
É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 12, volume 1, Setembro de 2019

ISSN 2526-8651

Sumário

1 Artigo	1
Geometria Fractal: alguns “monstros” famosos	1
2 Curiosidades	9
Álgebra Moderna: Quem foi Pedro Nunes?	9
3 Indicações de Leituras/Vídeos	10
Estrelas Além do Tempo	10
4 Quem pergunta, quer saber!	11
Quanto é $1 + 2 + 3 + \dots + 100$?	11
5 Eventos	12
6 Problemas	13
7 Soluções dos Problemas	13

1. Artigo

Geometria Fractal: alguns “monstros” famosos

Anne Albuquerque¹

Marcos Sobral²

¹Mestranda em Matemática na UFF
Niterói - RJ - 24220-900

²Mestrando em Matemática UFMG
Belo Horizonte - MG - Brasil - 31270-901

Introdução

Há muito tempo, observamos na natureza, formas geométricas irregulares, curvas que não são “suaves”, como normalmente supomos nos exercícios de Cálculo. Mais do que isso, tais formas são abundantes e compõem a maioria dos modelos que aparecem na natureza: o contorno da fronteira de um país; flocos de neve; estalactites; um repolho cortado ao meio; os galhos secos de um carvalho; um brócolis romanesco; um raio; e até o Egito visto do espaço. O que essas figuras têm em comum? Todas apresentam algum tipo de **auto-similaridade** e **complexidade infinita**. Isso significa que à medida em que aumentamos a escala de observação, a figura que obtemos preserva, de algum modo, propriedades da original e que conseguimos uma maneira de gerar tal figura, seja por processos determinísticos ou aleatórios.

Fractal, de origem latim, significando “quebrar”, foi o termo utilizado por Benóit Mandelbrot no final do século XX para definir os objetos matemáticos que carregam essas propriedades, tendo ele mesmo criado um fractal muito interessante:

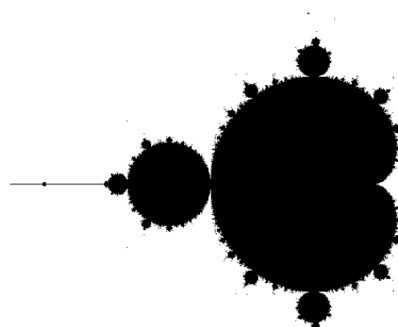


Figura 1: Conjunto de Mandelbrot

Mandelbrot percebeu que o conceito usual de dimensão já não fazia sentido nesses “conjuntos bizarros” (os quais ele apelidou de “monstros”), visto que o número de “irregularidades” é infinito em um fractal, sendo assim não existe um número inteiro que represente a ordem de um conjunto de geradores da figura. A partir desse fato, Mandelbrot reformulou o conceito de dimensão para tais figuras, obtendo números fracionários, o que ficou estabelecido como **dimensão fractal**.

Neste artigo, estudaremos alguns fractais que apresentam auto-similaridade exata, isto é, que ao aumentarmos a escala de observação, a figura obtida é idêntica à original. Esses exemplos são, essencialmente, os que encontramos em questões olímpicas.

Desenvolvimento

Nesta seção, nos dedicaremos ao estudo de quatro exemplos de fractais com auto-similaridade exata, e das relações entre eles.

Curva de Koch

Nesta subseção, falaremos sobre a **Curva de Koch**, cuja criação é designada ao matemático sueco Helge Von Koch e que posteriormente deu origem a Ilha de Koch. Von Koch trabalhou em Teoria dos Números e usou os trabalhos de Poincaré para resolver sistemas de equações diferenciais com coeficientes analíticos. Em 1906, Von Koch publicou um artigo onde ele descreveu geometricamente uma curva contínua mas sem reta tangente em ponto algum, que ficou conhecida como Curva de Koch.

Com relação a construção, tanto a Curva, quanto a Ilha, possuem as mesmas características, o que difere as duas é que a Curva é construída a partir de um segmento de reta e a Ilha, a partir de um triângulo equilátero.

A construção da Curva de Koch se dá através de um processo iterativo e se inicia a partir de um segmento de reta que é dividido em três segmentos iguais. Após isso, substitui-se o terço médio por um triângulo equilátero, retirando-se a base.



Figura 2: Etapas 0 e 1

Este processo será repetido em cada um dos segmentos de reta restantes, e o processo iniciado anteriormente com a divisão do triângulo equilátero sobre o terço médio do segmento é repetido em cada novo segmento de reta formado.



Figura 3: Etapas 2 e 3

À medida que ocorre a construção da Curva, observa-se que, de um nível para o outro, o comprimento total é multiplicado por $\frac{4}{3}$, devido a substituição de três segmentos por quatro de igual comprimento.

O comprimento da Curva aumenta de um nível para o outro, o que significa que ele cresce de forma indefinida. Portanto, para o n -ésimo nível, o comprimento é dado por

$$C_n = C_{n-1} + \frac{C_n}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

e o limite para um número infinito de níveis, por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \infty.$$

Isso evidencia uma característica importante da Curva de Koch (e da Ilha de Koch), que é a existência de um número infinito de “dobras”, que continuam aparecendo indefinidamente à medida que

ocorre a ampliação. Isto ocorre devido a sua complexidade infinita.

Ilha de Koch

Ao contrário da Curva de Koch, a **Ilha de Koch** tem o seu processo de construção iniciado por um triângulo equilátero de lado l , que tem os três lados divididos em três partes iguais.

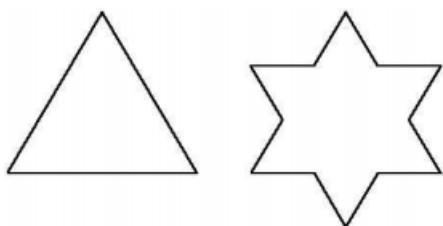


Figura 4: Etapas 0 e 1

Substituindo-se o terço central de cada um dos lados dos triângulos por um triângulo equilátero, após retirar a base, obtém-se uma estrutura formada por três conjuntos de quatro partes com comprimento $\frac{1}{3}$, cada um.

Repetindo esse processo para cada um dos 12 segmentos obtidos e prosseguindo de forma indefinida para os consecutivos níveis, obtemos a Ilha de Koch.

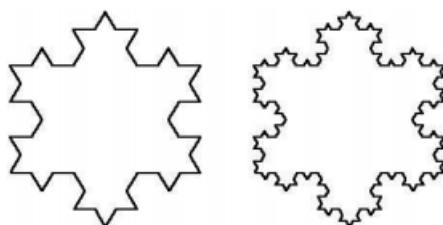


Figura 5: Etapas 2 e 3

A expressão da área para o n -ésimo nível da ilha de Koch será

$$A_n = A_0 + l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} \sum_{i=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1}$$

onde A_0 é a área do triângulo inicial. Se fizermos $n \rightarrow \infty$, o somatório acima torna-se uma série geométrica de razão $q = \frac{4}{9}$, onde

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1} = \frac{9}{5}.$$

Deste modo, para infinitos níveis da Ilha de Koch, o limite da área A_n é

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{2}{5} \sqrt{3} l^2.$$

Note que a Ilha é obtida construindo-se uma Curva de Koch em cada lado do triângulo inicial! Isso mostra que o perímetro da Ilha também é infinito. A saber, temos uma expressão para o perímetro da Ilha na n -ésima etapa

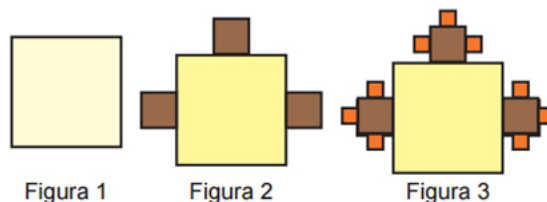
$$C_n = 3 \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

e isso garante que o perímetro é infinito.

A Ilha de Koch pode ser construída a partir de qualquer polígono regular, através do processo de construção de uma Curva de Koch em cada lado do polígono. No entanto, a sua forma mais conhecida é a apresentada aqui, devido à semelhança com um floco de neve.

Exemplo 1. ([6]-UnB) A Geometria Fractal é uma linguagem criada pelo matemático polonês Benoît Mandelbrot, no começo da década de 50. Mandelbrot criou essa geometria após observar padrões surgidos em diversas áreas, tais como na estrutura do ruído das comunicações telefônicas, na flutuação dos preços em operações do mercado financeiro e no estudo empírico da geometria dos litorais.

As figuras abaixo ilustram os três primeiros passos da construção de um fractal a partir de um quadrado de lado L , sendo que a figura 2 representa o padrão desse fractal.



O procedimento pode ser escrito da seguinte maneira:

- **Passo 1:** Considere o quadrado representado na figura 1.

- **Passo 2:** Dividindo-se três lados desse quadrado em três partes iguais, constroem-se três outros quadrados, conforme ilustra a figura 2.
- **Passo 3:** Repetindo-se o processo com os três quadrados obtidos no passo 2, obtêm-se nove outros quadrados, conforme ilustra a figura 3.

O processo pode ser repetido um número qualquer de vezes.

Considerando $L = 5\text{ cm}$, determine, em cm^2 , a área total da figura obtida no oitavo passo. Despreze a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

- a) 35 b) 37 c) 39 d) 41 e) 43

Solução. Seja A_n a área desse fractal na n -ésima etapa da sua construção. Então $A_1 = 5^2$. Seja a_n a área de um quadrado introduzido na n -ésima etapa. Então $q_1 = 0$ e $q_2 = (\frac{5}{3})^2$. Assim $A_2 = 5^2 + 3 \cdot (\frac{5}{3})^2$. Suponha, por hipótese de indução, que na n -ésima etapa foram introduzidos 3^n novos quadrados de lado $\frac{5}{3^n}$ e que a área do fractal é dada por

$$A_n = \sum_{i=0}^n 3^i \left(\frac{5}{3^i}\right)^2.$$

Então, na $(n + 1)$ -ésima etapa, introduziremos $3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$ novos quadrados de lado $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3^n} = \frac{5}{3^{n+1}}$, donde

$$A_{n+1} = A_n + 3^{n+1} \cdot \left(\frac{5}{3^{n+1}}\right)^2 = \sum_{i=0}^{n+1} 3^i \left(\frac{5}{3^i}\right)^2.$$

Portanto na oitava etapa a área será

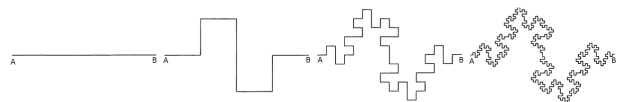
$$A_8 = \sum_{i=0}^8 3^i \left(\frac{5}{3^i}\right)^2 \simeq 37.3942$$

Logo, a resposta é 37, item (b).

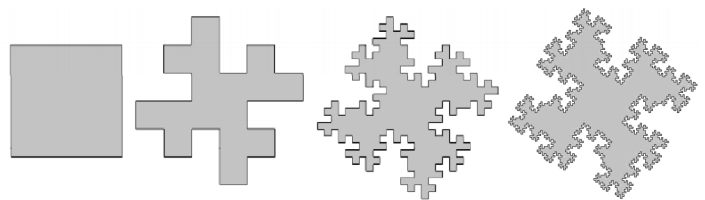
Exemplo 2. (OPEMAT - 2018 - Nível 3) A curva de Minkowski é um fractal que possui várias aplicações industriais. Sua forma, por exemplo, é utilizada na construção de antenas compactas para recepção de conexões sem fio (wireless) para celulares. Tal curva é construída por meio de um processo iterativo infinito da seguinte forma:

- Divida um segmento horizontal \overline{AB} medindo L unidades de comprimento em quatro segmentos de medidas iguais.
- Construa um quadrado com lado $\frac{L}{4}$ unidades de comprimento acima do segundo segmento, tendo este como um de seus lados, construa outro quadrado com lado de mesma medida abaixo do terceiro segmento, tendo este como um de seus lados e remova o segundo e terceiro segmentos.
- A partir da segunda iteração repetimos esse processo para cada um dos segmentos de mesma medida formados na iteração anterior.

As três primeiras iterações podem ser vistas na figura abaixo:



Se iniciarmos com um quadrado de lado L e para cada lado do quadrado repetimos a construção descrita acima, obteremos a chamada ilha de Minkowski. As três primeiras iterações podem ser observadas na figura abaixo.



Com base nas construções acima, analise as afirmações a seguir e marque (V) se a afirmação for verdadeira e (F) se a afirmação for falsa.

- A** - (V) (F) A diferença entre os comprimentos das poligonais obtidas na quarta e terceira iteração da curva de Minkowski é $2L$ unidades de comprimento.
- B** - (V) (F) A área da ilha de Minkowski é igual a L^2 unidades de área.

- C** - (V) (F) Se $L = 1$ unidade de comprimento, o perímetro da ilha de Minkowski é maior do que 1 milhão de unidades de comprimento.
- D** - (V) (F) A distância do ponto mais alto da curva de Minkowski ao segmento \overline{AB} é L^3 unidades de comprimento.
- E** - (V) (F) A área da região localizada abaixo da curva de Minkowski e acima do segmento \overline{AB} mede $\frac{L^2}{8}$ unidades de área.

Solução.

- A** - (F) Observe que a cada iteração, a medida de cada segmento é $1/4$ da medida do segmento anterior e a quantidade de segmentos é 8 vezes a quantidade de segmentos da iteração anterior. Assim, o comprimento das poligonais na terceira e quarta iterações são respectivamente $512 \cdot \frac{L}{64} = 8L$ unidades de comprimento e $4096 \cdot \frac{L}{256} = 16L$ unidades de comprimento, portanto a diferença é igual a $8L$ unidades de comprimento.
- B** - (V) Observe que em cada iteração a área retirada corresponde a área adicionada, portanto a área se mantém constante.
- C** - (V) Observe que a cada iteração, o comprimento da poligonal dobra de tamanho. Assim, o comprimento da curva de Minkowski é infinito.
- D** - (V) Perceba que a cada iteração, a distância entre o ponto mais alto e o segmento \overline{AB} aumenta de acordo com uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$ e primeiro termo $\frac{L}{4}$. Sendo h a medida da altura do ponto mais alto da curva de Minkowski em relação ao segmento \overline{AB} , temos

$$h = \frac{\frac{L}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{L}{3} \text{ unidades de comprimento.}$$

- E** - (F) Perceba que a cada iteração, a área da região localizada abaixo da poligonal e acima

do segmento \overline{AB} aumenta de acordo com uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{8}$ e primeiro termo igual a $(\frac{L}{4})^2$. Sendo S a medida da área da região abaixo da curva de Minkowski e acima do segmento \overline{AB} , temos

$$S = \frac{\frac{L^2}{16}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{L^2}{14} \text{ unidades de área.}$$

Tapete de Sierpiński

O matemático polonês Waław Sierpiński deu grandes contribuições em Teoria dos Conjuntos, Teoria das Funções, Teoria dos Números e Topologia, tendo publicado 724 artigos e 50 livros durante sua vida acadêmica. Em 1949, Sierpiński recebeu o *Poland's Scientific Prize*, o consolidando como um dos maiores cientistas de sua época. Popularmente, ele ficou conhecido por alguns objetos matemáticos que levam o seu nome, dentre eles, os fractais: Triângulo de Sierpiński; Curva de Sierpiński; e o **Tapete de Sierpiński**.

Para construir o Tapete, começamos com um quadrado de lado 1 e dividimos cada lado em 3 segmentos de mesmo comprimento, conseqüentemente, dividindo o quadrado em 9 subquadrados idênticos. Para finalizar a primeira etapa da construção, retiramos o subquadrado central.

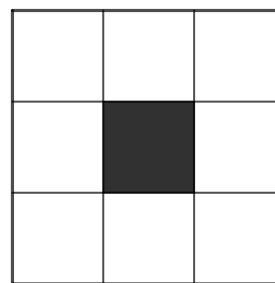


Figura 6: Etapa 1

Agora repetimos o processo em cada subquadrado restante da primeira etapa e seguimos indefinidamente. O Tapete de Sierpiński é a figura resultante desse processo recursivo.

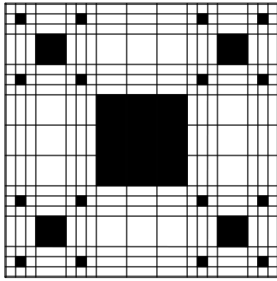


Figura 7: Etapa 3

Para calcular a área e o perímetro do Tapete, precisamos saber dessas medidas na n -ésima etapa e como o fractal é a figura-limite desses processos, a área e o perímetro serão dados pelos respectivos limites dessas medidas.

Na primeira etapa, restaram 8 quadrados de lado $\frac{1}{3}$. Na segunda etapa, restaram 8^2 quadrados de lado $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$. Indutivamente, é possível mostrar que na n -ésima etapa restarão 8^n quadrados de lado $\frac{1}{3^n}$.

Como, cada quadrado tem área $\frac{1}{3^{2n}}$, a n -ésima área é dada por $A_n \doteq 8^n \frac{1}{3^{2n}} = \frac{8^n}{9^n}$.

Respectivamente, na primeira etapa restaram $S_1 \doteq 20$ segmentos de comprimento $\frac{1}{3}$. Na segunda etapa, restaram $S_2 \doteq 20 + 8^2 = 84$ segmentos de comprimento $\frac{1}{3^2}$. Indutivamente, é possível mostrar que na n -ésima etapa restarão $S_n \doteq S_{n-1} + 8^n = 11 + 1 + 8 + 8^2 + 8^3 + \dots + 8^n$ segmentos de comprimento $\frac{1}{3^n}$. Logo, o n -ésimo perímetro será

$$P_n \doteq \frac{1}{3^n} S_n = \frac{1}{3^n} \left(11 + \sum_{i=0}^n 8^i \right).$$

Portanto, a área do Tapete será $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^n}{9^n} = 0$ e o perímetro será

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} \left(11 + \sum_{i=0}^n 8^i \right) = \infty.$$

A área ser nula mostra um fato importante sobre o Tapete de Sierpiński: não existe uma bola aberta em \mathbb{R}^2 formada só por pontos do Tapete, pois caso contrário, a área seria positiva! Na verdade, o que temos visto é que essa figura é uma generalização “2D” do Conjunto de Cantor!

Exemplo 3. (OPEMAT - 2016 - Nível 3) Um tapete de Sierpiński pode ser construído da seguinte forma: A partir de um quadrado de lado 1 dividimos cada lado em k partes iguais onde k é ímpar e maior ou igual a 3, dividindo assim o quadrado de lado 1 em k^2 subquadrados iguais. Remova o subquadrado central. Agora divida cada um dos subquadrados restantes novamente em k^2 subquadrados iguais e novamente remova os subquadrados centrais. Repita o processo em cada um dos novos subquadrados restantes e assim por diante. O tapete de Sierpiński é a figura que sobra após a remoção dos subquadrados em cada etapa. Qual a área do tapete de Sierpiński?

Solução. Seja A_n a área do tapete na n -ésima etapa de sua construção. Então $A_0 = 1$. Na primeira etapa, restaram $k^2 - 1$ quadrados de lado $\frac{1}{k}$, logo $A_2 = (k^2 - 1) \left(\frac{1}{k}\right)^2$. Suponha, por hipótese de indução, que na n -ésima etapa restaram $(k^2 - 1)^n$ quadrados de lado $\frac{1}{k^n}$. Então, para a $(n + 1)$ -ésima etapa, dividiremos cada quadrado da n -ésima etapa em k^2 quadrados e retiramos o central, ou seja, serão $k^2 - 1$ subquadrados em cada um deles, donde serão, ao todo, $(k^2 - 1)(k^2 - 1)^n = (k^2 - 1)^{n+1}$ quadrados na $(n + 1)$ -ésima etapa, cada um dos quais com lado $\frac{1}{k} \frac{1}{k^n} = \frac{1}{k^{n+1}}$. Logo,

$$A_{n+1} = (k^2 - 1)^{n+1} \left(\frac{1}{k^{n+1}} \right)^2.$$

Portanto, por indução temos, para todo $n \geq 0$,

$$A_n = (k^2 - 1)^n \left(\frac{1}{k^n} \right)^2 = \left(\frac{k^2 - 1}{k^2} \right)^n.$$

Como $\frac{k^2-1}{k^2} < 1$, quando $n \rightarrow \infty$, temos $A_n \rightarrow 0$. Assim, a área do tapete é 0.

Esponja de Menger

O matemático Karl Menger obteve resultados importantes na Teoria dos Jogos, no Paradoxo de São Petesburgo, nas Ciências Sociais e na Filosofia. Mas sua grande contribuição foi a fundação, em parceria com o matemático Arthur Cayley (o

mesmo Cayley que conhecemos na Álgebra Linear) de uma das mais relevantes subáreas da matemática moderna: a Geometria das Distâncias, que consiste em estudar conjuntos de pontos baseando-se apenas nas distâncias dadas entre eles. Em 1926, ele descreveu uma generalização “3D” do Conjunto de Cantor, que ficou conhecida como **Esponja de Menger**. Considere um cubo de lado um.

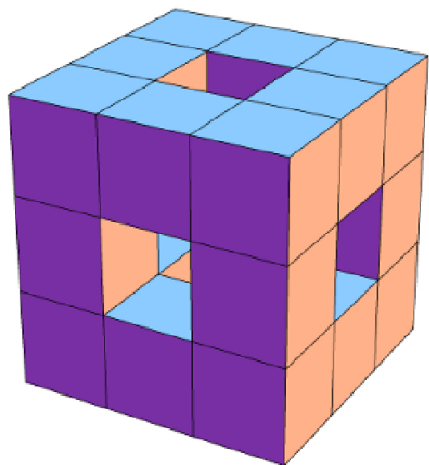


Figura 7: Etapa 1

Basicamente, o processo de construção da Esponja, limita-se a obter um Tapete de Sierpiński em cada face do cubo, com o detalhe de que em vez de apenas remover subquadrados das faces, removem-se os subcubos, cujas faces são os subquadrados dos Tapetes. A Esponja de Menger será o conjunto-limite dessa construção.

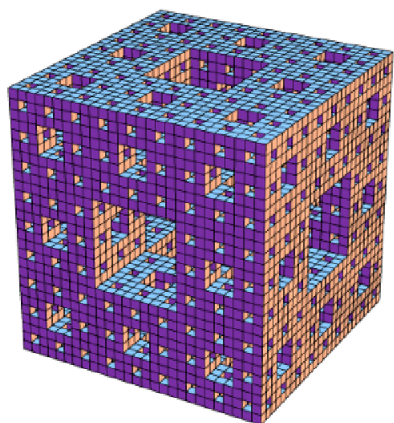


Figura 8: Etapa 3

Novamente, para saber o volume e a superfície (que na verdade é a área total) da Esponja, basta saber essas medidas na n -ésima etapa e tomar o limite

quando n tende ao infinito.

Já vimos que o perímetro do Tapete de Sierpiński é infinito. Do mesmo modo, é possível mostrar que a superfície da Esponja de Menger também será infinita. Além disso, também obtemos o volume, por um argumento análogo ao da subseção anterior:

Na primeira etapa, restaram 20 cubos de lado $\frac{1}{3}$. Na segunda etapa, restaram 20^2 cubos de lado $\frac{1}{3^2}$. Indutivamente, mostramos que na n -ésima etapa, restarão 20^n cubos de lado $\frac{1}{3^n}$, donde o volume na n -ésima etapa é $V_n \doteq 20^n \frac{1}{3^{3n}} = \frac{20^n}{27^n}$. Portanto, o volume da Esponja é $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20^n}{27^n} = 0$.

Isso mostra que a Esponja de Menger tem a seguinte propriedade: não existe uma bola aberta em \mathbb{R}^3 formada só por pontos da Esponja, pois caso contrário o volume seria positivo. Portanto, tanto o Conjunto de Cantor, quanto o Tapete de Sierpiński, quanto a Esponja de Menger têm interior vazio, isto é, compartilham da mesma propriedade de não existir uma bola aberta formada apenas por pontos dos respectivos conjuntos! Esse trio também compartilha várias outras propriedades importantes, como densidade (por exemplo, qualquer vizinhança de um ponto do cubo tem um ponto da Esponja!) e compacidade (qualquer sequência de pontos da Esponja, possui uma subsequência que converge para um ponto da Esponja!).

A Geometria Fractal é uma área bastante promissora da Matemática. Algebristas, analistas e geômetras têm usado suas ferramentas para o estudo dos fractais, tendo como objeto de pesquisa, inclusive, o conceito de dimensão fractal (ver [3]). Devido ao fato de ser uma das mais recentes áreas da Matemática, o número de problemas olímpicos com esse tema é limitado.

Problemas Propostos

Problema 1. ([1]-UFPA-2005 Modificada) A Figura 2 abaixo é comumente reconhecida como um “fractal” (onde pequenas partes são cópias reduzidas do todo) e é constituída por uma infinidade de cír-

culos de raios cada vez menores. Sua construção é dada a seguir.

A partir de um triângulo equilátero ABC , cujo lado tem comprimento L , considere a circunferência nele inscrita.

- A reta paralela ao lado \overline{BC} e tangente à circunferência inscrita intersecta o lado \overline{AB} no ponto D e o lado \overline{AC} no ponto E , formando um novo triângulo equilátero ADE .
- Fazendo construções equivalentes para os lados \overline{AC} e \overline{AB} , determinamos dois novos triângulos equiláteros BFG e CHI .
- Para cada um dos triângulos ADE , BFG e CHI , repetimos o processo acima, obtendo três novas circunferências inscritas e nove triângulos menores.

Esse processo pode ser repetido indefinidamente, gerando círculos cada vez menores e formando a Figura 2.

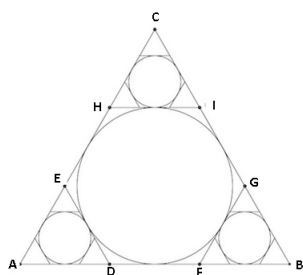


Figura 1

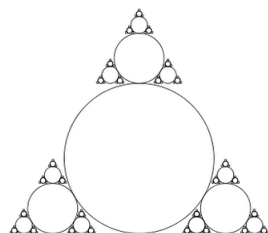


Figura 2

- Mostre que o raio do círculo inscrito num triângulo equilátero é igual a um terço da altura do triângulo.
- Calcule a área do primeiro círculo construído e a área de um dos círculos menores da Figura 1.
- Determine a soma das áreas dos círculos congruentes gerados na etapa n .
- As somas das áreas dos círculos congruentes (de mesmo raio), em ordem decrescente, formam uma progressão geométrica. Calcule a soma dos infinitos termos dessa progressão.

Problema 2. ([2]-Karl Menger, General Spaces and Cartesian Spaces - Second Communication to the Amsterdam Academy of Sciences) Seja M_0 o cubo unitário em \mathbb{R}^3 . Seja M_{n+1} o conjunto dos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que

- $\exists i, j, k \in \{0, 1, 2\}$ tais que $(3x - i, 3y - j, 3z - k) \in M_n$;
- pelo menos um dos i, j, k é igual a 1.

Mostre que a Esponja de Menger é igual a

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} M_n.$$

Problema 3. ([5]-Portal da Matemática-OBMEP) O triângulo de Sierpiński, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

- Comece com um triângulo (primeira figura abaixo);
- Construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
- Posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice em comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura central abaixo;
- Repita sucessivamente os passos II e III para cada cópia dos triângulos obtidos no passo III.



Analisando o padrão da representação, pergunta-se:

- quantos triângulos pretos há no próximo termo da sequência (quarto termo)?
- quantos triângulos pretos há no quinto termo da sequência?

- c) qual a fórmula geral para o cálculo da quantidade n do termo a_n ?
- d) qual a soma da quantidade de triângulos pretos dos 10 primeiros termos dessa sequência?

Referências

- [1] <http://clubes.obmep.org.br/blog/problemao-fractal-e-area/> Acessado em 01/08/2019;
- [2] ASSIS, T.A, MIRANDA, J. G. V, MOTA, F. B, ANDRADE, R. F. S, CASTILHO, C. M. C., *Geometria Fractal: propriedades e características de fractais ideais*, Revista Brasileira de Ensino de Física, 2008;
- [3] EDGAR, GERALD A., *Classics on Fractals*, Studies in Nonlinearity, Westview, 2004;
- [4] GRONAU, H., LANGMANM, H., SCHLEICHER, D., *50th IMO - 50 Years of International Mathematical Olympiads*, Springer, 2010;
- [5] OBMEP, *Módulo de Progressões Geométricas*, Portal da Matemática, 1ª Série E. M.;
- [6] <https://www.tutorbrasil.com.br/forum/viewtopic.php?t=48785> Acessado em 01/08/2019.

2. Curiosidades

Álgebra Moderna: Quem foi Pedro Nunes?

Por Cícero Monteiro de Souza ¹



Pedro Nunes

No início do século XVI a matemática em Portugal já não se ocupava apenas em resolver problemas de navegação. A aritmética e a álgebra começavam a florescer em terras lusitanas, quando surgiu aquele que daria uma nova perspectiva nos rumos dessa ciência. O nascimento de Pedro Nunes, em 1502, iria pouco tempo depois colocar o reino português entre as mais desenvolvidas nações daquele século. Pedro Nunes iniciou seus estudos, ainda muito jovem em Lisboa, e em 1520 já estava matriculado na Universidade de Salamanca, uma das conceituadas da época. Retornou a Portugal em 1525, no mesmo ano foi nomeado cosmógrafo do reino e se tornou o primeiro professor de matemática da Universidade de Coimbra.

Como cosmógrafo foi responsável pelo aperfeiçoamento de técnicas de navegação e criação de vários equipamentos náuticos. Em 1537, no início de sua carreira, publicou o Tratado da Sphera, uma obra didática que viria a se tornar indispensável no curso de navegação, cujo conteúdo abrange temas como: Geometria da esfera, teoria do movimento do sol e da lua, a geografia de Cláudio Ptolomeu e o tratado em defesa da carta de marear. Foi contemporâneo de vários matemáticos portugueses a exemplo de D. João de Castro (1500 -1548), André de Avelar (1546 - 1625), Bento Fernandes (publicou o Tratado da Arte D'Arismetica, em 1555), Álvaro Tomaz, Gaspar Nicolas, dentre outros, mas nenhum deles pode ser comparado a sua genialidade.

Sem sombra de dúvida a maior contribuição de Pedro Nunes foi na navegação. Como cosmógrafo do reino escreveu várias obras voltadas à solução de problemas de Astronomia e navegação. Mas, para isso foi necessário o conhecimento das ciências físicas e matemáticas, o que acabou por fazer dele um grande geômetra e algebrista.

Contribuições para a álgebra

Em sua principal obra O Libro de Algebra em Arithmetica y Geometria, publicada na Antuérpia em 1567, Pedro Nunes apresenta 110 problemas resolvidos de aritmética e 77 de geometria em seus

¹Professor do Departamento de Matemática da UFRPE

dois últimos capítulos. Essa obra é dividida em três partes: a primeira trata da resolução das equações do 1º e 2º grau, a segunda do cálculo algébrico, do cálculo dos radicais e a teoria das proporções, na terceira parte desenvolve a teoria das equações. Fato relevante é o uso pela primeira vez de uma notação literal utilizando letras independentes de considerações geométricas; ou seja, as letras auxiliavam o raciocínio numérico. Em seu estudo sobre as equações do 3º grau faz uma análise cuidadosamente a obra de Tartaglia (1499-1557) e apresenta exemplos de utilização de uma regra para se obter soluções de equações racionais (com raízes racionais) não tratadas por Tartaglia. Sua proposição de um novo método para baixar o grau das equações inspirou Stevin (1548-1620) na extensão aos polinômios do algoritmo de Euclides e no cálculo do máximo divisor comum de dois números.

Essa obra tornou-se muito conhecida na Europa, teve traduções em francês e latim e pelo número de citações verifica-se que Pedro Nunes tornou-se muito conhecido entre os matemáticos Europeus a exemplo de Stevin, Wallis (1616-1703) e Adrien Van Roomen (1561-1615), dentre outros. Roomen, por exemplo, afirma que seu método numérico para procurar raízes de equações foi inspirado nele. Para H. Bosmans (1852-1928), ... Pedro Nunes foi um dos algebristas mais eminentes do século XVI.

Em 1580, dois anos após sua morte, Portugal foi anexado à Espanha e a ciência portuguesa entra em declínio. Com o mundo europeu em pleno desenvolvimento científico, seria muito difícil que a obra de um matemático português tivesse o seu valor plenamente reconhecido em detrimento daqueles cuja nação impunha seu pensamento dominante. Em 1591, o matemático francês François Viète (1540-1603) publica a obra intitulada *No artem analytiscam isagoge e, sem se considerar que o "O Libro de Algebra em Arithmetica y Geometria"*, havia sido publicado em 1567, que a linguagem algébrica e os métodos usados por Pedro Nunes são muito semelhantes ao que se utiliza na atualidade, a obra de

Viète é considerada a obra que deu origem a Álgebra Moderna.

Depois de Pedro Nunes não se tem notícias de nenhum matemático de expressão em Portugal, até o século XIX. Somente no século XX Portugal retoma seu papel de destaque na comunidade matemática internacional, graças a Francisco Gomes Teixeira (1851 - 1933), Aureliano de Mira Fernandes (1884 -1958), José Vicente Gonçalves (1896 - 1985), Bento de Jesus Caraça (1901 -1948), dentre outros.

Como astrônomo Pedro Nunes é reconhecido mundialmente por suas descobertas e criações. Como matemático suas teorias caíram no esquecimento. No início do século passado H. Bosmans, um matemático belga começa recuperar sua memória sendo seguido posteriormente por alguns portugueses. Em 1998, foi tema de uma monografia de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática/UFRPE, em 2002, para comemorar os 500 anos do seu nascimento foi publicado a obra Pedro Nunes e a matemática do século XVI. Para nós Pedro Nunes é o pai da Álgebra Moderna.

Referências

- [1] SOUZA, CÍCERO MONTEIRO E PEREIRA, SILVANA LOPES. *Pedro Nunes e a matemática do século XVI*. Recife: Editora da UFRPE, 2002.
- [2] _____. *A influência de Pedro Nunes na navegação portuguesa, na época dos grandes descobrimentos*. In Anais do III Seminário de História da Matemática. Ouro Preto, 1999.
- [3] _____. *As contribuições de Pedro Nunes para a construção da Álgebra Moderna*. In: Anais do IV Seminário de História da Matemática. Natal: Editora da UFRN, 2001, v.1.

3. Indicações de Leituras/Vídeos

Estrelas Além do Tempo

Por Maitê Kulesza ²

²Professora do Departamento de Matemática da UFRPE

O filme *Estrelas Além do Tempo*, 2016, narra a trajetória de três matemáticas: Katherine Coleman Goble Johnson, Dorothy Vaughan e Mary Jackson, que trabalharam no Centro de Computação da NASA, na época NACA, no auge da corrida pela conquista espacial. Todas contribuíram para os cálculos de trajetórias de voo do Projeto Mercury e do Apollo 11 nos anos 1960.

É interessante perceber os impactos da chegada do primeiro IBM 7090, um sistema de processamento de dados, no cálculo de órbitas de entrada e reentrada, como também, no trabalho das mulheres e dos homens que faziam os cálculos da época. Além disso, observa-se a importância da pesquisa e formação continuada para o desenvolvimento da ciência e para a própria manutenção dos empregos. Também pode-se ver como o trabalho coletivo e conjunto é fundamental para a obtenção de melhores resultados.

Vários termos matemáticos são citados durante o filme e, embora muita matemática moderna estivesse sendo usada, em um dado momento, destacasse a necessidade de retornar às teorias consideradas “obsoletas”. Ressaltar a reinvenção da Matemática e a necessidade de revisitar os estudos pioneiros também é um mérito do longa.

O título original do filme é “Hidden Figures”, o qual sugere que a ideia central do mesmo: Dar visibilidade às “figuras escondidas” dessas três mulheres negras que tiveram que enfrentar o racismo e o machismo da época para demonstrar seus talentos. O que anima é que elas conseguiram. Mary Jackson se tornou a primeira engenheira aeroespacial, mulher e negra, da NASA. Dorothy Vaughan foi a primeira supervisora negra em um departamento da NASA e, como especialista em FORTRAN, desempenhou um papel fundamental na fronteira da matemática e da computação. E Katherine Johnson foi a primeira aluna negra na Universidade de West Virginia nos EUA e também a primeira mulher negra a fazer parte do Grupo de Tarefas Espaciais da NASA. Ela é considerada umas das 100 mulheres mais inspira-

doras e influentes da BCC.

Recomendo o filme não somente por retratar a “dor e a delícia” da vida de um(a) cientista, em especial, de matemáticas(os) mas, também, por mostrar o quanto a ciência não está descolada do seu entorno político e social.

4. Quem pergunta, quer saber!

Quanto é $1 + 2 + 3 + \dots + 100$?

Por Severino Barros de Melo³

A secção “quem pergunta quer saber” do *É Matemática Oxente!* Continua divulgando as perguntas elaboradas pelos visitantes do museu *Matematikun* (ver *Oxente* número 11) bem como as respostas dadas pelo matemático Albert Beutelpascher, seu diretor:

Visitante: Quanto é $1 + 2 + 3 + \dots + 100$?

Albert Beutelpascher: Carl Friedrich Gauss, que viveu de 1777 a 1855, foi um gênio desde criança e frequentou em Braunschweig uma escola de ensino fundamental. O professor querendo manter a turma ocupada para conseguir por algum tempo certos momentos de tranquilidade mandou que eles somassem todos os números de 1 a 100. Todos os garotos começaram a suar a camisa e calcular; porém o pequeno Gauss chegou a solução correta num instante. Escreveu em sua lousa e deixou-a sobre o birô dizendo “já encontrei”. Gauss raciocinou que não era necessário somar os números em ordem, mas que poderia fazer uma conta da seguinte maneira: somando 1 com 100 dá 101. Do mesmo modo, a soma do segundo com o penúltimo número da lista, ou seja, $2 + 99$ dá 101. A soma do terceiro com o antepenúltimo, ou seja, $3 + 98$ dá 101. E assim sucessivamente. Sempre resulta 101 até chegar a $50 + 51$. No total temos 50 vezes 101. De modo que o total da soma desses números equivale a 50 vezes 101, ou seja 5050. Como sempre, quando se sabe como funciona tudo parece facilimo. Este é o

³Professor do Departamento de Educação da UFRPE

valor que Gauss escreveu na sua lousa. Verdadeiramente genial! Naturalmente, não se sabe se Gauss já conhecia desde criança uma fórmula para efetuar este cálculo. Porém o truque de Gauss conduz diretamente a uma fórmula que permite calcular, com grande simplicidade, a soma dos n primeiros números inteiros positivos:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = n \frac{(n + 1)}{2}.$$

Aplicando um método parecido se pode calcular outras somas, como por exemplo, a soma dos primeiros números ímpares, a soma dos primeiros números pares, etc. a soma dos primeiros números ímpares é especialmente bonita:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Posteriormente, Gauss adquiriu conhecimentos fundamentais e cruciais sobre teoria dos números. A precoce genialidade de Gauss pode ser interpretada como uma antevisão do seu futuro. Ao que parece, já naquela ocasião apresentava dotes especiais para lidar com os números.

5. Eventos

Vários eventos acontecerão este ano visando uma maior divulgação da matemática.

Fiquem Ligados!!!

- **III Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática**

- Local: Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), Vitória/ES, Brasil
- Data: 5 a 6 de Setembro de 2019
- Mais informações: <https://www.festivalvideomat.com/>

- **XXXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**

- Local: Universidade Federal de Uberlândia- MG
- Data: 16 a 20 de Setembro de 2019
- Mais informações: <http://www.cnmac.org.br/novo/>

- **XIV Semana da Matemática UFRPE**

- Local: Universidade Federal Rural de Pernambuco
- Data: 23 a 28 de Setembro de 2019
- Mais informações: <http://www.semat.dm.ufrpe.br/>

- **II Encontro Regional de Educação Matemática - VII EREM**

- Local: Centro de Ciências Exatas e da Terra- UFRN- Natal
- Data: 03 a 05 de Outubro de 2019
- Mais informações: <https://www.sympia.com.br/vii-encontro-regional-de-educacao-matematica-497058>

- **XII Encontro Paraense de Educação Matemática**

- Local: IFPA-PARÁ
- Data: 16 a 18 de Outubro de 2019
- Mais informações: <http://epaem.sbempara.com.br/>

- **XI Conferência Nacional Sobre Modelagem Na Educação Matemática**

- Local: Universidade Federal de Minas Gerais - Belo Horizonte, MG
- Data: 14 a 16 de Novembro de 2019
- Mais informações: <http://sbembrasil.org.br/eventos/index.php/cnmem/2019>

6. Problemas

Para concluir deixamos para o leitor alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Problema 4. João tem l diamantes, e uma faixa infinita (em ambas as direções) de quadrados está desenhada no chão. Ele então distribui aleatoriamente estes diamantes sobre a faixa. E começa a fazer a seguinte brincadeira, se num determinado quadrado há dois diamantes é permitido pegá-los e passar um para o quadrado anterior e o outro para casa posterior. É possível voltar a configuração inicial após uma quantidade finita desses movimentos?

Problema 5 (OPM – 2005). Mostre que não existe função injetiva $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com a propriedade de que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x^2) - [f(x)]^2 \geq \frac{1}{4}$$

Problema 6 (OBM- 2010-Nível 2). Chamaremos de imagem de um número natural de dois algarismos o número que se obtém trocando a ordem de seus algarismos. Por exemplo, a imagem de 34 é 43. Quais são os números de dois algarismos que somados com sua imagem resultam em um quadrado perfeito?

Mandem soluções dos problemas propostos para o e-mail: ematematicaoxente@gmail.com

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, sua solução deve ser enviada até **04/11/2019**.

7. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n.10, junho de 2019**.

Problema 1 (OBM, 2000). Quantos números inteiros e positivos menores do que 1.000.000 existem cujos cubos terminam em 1?

Solução. Como 1 é ímpar, vamos analisar os termos que são ímpares:

$$1^3 = 1; 3^3 = 27; 5^3 = 125; 7^3 = 343; 9^3 = 729.$$

Queremos os números que tem unidade igual a 1, além disto, é necessário que sejam inteiros menores que 1.000.000. Note que o maior número que atende essas especificidades é 999.991, uma vez que o mesmo é menor que 1.000.000 e de fato seu cubo terá unidade igual a 1.

Tendo em mente o que já foi explicado, queremos então a quantidade de termos do conjunto:

$$\{1, 11, 21, 31, \dots, 999.981, 999.991\}.$$

Observe que o algarismo 1 na unidade se repete a cada 10 números inteiros. Assim dividindo 1.000.000 por 10, obtemos 100.000. Portanto há 100.000 números inteiros positivos, menores que 1.000.000 cujo cubo termina em 1. \square

Problema 2 (OBM-2014 - Nível 2). . Determine o número de soluções com x e y inteiros positivos da equação

$$x^2 - y^2 = 36.$$

Solução. Sabendo que $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, temos que $(x + y)(x - y) = 36$. Observe que como a soma de $x + y$ e $x - y$ é par, ou ambos são pares, ou ambos são ímpares, uma vez que 36 é par, logo ambos são pares, assim podemos escrever,

$$\frac{x + y}{2} \cdot \frac{x - y}{2} = 9.$$

Como 9 possui apenas $\{1, 3, 9\}$ como divisores, e sabendo que $\frac{x+y}{2} > \frac{x-y}{2} > 0$, podemos concluir que

$$\frac{x + y}{2} = 9; \frac{x - y}{2} = 1.$$

Utilizando sistema, obtemos

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ x - y = 2 \end{cases},$$

daí,

$$2x = 20$$

$$x = 10$$

$$y = 8$$

Logo a solução é $(x, y) = (10, 8)$. Portanto só há uma solução para a equação. \square

Problema 3 (OBM-2005 - Nível 3). No campeonato tumboliano de futebol, cada vitória vale três pontos, cada empate vale um ponto e cada derrota vale zero ponto. Um resultado é uma vitória, empate ou derrota. Sabe-se que o Flameiras não sofreu nenhuma derrota e tem 20 pontos, mas não se sabe quantas partidas esse time jogou. Quantas sequências ordenadas de resultados o Flameiras pode ter obtido? Representando vitória por V, empate por E e derrota por D, duas possibilidades, por exemplo, são (V, E, E, V, E, V, V, V, E, E) e (E, V, V, V, V, V, E, V).

Solução. Sejam x e y o número de vitória e empate do Flameiras, respectivamente. Temos que $x \geq 0, y \geq 0$ e $3x + y = 20$. Dividindo em 7 casos possíveis, temos:

1° caso: $x = 0$ e $y = 20$: Temos uma sequência ordenada de resultado contendo apenas empates.

2° caso: $x = 1$ e $y = 17$: Uma sequência ordenada que deverá conter exatamente um “V” e 17 “E”, portanto o número de sequências ordenadas é exatamente número de anagramas da palavra: “VEEEEEEEEEEEEEEEEE”, que é

$$\frac{(17 + 1)!}{(17! \cdot 1!)} = 18.$$

3° caso: $x = 2$ e $y = 14$: Analogamente ao 2° caso, temos:

$$\frac{(14 + 2)!}{(14! \cdot 2!)} = 120.$$

4° caso: $x = 3$ e $y = 11$, temos

$$\frac{(11 + 3)!}{(11! \cdot 3!)} = 364.$$

5° caso: $x = 4$ e $y = 8$, temos

$$\frac{(8 + 4)!}{(8! \cdot 4!)} = 495.$$

6° caso: $x = 5$ e $y = 5$, temos

$$\frac{(5 + 5)!}{(5! \cdot 5!)} = 252.$$

7° caso: $x = 6$ e $y = 2$, temos

$$\frac{(6 + 2)!}{(6! \cdot 2!)} = 28.$$

Assim, temos um total de $1 + 18 + 120 + 364 + 495 + 252 + 28 = 1278$ sequências ordenadas de resultados possíveis. \square