de modo que uma torre não possa atacar a outra, isto pode ser feito de $\left(C_n^k\right)^2$ maneiras. Agora precisamos escolher a posição da linha 1 na qual será colocada a primeira torre, isso pode ser feito de k maneiras, em seguida, precisamos escolher a posição da linha 2 na qual será colocada a segunda torre, o que pode ser feito de $(k-1)$ maneiras, e assim por diante, até ficarmos com uma maneira de escolher a k-ésima torre. Assim, pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de colocar k torres em T, de modo que uma torre não possa atacar a outra é

$$\left(C_n^k\right)^2 \cdot k!.$$

∎

Exemplo 6. Sejam T^i, tabuleiros $i \times i$, $i = 1, 2, 3,$

então

$$R(x, T^1) = x + 1.$$
$$R(x, T^2) = 2x^2 + 4x + 1.$$
$$R(x, T^3) = 6x^3 + 18x^2 + 9x + 1.$$

Definição 1.3. Dizemos que a união de dois tabuleiros T_1 e T_2 é uma união disjunta, quando nenhum quadrado de T_1 está na mesma linha ou mesma coluna de T_2.

Exemplo 7. Sejam T^i, tabuleiros $i \times i$, $i = 1, 2$, então o polinômio de torre da união disjunta $T^2 \cup T^1$ é o produto dos polinômios de torre de T^2 e T^1.

O polinômio de torre $R(x, T^2 \cup T^1)$ pode ser obtido fazendo todas as figuras, da seguinte forma:

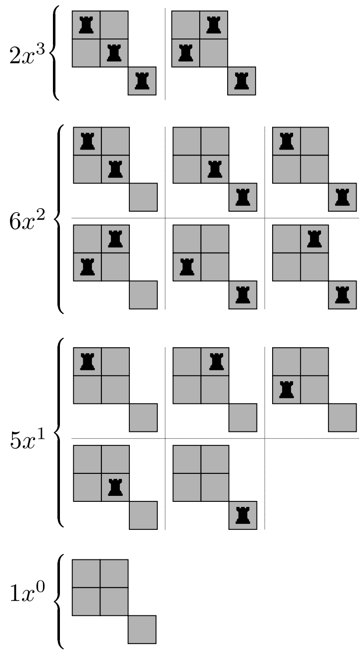


Figura 1.4: O polinômio de torre de $T^2 \cup T^1$.

Calculando o produto dos polinômios de torre de T^2 e T^1, obtemos

$$\begin{aligned} R(x, T^2) \cdot R(x, T^1) &= (2x^2 + 4x + 1)(x + 1) \\ &= 2x^3 + 6x^2 + 5x + 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$R(x, T^2 \cup T^1) = R(x, T^2) \cdot R(x, T^1).$$

Proposição 1.6. *O polinômio de torre da união disjunta de dois tabuleiros é dado pelo produto dos polinômios de torre de cada um dos tabuleiros.*

Demonstração: Seja T um tabuleiro obtido pela união disjunta de dois tabuleiros T_1 e T_2.

Para colocar k torres em T, de forma que uma torre não possa atacar a outra, podemos colocar $r_{k-i}(T_1)$, $0 \le i \le k$, torres em T_1, de forma que uma não possa atacar a outra, e $r_i(T_2)$ torres em T_2, de forma que uma não possa atacar a outra. Dessa forma, dados duas torres quaisquer em T, na configuração obtida anteriormente, uma não pode atacar a outra. Portanto, o número de maneiras de colocarmos k torres em T é dado por

$$r_k(T) = \sum_{i=0}^{k} r_{k-i}(T_1) r_i(T_2).$$

Logo,

$$\begin{aligned} R(x, T) &= \sum_{k=0}^{n} r_k(T) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} r_{k-i}(T_1) r_i(T_2) x^k \\ &= \left(\sum_{s=0}^{p} r_s(T_1) x^s \right) \left(\sum_{t=0}^{q} r_t(T_2) x^t \right) \\ &= R(x, T_1) \cdot R(x, T_2). \end{aligned}$$

■

Voltando a solução do Exemplo 5. Pela Proposição 1.6 o polinômio de torre do tabuleiro da palavra AAAMREL é dado por

$$R(x, T) = (6x^3 + 18x^2 + 9x + 1)(x + 1)^4. \qquad (2)$$

Fazendo as contas, obtemos

$$\begin{aligned} R(x, T) = 6x^7 + 42x^6 + 117x^5 + 169x^4 + \\ + 136x^3 + 60x^2 + 13x^1 + 1x^0. \end{aligned}$$

Observe que eram exatamente os coeficientes desse polinômio que estavam faltando para resolvermos o problema pelo princípio da Inclusão-Exclusão (1). Então a solução do Exemplo 5 é dada pelo polinômio de torre acima, com x^k substituído por $(-1)^k \cdot (7 - k)!$, dividido por 3!, pois temos que descontar o número de formas de ordenar as três letras A. Fazendo as substituições, obtemos:

$$\begin{aligned} 7! - 13 \cdot 6! + 60 \cdot 5! - 136 \cdot 4! + 169 \cdot 3! + \\ - 117 \cdot 2! + 42 \cdot 1! - 6 \cdot 0! \end{aligned} \tag{3}$$

Calculando (3) e dividido por 3!, resulta em

$$\frac{432}{6} = 72 \text{ soluções.}$$

Exemplo 8. Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA, sem que as letras fiquem na posição original? (Supondo que A e Á são letras iguais)

O polinômio de torre desse caso é dado por

$$(6x^3 + 18x^2 + 9x + 1)(2x^2 + 4x + 1)^2(x + 1)^3.$$

Expandindo o polinômio obtemos

$$\begin{aligned} 1x^0 + 20x^1 + 164x^2 + 728x^3 + 1941x^4 + \\ + 3260x^5 + 3514x^6 + 2416x^7 + \\ + 1020x^8 + 240x^9 + 24x^{10}. \end{aligned}$$

Trocando x^k por $(-1)^k \cdot (10 - k)!$ obtemos:

$$\begin{aligned} 10! - 20 \cdot 9! + 164 \cdot 8! - 728 \cdot 7! + 1941 \cdot 6! + \\ -3260 \cdot 5! + 3514 \cdot 4! - 2416 \cdot 3! + \\ +1020 \cdot 2! - 240 \cdot 1! + 24 \cdot 0! \end{aligned}$$

Fazendo esse cálculo e dividindo por $3! \times 2! \times 2!$ chegamos na resposta:

$$\frac{392544}{3! \times 2! \times 2!} = 16356 \text{ soluções.}$$

Usando o computador

Devido ao tamanho das contas, para calcular a expansão dos polinômios foi usado o software matemático SageMath, que pode ser instalado no computador ou usado on-line através link:

https://sagectu.com.br/sagecell.html

Na sequência, temos alguns comandos básicos usados nos cálculos deste artigo.

No Exemplo 5, o cálculo da expansão do polinômio de torre (2) foi usado o método `expand` da seguinte maneira:

```
((6*x^3+18*x^2+9*x+1)*(x+1)^4).expand()
```

obtendo a seguinte resultado:

```
6*x^7 + 42*x^6 + 117*x^5 + 169*x^4 +
 136*x^3 + 60*x^2 + 13*x + 1
```

O cálculo de (3) foi feito com o seguinte comando:

```
P(n) = factorial(n)
P(7)-13*P(6)+60*P(5)-136*P(4)+169*P(3)
                -117*P(2)+42*P(1)-6*P(0)
```

obtendo

```
432
```

Na referência [1], que pode ser acessado on-line e de forma gratuita, está implementado no SageMath, um algoritmo que retorna o polinômio de torre e o número de permutações caóticas, a partir de uma palavra dada. Para aprender mais sobre o software SageMath, veja o livro [4].

Considerações finais

É fato que as contas usando polinômios de torre são grandes, mesmo para casos que parecem simples. Talvez por isso não seja fácil encontrar problemas específicos de permutações caóticas com elementos repetidos em provas de olimpíadas. Devido a essa dificuldade, apenas o Problema 4, proposto neste artigo, é de uma olimpíada e pode ser resolvido via polinômio de torre.

As permutações caóticas com elementos repetidos aparecem no livro [2], que é sobre Olimpíadas de Matemática, no qual também podem ser encontrados mais resultados sobre os polinômios de torre. A pergunta respondida no Exemplo 8 também aparece com certa frequência em fóruns pela internet e em páginas de pessoas envolvidas com olimpíadas, como por exemplo: http://www.mat.puc-rio.br/~nicolau/olimp/obm-l.200008/msg00127.html e http://www.mat.puc-rio.br/~obmlistas/obm-l.200206/msg00273.html

Problemas Propostos

Problema 1. (IME 2008) Cinco equipes concorrem numa competição automobilística, em que cada equipe possui dois carros. Para a largada são formadas duas colunas de carros lado a lado, de tal forma que cada carro da coluna da direita tenha ao seu lado, na coluna da esquerda, um carro de outra equipe. Determine o número de formações possíveis para a largada.

Problema 2. (Canadá) Seja n um inteiro positivo, e $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Mostre que o número de permutações de S sem pontos fixos e o número de permutações de S com exatamente um ponto fixo tem diferença exatamente 1.

Problema 3. Quantas são as permutações de (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) nas quais nenhum número ímpar ocupa o seu lugar primitivo?

Problema 4. (PRMO 2019) Diremos que um rearranjo das letras de uma palavra não tem letras fixas, quando o rearranjo é colocado diretamente abaixo da palavra, e nenhuma coluna tem a mesma letra repetida. Por exemplo, HBRATA é um rearranjo sem letras fixas de BHARAT. Quantos rearranjos distinguíveis sem letras fixas que BHARAT tem? (As duas letras A são consideradas idênticas.) disponível em: https://olympiads.hbcse.tifr.res.in/wp-content/uploads/2019/08/PRMO-2019-Question-Paper.pdf

Problema 5. Quantos são os anagramas da palavra CARROÇA, sem que as letras fiquem na posição original? Resolva esse problema das duas formas

a) Supondo que C e Ç são letras iguais;

b) Supondo que C e Ç são letras diferentes.

Referências

[1] Machado Junior, R. N.; Santana Neto, L. M., Análise Combinatória e Probabilidade: Com Aplicações no SageMath. Disponível em: https://prof-ricardomachado.github.io/notas-combinatoria/indice.html

[2] Holton, D., *A Second Step to Mathematical Olympiad Problems*, Vol. 7, World Scientific.

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Rook_polynomial

[4] Silva, L.; Santos, M.; Machado, R. *Elementos de Computação Matemática com SageMath*, SBM, 1ª ed.

[5] Stanley, R. P. *Enumerative Combinatorics*, Cambridge University Press.

2. Curiosidades

Números Primos e Padrões Gráficos

Gabriel Guedes [1]

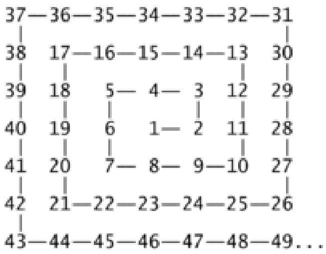
Números primos são a base da aritmética e entender seu comportamento, isto é, como eles se distribuem em relação aos demais inteiros é uma das questões mais fundamentais da matemática. Há uma gama enorme de problemas em aberto, relativos a números primos, que encantam por ser de fácil compreensão e não sabermos como resolvê-los. Por exemplo: infinidade de primos gêmeos, conjectura de Goldbach, existência de números perfeitos ímpares.

Muita pesquisa atual é feita em volta desses números, sendo utilizados métodos da análise, probabilidade, álgebra, dentre outros.

Foi em uma tarde de 1963, em um evento científico, durante uma palestra, um tanto quanto entendiante, que o matemático Polonês Stanislaw Marcin Ulam, resolveu passar o tempo fazendo a seguinte brincadeira, pegou uma folha de papel, escreveu o número 1 no centro e os demais inteiros positivos formando uma espiral como na figura abaixo:

[1] Docente da Universidade Federal Rural de Pernambuco

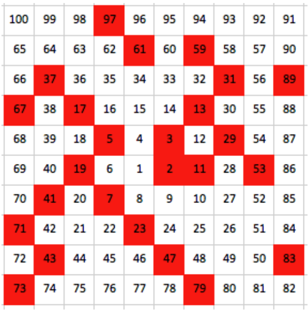
Figura 2.1: Espiral de Ulam 7x7



Fonte: pt.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Ulam

Após isso, ele marcou apenas os números primos:

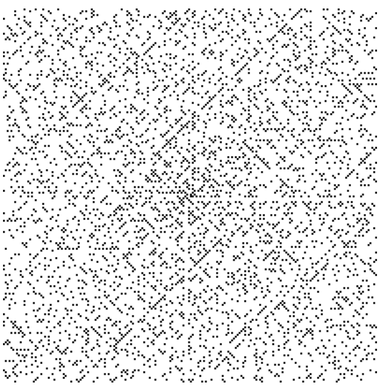
Figura 2.2: Espiral de Ulam 10x10 com primos destacados



Fonte: zeletron.com.br/2013/07/primos-na-espiral-de-ulam.html

Então ele percebeu, surpreendido, que alguns números primos tendiam a se concentrar em determinadas diagonais. Como podemos observar na figura abaixo:

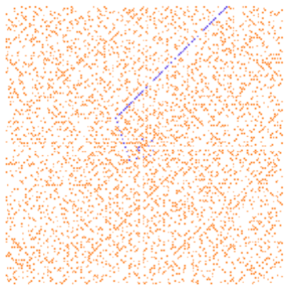
Figura 2.3: Espiral de Ulam 200x200



Fonte: legauss.blogspot.com/2009/03/espiral-de-ulam.html

Aparentemente esse acúmulo de primos não se trata de mera aleatoriedade, mas sim de um padrão. Uma das muitas perguntas que se faz sobre primos é se é possível determinar uma expressão "simples"que gere apenas números dessa forma. É possível mostrar que um polinômio com coeficientes inteiros em uma variável, isto é $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$, não pode ter apenas primos como imagem. De outra forma, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $p(k)$ é um número composto. Porém, encontrar expressões polinomiais para primos cada vez maiores é de muito interesse. O polinômio que detêm o recorde até hoje é o polinômio de Euler $E(x) = x^2+x+41$, que tem valores primos para $x = 0, 1, 2, ..., 40$. E vejamos como este descreve uma diagonal da Espiral de Ulam:

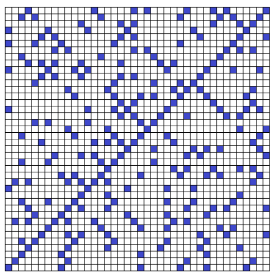
Figura 2.4: Destaque do polinômio de Euler



Fonte: math.osu.edu/sites/math.osu.edu/files/EulerPrimeGeneratingPolynomial.pdf

O padrão descoberto por Ulam em sua espiral é tão interessante que mesmo que o número inicial escrito no centro da folha não seja 1, os números primos tendem a se concentrar em diagonais. Por exemplo, se escrevermos o número 41 como inicial temos a seguinte figura:

Figura 2.5: Espiral de Ulam iniciando em 41



Fonte: sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=171053354

Há uma quantidade enorme de perguntas a serem feitas em torno desses padrões.Tais como:
Alguma dessas diagonais descreve certa classe especial de primos como primos gêmeos, primos de Sophie Germain etc?
Podemos descrever polinômios $p(x)$ que geram números primos para $x = 0, 1, 2, ..., k$?
A espiral de Ulam é a melhor figura para encontrar padrões em primos?

A partir do trabalho de Ulam, outras figuras foram propostas para estudar possíveis padrões, podemos citar como exemplo a Espiral de Sacks e os Triângulos de Klauber.

Existe uma boa quantidade de material na internet sobre este tema. Deixamos aqui algumas referências logo abaixo e incentivamos fortemente que o leitor faça sua própria busca por “Espiral de Ulam"ou em inglês “Ulam Spiral"no Google. Além disso no YouTube, há vídeos maravilhosos sobre esse assunto, muito deles com legenda.

[1] Pedroza, Paulo. Distribuição de Números Primos, Padrões Gráficos e a Espiral de Ulam sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=171053354

[2] F., D. C. d. M.; ROCHA, L. S. *Enrolando os primos dos primos de nossos primos*. Revista do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, n. 98, p. 28?32, 2019.

[3] Issac Smith; Ohio State University; math.osu.edu/sites/math.osu.edu/files/EulerPrimeGeneratingPolynomial.pdf acessado em 01/03/2021

[4] Wikipedia: A espiral de Ulam pt.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Ulam acessado em 01/03/2021

[5] Blog Zeletron; zeletron.com.br/2013/07/primos-na-espiral-de-ulam.html acessado em 01/03/2021

[6] Blog LeGauss; legauss.blogspot.com/2009/03/espiral-de-ulam.html acessado em 01/03/2021

3. Indicações de Leituras/Filmes

Touch - Visões do Futuro

Por Maria Clara Rosa [2]

Criada por Tim Kring e protagonizada por Kiefer Southerland, a série Touch foi transmitida pela FOX nos anos de 2012 e 2013, quando foi cancelada após duas temporadas, encontrando-se disponível atualmente em adorocinema.com e outros *sites*.
Martin Bohn (Kiefer Southerland) é um ex-jornalista, viúvo, que tenta criar seu filho Jake (Davis Mazouz) sozinho. Com 11 anos Jake nunca disse sequer uma palavra, e além do seu diagnóstico de autismo não permite que ninguém o toque, tornando dificultosa a comunicação com seu pai.
Apesar do papel principal ser de seu pai, o que chama atenção na série é o modo como Jake tenta se comunicar, a maneira pela qual ele vê o mundo: através de números. Graças à sua obsessão por sequências e padrões conseguimos encontrar em alguns episódios a sequência de Fibonacci, cujo padrão está ligado à proporção áurea. Além disso, o menino possui um dom, que gira em torno do Efeito Borboleta: uma ação, por menor que seja, pode culminar em eventos catastróficos no outro lado do mundo e alterar o destino de desconhecidos. Jake enxerga essa ligação e assim tenta fazer com que essas ações tenham sempre um efeito benéfico.

Fonte: Imagem extraída do site kress.de.

[2]Discente do Curso Licenciatura em Matemática da UFRPE / Monitora Bolsista do É Matemática, Oxente! em 2020

Graças aos números, Martin começa a se comunicar com Jake e a tentar traduzi-lo, ajudando-o a manipular as ações das pessoas para sempre gerar resultados uma perspectiva positiva. Embora tenha sido cancelada, a série vale cada minuto assistido uma vez que traz uma nova aventura a cada episódio.

4. Quem pergunta, quer saber!

Cuidado com a contextualização

Por Severino Barros de Melo[3]

A Revista do Professor de Matemática (RPM) no seu número 52 (2002, p.53) respondendo ao pedido de um leitor, faz um alerta quantos aos cuidados que se deve ter com a contextualização nos problemas de matemática.
Um leitor pergunta: qual a solução do problema abaixo, apresentado numa palestra para professores?
Considere uma classe de 27 alunos e que a nota média de uma prova realizada por esses alunos tenha sido 1,875. Sabendo que as notas foram dadas de 0,25 em 0,25, qual é o número máximo de alunos que podem ter conseguido 3,75, uma vez que apenas dois alunos conseguiram a nota mais alta, que foi 4,25?

Resposta da RPM:

O problema com esses dados não tem solução. Vejamos porque. Vamos chamar as notas dos alunos de $n_1, n_2, ..., n_{27}$

$$\frac{n_1 + n_2 + ... + n_{25} + 4,25 + 4,25}{27} = 1,875$$
$$\Rightarrow n_1 + n_2 + ... + n_{25} + 4,25 + 4,25 = 42,125$$

Mas todas as notas são múltiplos inteiros de 0,25; isto é, a soma no primeiro membro é um múltiplo inteiro de 0,25, enquanto, no segundo membro 42,125 não é um múltiplo inteiro de 0,25. Logo, a situação descrita é impossível.

[3]Professor do Departamento de Educação da UFRPE

5. Eventos

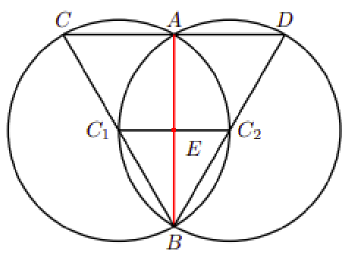
Devido à pandemia do coronavírus a agenda de eventos está suspensa, uma vez que a maioria deles, se não todos, estão cancelados por tempo indeterminado ou estão ocorrendo na modalidade virtual sendo divulgados à medida que ocorrem. Para conferir alguns eventos que estão ocorrendo de forma on-line acessem https://mathseminars.org/ e fiquem atentos às diversas redes sociais das instituições.

6. Problemas

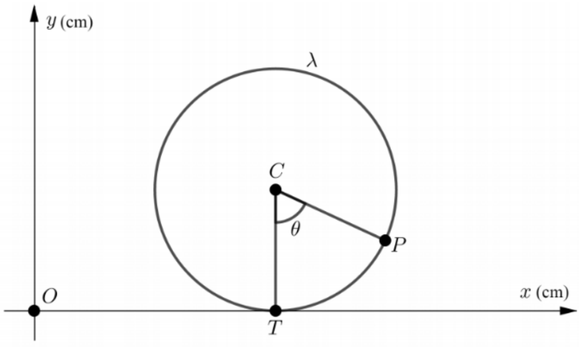
Para concluir deixamos para o leitor alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Problema 1 (OBMEP-2011). Quantos números naturais de cinco algarismos têm o produto de seus algarismos igual a 2000?

Problema 2 (31ª OCM – Nível 3). Considere duas circunferências de centros C_1 e C_2, respectivamente, conforme figura, que se intercetam nos pontos A e B. Traça-se o segmento de reta CD que passa pelo ponto A e é paralelo ao segmento de reta C_1C_2, onde C é o ponto de interseção com a circunferência de centro C_1, e D é o ponto de interseção com a outra circunferência. Seja E o ponto de interseção de AB com C_1C_2. Mostre que a área do triângulo BCD é 4 vezes a área do triângulo BC_1C_2.



Problema 3 (OCZM 2018 – Nível 2)**.** Considere a figura abaixo, na qual é apresentada uma circunferência λ, de centro C e raio $5cm$ em um sistema cartesiano de origem O.



Sabendo que λ é tangente ao eixo das abcissas no ponto $T = (10, 0)$, que $P \in \lambda$ e que θ é a medida do ângulo $\angle TCP$, encontre a distância da origem O ao ponto P, em função de θ.

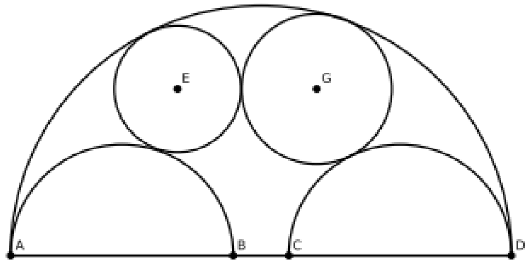
Mandem soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, sua solução deve ser enviada até **01/06/2021**.

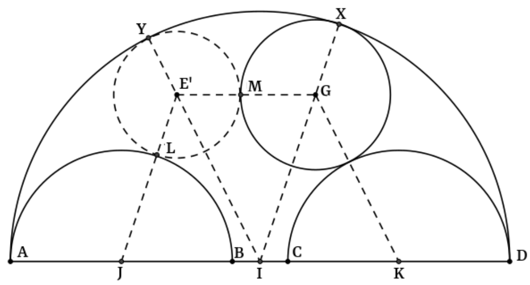
7. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n.16, Setembro de 2020**.

Problema 1 (OMEB 2015 – Nível 2)**.** Na figura a seguir, o círculo de centro E e raio r_1 é tangente aos semicírculos de diâmetros AB e AD. O círculo de centro G e raio r_2 é tangente aos semicírculos de diâmetros CD e AD. Sabendo que $AB = CD = 2r$, $AD = 2R$ e que os dois círculos são também tangentes, prove que $r_1 + r_2 = R - r$.



Solução. Sejam I, J e K os centros dos semicírculos de diâmetros AD, AB e CD, respectivamente. Considere os pontos E' e X de modo que $E'G$ seja igual e paralelo a IK e que X seja a interseção do semicírculo de diâmetro AD e o prolongamento do segmento IG.



Como o círculo de centro G é tangente ao semicírculo de diâmetro AD temos

$$GI = IX - GX = R - r_2$$

Sendo M, L e Y os pontos de interseção dos segmentos $E'G$, $E'J$ e o prolongamento do segmento IE' com o círculo de centro G semicírculo de diâmetro AB e o semicírculo de diâmetro AD, respectivamente. Uma vez que $E'G = IK = IJ$ e esses três segmentos são paralelos, temos que $\triangle E'JI \equiv \triangle E'IG \equiv \triangle GIK$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} E'M &= E'G - MG \\ &= IK - r_2 \\ &= (ID - KD) - r_2 \\ &= R - r - r_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E'L &= E'J - JL \\ &= GI - r \\ &= (R - r_2) - r \end{aligned}$$

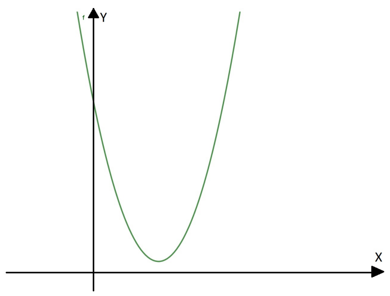
$$\begin{aligned} E'Y &= IY - E'I \\ &= R - GK \\ &= R - (r_2 + r) \end{aligned}$$

Consequentemente o círculo de centro E' e raio $R - r - r_2$ é tangente aos círculos de centro G e aos semicírculos de diâmetros AB e AD. Como só pode existir um círculo com essa característica, segue que $E' = E$ e que

$$r_1 = R - r - r_2 \Rightarrow r_1 + r_2 = R - r$$

□

Problema 2. Seja f uma função real dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, cujo gráfico é representado a seguir.



Mostre que $-2\sqrt{ac} < b < 2\sqrt{ac}$ e que $b < 0$.

Solução. Como f é uma função quadrática, cujo gráfico tem concavidade para cima e corta o eixo das ordenadas acima do eixo das abscissas segue a e c são positivos, respectivamente. Notemos ainda que como gráfico de f não corta o eixos das abscissas a função não possui raízes reais, logo $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Dessa forma, $b^2 < 4ac$. Pela positividade de a e c, temos que $|b| < 2\sqrt{ac}$, ou ainda, $-2\sqrt{ac} < b < 2\sqrt{ac}$.

Agora observe que na figura o vértice da parábola encontra-se no primeiro quadrante do plano cartesiano, portando, sua abscissa, que é dada por $x_v = -\dfrac{b}{2a}$, é positiva. Como $a > 0$, consequentemente, $b < 0$. □

Problema 3 (36ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA Segunda Fase - Nível 3 (Ensino Médio) OBM-2014)**.** A sequência $a_1, a_2, a_3, \cdots$ satisfaz $a_1 = 1$e $a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 + n}$. Qual é o inteiro mais próximo de a_{2014}?

Solução. Elevando ao quadrado a condição dada, obtemos $a_n^2 = a_{n-1}^2 + n$. Somando tal relação com n variando de 2 até 2014, temos $a_{2014} = a_1^2 + 2 + 3 + \cdots + 2014$. Como $a_1 = 1$ e a sequência é formada apenas por números positivos, segue que $a_{2014} = \sqrt{1 + 2 + \cdots + 2014} = \sqrt{\dfrac{2015.2014}{2}} = \sqrt{2015.1007} \cong 1424,47$. Logo, o inteiro mais próximo de a_{2014} é 1424.

□