
É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 40, volume 1, outubro de 2026

ISSN 2526-8651

Editorial

Caros(as) Leitores(as),
temos a satisfação de colocar em circulação mais um número do jornal olímpico É Matemática, Oxente!.

Nesta 40^a edição, a seção artigo apresenta o estudo intitulado Contagem dupla: contando a mesma coisa de dois modos distintos e a beleza da Matemática. No texto, o professor Gabriel Araújo Guedes, do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), aborda como essa estratégia de contagem pode auxiliar na resolução de problemas olímpicos com diversos graus de dificuldade.

A seção curiosidade traz a contribuição de Luna Gabriela Santos, aluna do curso de Licenciatura em Matemática da UFRPE. A autora apresenta Learn Math & Mental Math, uma interessante ferramenta para a aprendizagem numa perspectiva interativa e lúdica.

A seção Quem pergunta quer saber! destaca uma questão apresentada pela Revista do Professor de Matemática (RPM, nº 50) na qual a falta de rigor num enunciado pode levar um problema a ter solução indeterminada.

A Vida Secreta dos Números é a indicação de leitura do professor Severino Barros de Melo, do Departamento de Educação da UFRPE. A obra de divulgação escrita pelo matemático e jornalista austríaco George G. Szpiro oferece ao leitor 50 crônicas que colocam em evidência como os matemáticos

pensam e trabalham.

A seção dedicada a Problemas além de propor alguns e resolver outros, apresenta soluções de questões da Olimpíada Pernambucana de Matemática 2025 (nível 2).

Na agenda destacamos uma série de importantes eventos ligados à Matemática ou ao ensino de Matemática.

A todos os leitores do É Matemática, Oxente!, desejamos uma exitosa conexão com o nosso trabalho.

Sumário

1 Artigo	2
Contagem dupla: contando a mesma coisa de dois modos distintos e a beleza em matemática.	2
2 Curiosidade	10
Learn Math & Mental Math: Uma Ferramenta de Aprendizagem Matemática com jogos interativos	10
3 Indicação de leitura	11
A vida secreta dos números	11
4 Quem pergunta, quer saber!	12
Revista do Professor de Matemática (RPM nº 50, 2002)	12
5 Eventos	13
6 Soluções de Olimpíadas	14
OPEMAT 2025 - nível 2	14
7 Problemas propostos	20
8 Soluções dos Problemas	20

1. Artigo

Contagem dupla: contando a mesma coisa de dois modos distintos e a beleza em matemática.

Gabriel Araujo Guedes ¹

Introdução

Suponha que você queira saber quantas cadeiras há num auditório. Dá para contar uma por uma. Mas dá também para contar as fileiras, contar as cadeiras de uma fileira e multiplicar. Ninguém duvida que os dois números coincidem: afinal, são as mesmas cadeiras. Para determinar a quantidade de

pessoas numa sala, contar indistintamente ou contar primeiro a quantidade de mulheres e somar com a quantidade de homens. Como terceiro exemplo dada uma cesta com bolas azuis e vermelhas contar o total de bolas é o mesmo que contar a quantidade de bolas azuis e somar com a quantidade de bolas vermelhas.

Parece pouco, mas essa observação é o começo de uma técnica que resolve desde problemas de olimpíada do nível 1 da OBMEP até a problemas bem difíceis da Olimpíada Internacional de Matemática - IMO.

A ideia cabe numa frase: quando quisermos provar que duas quantidades são iguais, ou descobrir uma quantidade desconhecida, procuramos um conjunto de objetos que possa ser contado de dois modos distintos. Igualando as contagens, ganhamos uma equação de graça.

A parte difícil, e também a mais divertida, é escolher o que contar. Por isso, ao longo do artigo vamos insistir em duas perguntas:

O que estamos contando? E quais são os dois modos de contar?

Nos primeiros exemplos vamos responder a elas explicitamente. Depois a coisa fica natural e a gente relaxa a formalidade.

O artigo sobe uma escala de dificuldade degrau por degrau: aquecimento, tabelas e coeficientes binomiais. No fim há uma seção sobre como a técnica costuma dar errado, outra sobre como reconhecer quando ela se aplica, e uma lista de problemas propostos.

Para aquecer

Exemplo 1.1. Mostre que

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solução. Todo mundo conhece o truque de Gauss (somar o primeiro número com o último, o segundo

¹Universidade Federal Rural de Pernambuco - Departamento de Matemática. Campus Dois Irmãos. (52171-900) - Recife-PE - Brasil

com o penúltimo, e assim por diante). Aqui vai outro caminho.

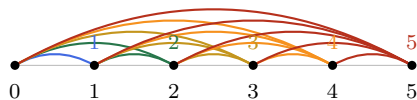
O que contamos? Os segmentos cujos extremos são dois dos pontos $0, 1, 2, \dots, n$ da reta.

Primeiro modo: um segmento é a escolha de 2 pontos entre $n + 1$, e há $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ escolhas.

Segundo modo: organizamos os segmentos pelo extremo da direita. Se o extremo direito é o ponto k , o esquerdo pode ser $0, 1, \dots, k - 1$, o que dá k segmentos. Somando de $k = 1$ a n obtemos $1 + 2 + \dots + n$.

São os mesmos segmentos, logo as duas contas coincidem. $\square$

Figura 1.1: O caso $n = 5$. Cada arco escolhe dois dos seis pontos.

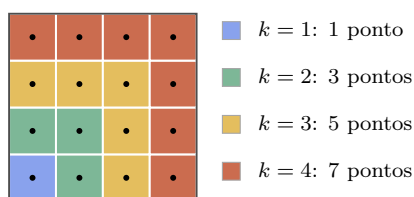


Fonte: ChatGPT.

Exemplo 1.2. Mostre que $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Solução. Como mencionado na introdução para contar a quantidade de objetos numa malha retangular basta contar a quantidade de objetos por linha e multiplicar pela quantidade de colunas, nesse caso temos n^2 . Do outro, dividimos a grade em camadas em forma de L: a camada k é formada pelos pontos (i, j) com $\max(i, j) = k$, ou seja, a linha k até a coluna k mais o que sobra da coluna k . Isso dá $k + (k - 1) = 2k - 1$ pontos. As camadas cobrem a grade sem repetição, e a soma delas é $1 + 3 + \dots + (2n - 1)$. $\square$

Figura 1.2: A grade 4×4 decomposta em camadas em forma de L. A camada k tem $2k - 1$ pontos; portanto, $4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$.



Fonte: ChatGPT.

Vale desenhar uma grade maior, pintar as camadas e entender o processo. Os pitagóricos já conheciam essa figura, e chamavam cada L de *gnômon*.

Exemplo 1.3. Numa festa, algumas pessoas apertam as mãos. Prove que o número de pessoas que apertaram a mão de uma quantidade ímpar de pessoas é par.

Solução. Vamos contar os pares (pessoa, aperto de mão dado por ela). Se a pessoa i deu d_i apertos, o total de pares é $d_1 + d_2 + \dots + d_n$. Por outro lado, cada aperto envolve exatamente duas pessoas, então é contado duas vezes nessa soma. Se houve A apertos, o total é $2A$.

Logo $d_1 + \dots + d_n = 2A$ é par. Observe que a soma de uma quantidade qualquer de números pares é par e a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é ímpar. Logo numa soma de inteiros que dá par, a quantidade de parcelas ímpares tem que ser par. Como queríamos. $\square$

Quem já viu um pouco de teoria dos grafos reconhece o resultado. Pensando nas pessoas como vértices e nos apertos como arestas, o *grau* de um vértice é o número de arestas que chegam nele, e acabamos de provar:

Lema 1.1 (Lema dos apertos de mão). *Em todo grafo, a soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas. Em particular, o número de vértices de grau ímpar é par.*

Este resultado pode ser aplicado em muitos problemas olímpicos. Numa festa com 15 pessoas, cada uma conhecendo exatamente 5 das outras? Impossível, porque 15×5 é ímpar.

Outras aplicações desse princípio podem ser encontradas nos exercícios.

Tabelas

Muitas vezes o modo mais organizado de contar é montar uma tabela. Digamos que temos objetos de dois tipos, como alunos e clubes, e uma relação entre eles (“o aluno i participa do clube j ”). Fazemos uma tabela com os alunos nas linhas e os clubes

nas colunas, e escrevemos 1 na casa (i, j) quando a relação vale. O número de 1's pode ser obtido somando por linhas ou por colunas, e os dois totais são iguais porque são os mesmos 1's.

Tabela 1: Tabela de incidência: 1 significa que o aluno participa do clube e 0, que não participa.

	Clube 1	Clube 2	Clube 3	Clube 4
Aluno 1	1	0	1	0
Aluno 2	0	1	1	0
Aluno 3	1	0	0	1
Aluno 4	0	1	1	1

Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Chatgpt.

Isso vale para qualquer tabela de números, não só de zeros e uns:

Proposição 1.2 (Princípio de Fubini). *Para quaisquer números reais a_{ij} , com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$,*

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}.$$

Tabela 2: A Proposição 1.2: somar primeiro as linhas ou primeiro as colunas produz o mesmo total.

	B_1	B_2	$\dots$	B_n	Soma
A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	$\sum_j a_{1j}$
A_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	$\sum_j a_{2j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	$\sum_j a_{mj}$
Soma	$\sum_i a_{i1}$	$\sum_i a_{i2}$	$\dots$	$\sum_i a_{in}$	$\sum_{i,j} a_{ij}$

Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Chatgpt.

O nome homenageia Guido Fubini, que provou o resultado análogo para i e j podendo tender ao infinito. Para somas finitas não há nada a provar: os dois lados somam as mesmas casas, só que em ordens diferentes. A utilidade está em saber *usar*.

Exemplo 1.4. Numa escola, cada um dos 30 professores dá aula para exatamente 6 turmas, e cada turma tem aula com exatamente 5 professores. Quantas turmas há?

Solução. Vamos contar o total de aulas nessa escola. Escreva $\varepsilon_{ij} = 1$ quando o professor P_i dá aula na turma T_j , e 0 caso contrário. A situação tem a forma:

Tabela 3: A tabela do Exemplo 1.4: cada linha soma 6 e cada coluna soma 5.

	T_1	T_2	$\dots$	T_T	Soma
P_1	ε_{11}	ε_{12}	$\dots$	ε_{1T}	6
P_2	ε_{21}	ε_{22}	$\dots$	ε_{2T}	6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
P_{30}	$\varepsilon_{30,1}$	$\varepsilon_{30,2}$	$\dots$	$\varepsilon_{30,T}$	6
Soma	5	5	$\dots$	5	$180 = 5T$

Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Chatgpt.

Do enunciado sabemos que a soma de cada linha é 6. Como o total de professores é 30 temos que somando por linhas, obtemos $30 \times 6 = 180$. Também do enunciado sabemos que cada coluna tem soma igual a 5. Somando pelo total de colunas obtemos $5T$. Logo $5T = 180 \Rightarrow T = 36$. $\square$

Exemplo 1.5 (OBM-09-N1f1). O professor Piraldo aplicou uma prova de 6 questões para 18 estudantes. Cada questão vale 0 ou 1 ponto, sem pontuação parcial. Depois da prova, Piraldo organizou as notas numa tabela (uma linha por estudante, uma coluna por questão) e viu que cada estudante acertou exatamente 4 questões e que cada questão teve a mesma quantidade m de acertos. Quanto vale m ?

Solução. Vamos contar o total de pontos feito em todas as provas. Então tanto faz contar primeiro o total de questões acertadas por cada aluno e depois somar tudo ou contar quantos alunos acertaram cada questão e depois somar tudo.

A tabela já veio pronta no enunciado. Ponha $\varepsilon_{ij} = 1$ quando o estudante E_i acertou a questão Q_j , e 0 quando errou:

Tabela 4: A tabela do Exemplo 1.5: cada linha soma 4 e cada coluna soma m .

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Soma
E_1	ε_{11}	ε_{12}	ε_{13}	ε_{14}	ε_{15}	ε_{16}	4
E_2	ε_{21}	ε_{22}	ε_{23}	ε_{24}	ε_{25}	ε_{26}	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
E_{18}	$\varepsilon_{18,1}$	$\varepsilon_{18,2}$	$\varepsilon_{18,3}$	$\varepsilon_{18,4}$	$\varepsilon_{18,5}$	$\varepsilon_{18,6}$	4
Soma	m	m	m	m	m	m	$72 = 6m$

Fonte: Elaboração do autor, com auxílio do ChatGPT.

Contando os acertos por estudante, obtemos $18 \times 4 = 72$. Contando por questão, obtemos $6m$. Então $m = 12$. $\square$

Observe pelos exemplos que não contamos diretamente a grandeza questionada no enunciado, contamos algo maior e a grandeza do enunciado aparece como elementos de um conjunto ou a quantidade de subconjuntos.

Vamos formalizar essa ideia como uma proposição.

Proposição 1.3. *Se cada um dos m objetos do tipo A está relacionado com exatamente r objetos do tipo B , e cada um dos n objetos do tipo B está relacionado com exatamente s objetos do tipo A , então $mr = ns$.*

Escreva $\varepsilon_{ij} = 1$ quando A_i está relacionado com B_j , e 0 caso contrário. A Proposição 1.3 fica inteira na tabela seguinte:

Tabela 5: A tabela da Proposição 1.3: as m linhas somam r e as n colunas somam s .

	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	Soma
A_1	ε_{11}	ε_{12}	$\cdots$	ε_{1n}	r
A_2	ε_{21}	ε_{22}	$\cdots$	ε_{2n}	r
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	ε_{m1}	ε_{m2}	$\cdots$	ε_{mn}	r
Soma	s	s	$\cdots$	s	$mr = ns$

Fonte: Elaboração do autor, com auxílio do ChatGPT.

Demonstração. Os dois lados contam os pares relacionados, um por A e o outro por B . $\square$

Os Exemplos 1.3, 1.4 e 1.5 são casos particulares disso. É fascinante como bastante trabalho cabe numa igualdade tão pequena.

Quando só temos desigualdades

Nem sempre a relação é tão regular. Às vezes, sabemos apenas que determinada quantidade é pelo menos k . Suponha, por exemplo, que cada aluno goste de *pelo menos* dois temas. Nesse caso, a contagem dupla produz uma desigualdade, e podemos

utilizar o Princípio da Casa dos Pombos para concluir o argumento; para uma introdução a esse princípio e diversas aplicações, veja [16].

Exemplo 1.6. Num grupo de 25 estudantes, cada um gosta de pelo menos 2 dentre 7 temas de estudo. Justifique por que algum tema é apreciado por pelo menos 8 estudantes.

Solução. Contamos os pares (estudante, tema de que ele gosta). Pelos estudantes, são pelo menos $25 \times 2 = 50$ pares. Se cada tema fosse apreciado por no máximo 7 estudantes, teríamos no máximo $7 \times 7 = 49$ pares. Como $50 > 49$, pelo princípio da casa dos pombos, algum tema tem pelo menos 8 fãs. $\square$

A ideia por trás é a velha história da média: se N objetos estão distribuídos em t colunas, alguma coluna tem pelo menos N/t objetos, e alguma tem no máximo N/t . Nem todo mundo pode estar abaixo da média. A contagem dupla calcula o total; a média aponta uma coluna carregada. Vamos chamar isso de *argumento da média* daqui em diante.

Em muitos problemas só um dos sentidos é pedido, mas é bom saber que o outro vem junto. O problema da gincana, na lista final, é uma oportunidade de usar as duas direções.

Identidades binomiais sem fatorial

Lembre que $\binom{n}{k}$ conta a quantidade de subconjuntos com k elementos de um conjunto com n elementos. Pense em comissões de k pessoas escolhidas numa sala de n pessoas. Várias identidades com esses números, que costumam ser verificadas abrindo fatoriais, ficam evidentes quando cada lado é lido como uma contagem. O trabalho é descobrir qual conjunto os dois lados estão contando.

Todas as identidades desta seção são clássicas. O leitor as encontra, com demonstrações, no Capítulo 4 de [1] (Seção 4.1, sobre o triângulo de Pascal), onde recebem os nomes consagrados nos livros brasileiros: Relação de Stifel, Teorema das Linhas, Teorema das Colunas e Relação de Euler; na Seção 1.4 de [2]; e, em nível de ensino médio, no material

do Portal da OBMEP [3]. Aqui o objetivo não é a identidade em si, mas o modo de prová-la.

Exemplo 1.7. Para $1 \leq k \leq n$, mostre que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

Solução. Os dois lados contam comissões de k pessoas com um presidente. À esquerda, escolhemos a comissão e depois o presidente entre os k membros. À direita, escolhemos o presidente entre as n pessoas e depois completamos a comissão com $k - 1$ das $n - 1$ restantes. $\square$

Exemplo 1.8 (Relação de Stifel). Para $1 \leq k \leq n - 1$, mostre que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Solução. Já vimos no começo dessa subseção que $\binom{n}{k}$ conta a quantidade de subconjuntos de k elementos de $\{1, \dots, n\}$. Podemos contar a quantidade desses subconjuntos de outra maneira. Os subconjuntos de k se dividem em dois grupos: os que não contêm o n , que são $\binom{n-1}{k}$, e os que contêm, que ficam determinados pelos outros $k - 1$ elementos e são $\binom{n-1}{k-1}$. $\square$

Essa é a regra de formação do triângulo de Pascal, agora com uma explicação. A prova por fatoriais está em [1, Seção 4.1]; a bijetiva, como a nossa, em [2, Seção 1.4].

Exemplo 1.9 (Identidade de Vandermonde). Mostre que $\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n}{k-j}$. Com $0 \leq k \leq m+n$.

Solução. Numa sala com m homens e n mulheres, o lado esquerdo conta as comissões de k pessoas. O direito conta as mesmas comissões separadas pelo número j de homens: j homens e $k-j$ mulheres. $\square$

Em [1] essa identidade aparece como *Relação de Euler*; o nome de Vandermonde é o mais usado na literatura internacional. Os dois autores a estudaram no século XVIII, e o leitor pode escolher o padrinho que preferir.

Exemplo 1.10 (Teorema das Linhas). Mostre que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Solução. Vamos contar a quantidade total de subconjuntos de um conjunto com n elementos. No lado esquerdo da equação separamos por tamanho, isto é, todos os subconjuntos de cardinalidade 0, todos os subconjuntos de cardinalidade 1 até todos os subconjuntos de cardinalidade n . No lado direito estamos usando o princípio multiplicativo, para cada elemento só temos duas opções ele pertence ou não pertence a um determinado subconjunto: $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$. $\square$

Exemplo 1.11 (Identidade da bengala). Para $0 \leq k \leq n$, mostre que

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Solução. O lado direito conta os subconjuntos de $k+1$ elementos de $\{1, \dots, n+1\}$. Separe-os pelo maior elemento. Se o maior é m , os outros k vivem em $\{1, \dots, m-1\}$: são $\binom{m-1}{k}$ subconjuntos. Somando sobre $m = k+1, \dots, n+1$ aparece o lado esquerdo. $\square$

O apelido vem do desenho no triângulo de Pascal: as parcelas descem por uma diagonal e o resultado dá uma virada no fim, como uma bengala. Nos livros brasileiros ela costuma se chamar *Teorema das Colunas* [1, 3], porque, no triângulo desenhado à esquerda, as parcelas ficam numa mesma coluna. E para $k = 1$ a identidade diz que $1 + 2 + \dots + n = \binom{n+1}{2}$, que é o Exemplo 1.1. Não é coincidência: lá classificamos segmentos pelo extremo direito, aqui classificamos subconjuntos pelo maior elemento. É a mesma contagem.

Trocar “somar sobre subconjuntos” por “somar sobre elementos” é exatamente o que fizemos com linhas e colunas. Em nenhum desses exemplos abrimos um fatorial. Provas assim são chamadas de combinatórias, e muita gente as considera as mais bonitas que existem, porque elas explicam *por que* a identidade vale, e não apenas que ela vale. Na lista

final, duas identidades ficam para o leitor testar esse ponto de vista sem rodinhas auxiliares.

O mesmo movimento, numa IMO

Exemplo 1.12 (IMO 1987, Problema 1). Uma *permutação* de $\{1, \dots, n\}$ é uma bijeção σ do conjunto nele mesmo, e i é um *ponto fixo* de σ se $\sigma(i) = i$. Seja $p_n(k)$ o número de permutações com exatamente k pontos fixos. Verifique que

$$\sum_{k=0}^n k \cdot p_n(k) = n!.$$

Solução. Contamos os pares (i, σ) em que i é ponto fixo de σ . Agrupando pelas permutações: as que têm k pontos fixos contribuem com k pares cada, num total de $\sum_k k p_n(k)$. Agrupando pelos elementos: para cada i , as permutações que fixam i embaralham livremente os outros $n - 1$ elementos, e são $(n - 1)!$. Somando sobre os n valores de i dá $n!$.

Para $n = 3$, a contagem aparece inteira na tabela abaixo. A coluna abc representa a permutação $\sigma(1) = a, \sigma(2) = b, \sigma(3) = c$.

Tabela 6: Exemplo 1.12 para $n = 3$: linhas contam permutações que fixam i e colunas, os pontos fixos de cada permutação.

	123	132	213	231	312	321	Soma
$i = 1$	1	1	0	0	0	0	2
$i = 2$	1	0	0	0	0	1	2
$i = 3$	1	0	1	0	0	0	2
Soma	3	1	1	0	0	1	6

Fonte: Elaboração do autor, com auxílio do ChatGPT.

□

Observe que precisamos de pouquíssimas linhas para resolver essa questão. Muitos participantes daquela IMO foram pelo caminho pesado, calculando cada $p_n(k)$ por inclusão-exclusão. Escolher o que contar poupou todo esse trabalho.

Uma armadilha

Toda técnica tem seu modo de dar errado. O erro clássico da contagem dupla é contar, sem per-

ceber, dois conjuntos um pouco diferentes. Segue uma “prova” com defeito.

Exemplo 1.13. *Afirmção (falsa):* numa sala com n pessoas e A pares de amigos, a soma dos números de amigos de cada pessoa é A .

“Prova”: contamos as amizades. Por pessoas, $d_1 + \dots + d_n$. Por pares, A . Logo $d_1 + \dots + d_n = A$.

Onde está o erro?

O lado esquerdo conta pares *ordenados* (pessoa, amigo dela): a amizade entre João e Maria entra uma vez na parcela de João e outra na de Maria. O lado direito conta pares não ordenados. A conclusão certa é $d_1 + \dots + d_n = 2A$, o lema dos apertos de mão.

Fica a lição prática: antes de igualar, escreva por extenso o conjunto que está contando e confira que cada objeto foi contado o mesmo número de vezes nos dois lados. Três lugares onde isso costuma falhar:

1. ordenado contra não ordenado: pares (a, b) são o dobro dos pares $\{a, b\}$;
2. multiplicidade escondida: um objeto contado várias vezes de um lado (cada aresta nos graus, cada lado de peça nas costuras) e uma só do outro. O fator 2 não é inimigo, muitas vezes é justamente a informação útil, mas precisa ser visto;
3. casos de borda: o subconjunto vazio, o vértice isolado, o termo $k = 0$ de uma soma.

Testar a identidade obtida para $n = 1, 2, 3$ evita muita dor de cabeça.

Como identificar uma contagem dupla

Não há receita infalível, mas alguns sinais no enunciado ajudam:

- “cada X está relacionado com exatamente k Y”: conte os pares relacionados dos dois lados;
- uma identidade com binomiais: pergunte o que cada lado conta antes de abrir fatoriais;

- “prove que existe algum... com pelo menos...”: conte o total e use a média;
- somas com jeito de tabela (tabuadas, pontuações, somas duplas): some por linhas e por colunas;
- paridade de uma quantidade global: conte incidências, e o fator 2 que aparece de um lado é a fonte da paridade.

Problemas propostos

Em ordem aproximada de dificuldade; os últimos vêm de competições de alto nível. Mandem soluções para o jornal!

Problema 1.1. Numa cidade há 57 linhas de ônibus. Cada linha passa por exatamente 8 pontos, e cada ponto é servido por exatamente 3 linhas. Quantos pontos de ônibus há na cidade?

Problema 1.2. Numa turma, cada aluno participa de exatamente 2 clubes, e cada clube tem exatamente 12 alunos. Se há 8 clubes, quantos alunos tem a turma?

Problema 1.3. Num clube, cada membro pertence a exatamente 3 comissões e cada comissão tem exatamente 3 membros. Prove que há tantos membros quanto comissões.

Problema 1.4. Numa conferência, cada participante conhece exatamente 3 outros (conhecimento é mútuo), e há 45 pares de conhecidos. Quantos são os participantes?

Problema 1.5 (OBM). Em um ano, no máximo quantos meses têm cinco domingos?

Problema 1.6. Num campeonato de n times, todos contra todos e sem empates, a soma das vitórias de todos os times foi 66. Determine n .

Problema 1.7. Dez times jogam entre si uma vez. Vitória vale 3 pontos, empate vale 1 para cada lado, derrota vale 0. No fim, a soma dos pontos de todos os times foi 130. Quantos jogos empataram?

Problema 1.8. Numa gincana com 12 equipes e 6 provas, cada equipe participa de exatamente 3 provas. Mostre que alguma prova reúne pelo menos 6 equipes, e alguma reúne no máximo 6.

Problema 1.9 (OBM). No triminó marciano, as peças têm 3 números cada (diferente do dominó da Terra, onde cada peça tem apenas 2). Os números também variam de 0 a 6, e para cada escolha de 3 números (não necessariamente distintos) existe uma e somente uma peça com esses 3 números. Qual é a soma dos números de todas as peças do triminó marciano?

Problema 1.10. Contando comissões com presidente e vice-presidente (cargos distintos), prove que, para $2 \leq k \leq n$,

$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}.$$

Problema 1.11. Mostre que

$$\sum_{k=1}^n k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Problema 1.12 (Identidade de Lagrange). Usando a identidade de Vandermonde com $m = n = k$, prove que

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Problema 1.13. Some os elementos de cada um dos 2^n subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ e depois some tudo. Que valor se obtém?

Problema 1.14. Cada aluno de uma turma de 32 estudantes resolveu exatamente 5 das 8 questões de uma prova. Prove que alguma questão foi resolvida por pelo menos 20 alunos.

Problema 1.15. Sete amigos trocaram cartas nas férias. No fim, cada um tinha enviado cartas para exatamente três dos outros, e recebido cartas exatamente dessas mesmas três pessoas. Mostre que isso é impossível.

Problema 1.16 (OBM). Um álbum de 2011 figurinhas está sendo colecionado por 33 amigos. Uma distribuição de figurinhas entre eles é *incompleta* se existe alguma figurinha que nenhum dos 33 tem. Determine o menor m com a seguinte propriedade: toda distribuição em que, para quaisquer dois dos amigos, faltam a ambos pelo menos m figurinhas em comum, é incompleta.

Problema 1.17 (EUA). Seja A um conjunto com 225 elementos e sejam $A_1, \dots, A_{11}$ subconjuntos de A com $|A_i| = 45$ e $|A_i \cap A_j| = 9$ para $i \neq j$. Prove que $|A_1 \cup \dots \cup A_{11}| \geq 165$ e dê um exemplo com igualdade.

Problema 1.18. Numa sala há n pessoas, e quaisquer duas têm exatamente um amigo em comum. Prove que existe uma pessoa amiga de todas as outras. (É o Teorema da Amizade, de Erdős, Rényi e Sós.)

Dicas

Só depois de tentar de verdade.

1.1, 1.2 e 1.3. Proposição 1.3.

1.4. Use o lema dos apertos de mão.

1.5. Conte os domingos do ano de duas formas: quantos pode haver no máximo, e quanto cada mês contribui (4 ou 5).

1.6. Cada jogo produz exatamente uma vitória.

1.7. Conte os pontos distribuídos pelos jogos; um empate distribui um ponto a menos que um jogo com vencedor.

1.8. Conte os pares (equipe, prova) e compare cada coluna com a média.

1.9. Conte quantas vezes cada número de 0 a 6 aparece no total das peças. Por simetria é o mesmo para todos.

1.10. Exemplo 1.7, escolhendo os dois cargos primeiro.

1.11. Conte comissões com presidente, de qualquer tamanho.

1.12. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; comissões de n pessoas num grupo de n homens e n mulheres.

1.13. Troque “somar sobre subconjuntos” por “somar sobre elementos”. Cada elemento pertence a quantos subconjuntos?

1.14. Pares (aluno, questão resolvida) e o argumento da média.

1.15. Lema dos apertos de mão.

1.16. Pense nas figurinhas que faltam e conte as triplas (figurinha, dupla de amigos a quem ela falta). Se a distribuição fosse completa, cada figurinha faltaria a no máximo 32 amigos; compare esse teto com o que as duplas garantem.

1.17. Tabela com 11 linhas e uma coluna por elemento da união; conte pares de 1's numa mesma coluna. Por linhas dá $9\binom{11}{2}$; por colunas use que $\binom{c}{2}$ é convexa. Para a igualdade, note que $\binom{11}{3} = 165$.

1.18. Conte de dois modos os caminhos de amizade de comprimento 2.

Para terminar

Contagem dupla é mais um hábito do que a habilidade de usar determinado teorema. Diante de um problema de contagem, de uma identidade misteriosa ou de um “prove que existe”, a pergunta é sempre a mesma: o que estou contando, e de quais dois modos? Com prática, o leitor vai começar a ver tabelas escondidas em enunciados que não falam em tabela nenhuma. Quem quiser ir além encontra uma seção inteira dedicada à contagem dupla no Capítulo 2 de [2], dezenas de problemas resolvidos nos materiais das Semanas Olímpicas [4, 5, 6], e no capítulo “Pigeon-hole and double counting” de Aigner e Ziegler [14] vê a técnica trabalhando em matemática de pesquisa.

Referências

- [1] MORGADO, A. C. O.; PITOMBEIRA DE CARVALHO, J. B.; PINTO CARVALHO, P. C.; FERNANDEZ, P., *Análise Combinatória e Probabilidade*. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2023. (Coleção do Professor de Matemática).
- [2] MUNIZ NETO, A. C., *Tópicos de Matemática Elementar, vol. 4: Combinatória*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- [3] BENEVIDES, F. S., *Soma de elementos em linhas, colunas e diagonais*. Material Teórico, Módulo Binômio de Newton e Triângulo de Pascal, 2º ano do Ensino Médio. Portal da OBMEP. Disponível em portaldaobmep.impa.br.
- [4] SHINE, C., *Contagem Dupla*. Programa Olímpico de Treinamento, Combinatória, Nível 3, Aula 3. OBM, 2012.
- [5] LOPES, D., *Problemas Diversos em Contagem Dupla*. Semana Olímpica 2022, Nível 2. OBM, 2022.
- [6] MILESKE, C., *Contagem Dupla*. 29ª Semana Olímpica. OBM, 2026.
- [7] LAW, K. H.; LEUNG, T. W.; LI, K. Y., Double Counting. *Mathematical Excalibur*, HKUST, v. 13, n. 4, 2008.
- [8] NASH, O., *The ‘double counting trick’ for combinatorial problems*. Notas, University College Dublin, 2020.
- [9] ENGEL, A., *Problem-Solving Strategies*. New York: Springer, 1998.
- [10] CHEN, E., *IMO Solution Notes*. Disponível em web.evanchen.cc.
- [11] ZHAO, Y., *Counting in Two Ways*. Notas do MOP, 2007. Disponível em yufeizhao.com/olympiad.
- [12] ANDREESCU, T.; FENG, Z., *102 Combinatorial Problems*. Boston: Birkhäuser, 2003.
- [13] VAN LINT, J. H.; WILSON, R. M., *A Course in Combinatorics*. 2. ed. Cambridge University Press, 2001.
- [14] AIGNER, M.; ZIEGLER, G. M., *Proofs from THE BOOK*. 6. ed. Berlin: Springer, 2018.
- [15] MARTÍNEZ SANDOVAL, L. I., Estrategias básicas de conteo. *Tzaloa*, Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2011, n. 2.
- [16] MACHADO JUNIOR, R. N., *O Princípio da Casa dos Pombos*. É Matemática, Oxente! O Jornal de Matemática Olímpica, v. 1, n. 9, p. 1–4, dez. 2018.

2. Curiosidade

Learn Math & Mental Math: Uma Ferramenta de Aprendizagem Matemática com jogos interativos

Luna Gabriela Ramos de Oliveira Santos ²

A matemática é frequentemente vista pelos estudantes como um grande desafio durante a vida escolar e acadêmica. Mas, e se existisse uma ferramenta de aprendizagem matemática que permitisse praticar diferentes conteúdos diretamente no seu celular? Essa é a proposta do aplicativo Learn Math & Mental Math (ou “Jogos de Matemática & Frações” no Brasil).

Desenvolvido pela AdamSoftware, a ferramenta oferece uma ampla variedade de desafios matemáticos, desde o ensino fundamental, com frações, até integrais, no ensino superior, ou seja, se você está lutando para lembrar como somar frações ou até para resolver uma integral, talvez o Learn Math seja uma ótima opção para você.

Além disso, o aplicativo possibilita que você escolha a série ou nível acadêmico (ensino fundamental I até o ensino superior), o conteúdo do desafio e o nível de dificuldade. E não para por aí, antes de iniciar o desafio você pode acessar um resumo-aula para recordação e fixação do tema; cada lição resolvida irá acender uma ofensiva diária e receber recompensas como diamantes ou conquistas e caso

²Discente do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco e monitora voluntária do jornal É Matemática, OXENTE!

cometa algum erro, mais do que indicar que a solução está errada ele apresenta a resolução da questão, transformando o erro numa possibilidade de revisar o raciocínio e compreender onde está a dificuldade.

O aplicativo também oferece opção de apoio como uma calculadora multifuncional, a função de fazer anotações na tela e, além disso, alguns jogos que estimulam o raciocínio lógico como Sudoku, 4096 e Blocos Lógicos.

Mas talvez uma das características mais interessantes do Learn Math seja justamente sua proposta: aprender matemática por meio de desafios curtos e interativos. Se a dinâmica parece familiar, não é por acaso. A experiência é muito parecida com aplicativos populares como o Duolingo³, que usam estratégias da abordagem gamificada de aprendizagem, tornando o processo mais divertido e lúdico. Se a proposta despertou sua curiosidade, o aplicativo é gratuito e está disponível para Android [1] e iOS [2].

Referências

- [1] JOGOS DE MATEMÁTICA E FRAÇÕES [Android]. AdamSoftware, 2026. Disponível em: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.companynama.MaturaMatematyka>. Acesso em 09/09/2026.
- [2] JOGOS DE MATEMÁTICA E FRAÇÕES [iOS]. AdamSoftware, 2026. Disponível em: <https://apps.apple.com/br/app/aprender-matem%C3%A1tica-fra%C3%A7%C3%B5es/id1540872304>. Acesso em: 18/09/2026.

3. Indicação de leitura

A vida secreta dos números

Severino Barros de Melo⁴

³Aplicativo de aprendizagem de idiomas.

⁴Professor do Departamento de Educação da UFRPE e colaborador do jornal *É matemática, Oxente!*

Na literatura envolvendo Matemática, podemos considerar dois tipos de publicações: aquelas de Matemática e aquelas sobre Matemática. As primeiras são de cunho técnico, como, por exemplo, um livro didático, abordando algum ramo dessa ciência. As segundas, geralmente escritas por matemáticos, trazem considerações, reflexões e pontos de vista acerca dessa ciência e desempenham um papel muito importante, contribuindo para uma compreensão cada vez maior do que vem a ser a Matemática.

É nesse segundo tipo que se enquadra grande parte das indicações de leitura do *É matemática, oxente!*. De fato, já são vinte e dois os títulos indicados desde a primeira edição, propiciando aos leitores uma visão sempre mais ampla e aprofundada da Matemática. Para esta edição, elegemos como indicação de leitura *A vida secreta dos números*, escrito por George G. Szpiro e publicado pela Zahar Editores.

O autor é um matemático e jornalista austríaco de origem judaica, nascido em Viena, na Áustria, em 1950. Estudou na Suíça, no Instituto Federal de Tecnologia, fez M.B.A. na Universidade de Stanford e Ph.D. em Matemática Econômica na Universidade Hebraica, onde lecionou. Além dessa instituição, foi professor na Wharton School e na Universidade de Zurique. Como jornalista, foi correspondente de um jornal suíço em Israel. Publicou, dentre outros livros, *A Conjectura de Poincaré* e *A Conjectura de Kepler*.



Na apresentação de *A vida secreta dos núme-*

ros, o editor destaca que “a maioria das pessoas tem pouca noção do que fazem os matemáticos ou de como pensam. Frequentemente é difícil perceber como esse trabalho enigmático e obscuro se aplica à nossa vida cotidiana. No entanto, a Matemática exerce um fascínio especial sobre muitas pessoas. Somos atraídos por sua beleza inerente e fascinados por sua complexidade, mas muitas vezes intimidados por sua suposta dificuldade”. Por esta razão, o editor considera que o livro em tela desperta o leitor para o lado encantador e até mesmo excêntrico da Matemática.

O livro em destaque traz, nas suas 272 páginas, na visão do autor, “50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos”. A obra está estruturada em seis partes: curiosidades históricas, conjecturas não provadas, problemas não solucionados, personalidades, temas concretos e abstratos, e *pot-pourri* interdisciplinar.

Para além das cinco primeiras partes, merece destaque, pela atualidade da proposta, a sexta parte, dedicada à interdisciplinaridade, fazendo eco ao jargão “a Matemática está presente em tudo”. De fato, o *Pot-pourri interdisciplinar* aborda, em dezessete crônicas, as conexões da Matemática com o Direito, as Ciências Políticas, os Seguros, a Linguística, a Botânica, a Ciência da Computação, a Geografia, a Física, a Economia, a Criptografia, as Finanças, a Teoria da Evolução, as Neurociências e a Teologia.

O livro foi finalista, em 2005, do Prêmio Descartes para pesquisa e divulgação científica, da Comissão Europeia, e selecionado para o Clube do Livro da *Scientific American*. A *Publishers Weekly*, tradicional revista e portal de notícias norte-americano dedicado ao mercado editorial, considerou o livro “leve, divertido e interessante”.

Portanto, *A vida secreta dos números* é uma importante indicação para uma biblioteca dedicada a obras sobre Matemática.

4. Quem pergunta, quer saber!

Revista do Professor de Matemática (RPM nº 50, 2002)

Severino Barros de Melo⁵

Na presente edição, continuamos pesquisando questões interessantes na *Revista do Professor de Matemática* (RPM). Na edição n.º 50, a revista comenta sobre o pedido de dois leitores acerca de uma questão de geometria plana. Sabemos que, na Matemática, em se tratando de problemas, um aspecto muito importante é o rigor no enunciado, sob pena de não encontrarmos uma resposta única para o problema proposto. Tal fato se verifica na questão que escolhemos para esta edição. De fato, a RPM intitula a pergunta de “**Teste ‘furado’ ?**”

Pergunta

Dois leitores distintos, em datas distintas, pediram a solução do mesmo teste:

Um triângulo tem lados que medem 6, 9 e C . O número máximo de elementos que podem ocupar o lugar de C é:

- a) 7 b) 9 c) 3 d) 5 e) 6

Resposta

Em um triângulo, qualquer lado é menor do que a soma dos outros dois. Portanto,

$$6 < 9 + C, \quad 9 < 6 + C, \quad C < 6 + 9.$$

As duas últimas desigualdades mostram que

$$3 < C < 15.$$

⁵Docente do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco

Como o enunciado não diz de qual conjunto deve-se tirar o valor de C , fica impossível saber qual é a alternativa correta.

5. Eventos

Fiquem Ligados!!!

- **Encontro Nacional dos Mestres em Matemática na Educação Básica - ENM-MEB**

- Local: Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Curitiba
- Data: 15 a 17 de Outubro de 2026
- Mais informações: <https://enmmeb.sbm.org.br/>

- **A Semana da Matemática e Semana da Estatística (SEMAT e SEMEST) é um evento desenvolvido junto ao Instituto de Matemática e Estatística (IME)**

- Local: Universidade Federal de Uberlândia (UFU)
- Data: 20 a 24 de outubro de 2026
- Mais informações: <https://eventos.ufu.br/sematsemest2026>

- **2º Fórum Internacional de Pesquisas do GEPIC**

- Local: online
- Data: 05 a 06 de novembro de 2026
- Mais informações: <https://www.event3.com.br/gepic-688568/>

- **24º Encontro Anual do Grupo de Pesquisa História Oral e Educação Matemática**

- Local: IFSP - Campus São Paulo

- Data: 9 e 10 de novembro de 2026
- Mais informações: <https://www.event3.com.br/24-encontro-anual-do-grupo-de-pesquisa-historia-oral-e-educacao-matematica-749218/>

- **6º Encontro de Estudantes de Matemática - VI EEM**

- Local: CEGEN (Centro de Ensino de Graduação de Exatas e Natureza) - UFRPE
- Data: 11 a 13 de novembro de 2026
- Mais informações: [@eem.ufrpe](https://t.me/eemufrpe)

- **VIII ENAPHEM - VIII Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática**

- Local: Campus São Paulo | Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo | - São Paulo - São Paulo - Brasil
- Data: 11 a 14 de novembro de 2026
- Mais informações: <https://www.event3.com.br/viiienapem-731910/>

- **VII Colóquio de Matemática da Região Nordeste**

- Local: Universidade Federal de Pernambuco - Recife - PE
- Data: 23 e 27 de novembro de 2026
- Mais informações: <https://sbm.org.br/coloquio-nordeste-7/>

- **IX Fórum Nacional de Formação Inicial de Professores que Ensinam Matemática (FPMat)**

- Local: Campus São Paulo | Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo | - São Paulo - São Paulo
- Data: 25 a 27 de novembro de 2026

- Mais informações: <https://www.eventos.com.br/ix-forum-nacional-de-formacao-inicial-de-professores-que-ensinam-matematica-fpmat-696756/>

- **XI Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro (XI SPEM)**

- Local: Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca - Campus Petrópolis - Petrópolis - Rio de Janeiro
- Data: 26 a 28 de novembro de 2026
- Mais informações: <https://www.eventos.com.br/xi-spem-rj-697071/%20>

6. Soluções de Olimpíadas

OPEMAT 2025 - nível 2

Nesta edição apresentaremos a resolução das questões da prova da 2ª fase da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2025 referentes ao nível 2.

Questão 6.1. As formigas Ana e Bia estão construindo formigueiros seguindo regras matemáticas diferentes:

- Ana cria um formigueiro com **camadas** horizontais. A 1ª camada tem 1 câmara. Cada nova camada tem 2 câmaras a mais do que a anterior. Assim, a primeira tem 1 câmara, a segunda tem 3, a terceira tem 5 e assim por diante.
- Bia cria um formigueiro cavando em **níveis** verticais de cima para baixo. O 1º nível tem 1 câmara. Cada novo nível tem o dobro de câmaras do nível anterior. Assim, o primeiro nível tem 1 câmara, o segundo tem 2, o terceiro tem 4 e assim por diante.

- Quantas câmaras terá a 6ª camada de Ana? E quantas terá o 6º nível de Bia?
- Ana planeja fazer um formigueiro com 40 camadas. Calcule o número total de câmaras somando todas as 40 camadas.
- Qual é a quantidade mínima de níveis que Bia precisa escavar para que o total de câmaras do seu formigueiro seja maior do que o formigueiro de 40 camadas de Ana?

Solução:

- Listando os termos até o 6º:
 - Ana (ímpares): 1, 3, 5, 7, 9, 11.
 - Bia (dobros): 1, 2, 4, 8, 16, 32.

Resposta: Ana terá 11 câmaras e Bia terá 32 câmaras.

- O total de câmaras a é a quadragésima camada é a soma dos primeiros 40 ímpares que é dada por. $1 + 3 + 5 + \dots + 79$. Essa é a soma dos quarenta primeiros termos de uma P.A. de razão que pode ser feita do seguinte modo:

$$1 + 3 + 5 + \dots + 79 = \frac{(1 + 79) \cdot 40}{2} = 1600$$

- O total de câmaras de Bia até o nível n é dado pela soma dos n primeiros termos de uma P.G. de razão 2 e termo inicial 1 que é dada por

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Queremos encontrar o menor n tal que o total seja maior que 1600.

Testando as potências de 2:

- Para 10 níveis: o total é $2^{10} - 1 = 1023$. (Menor que 1600).
- Para 11 níveis: o total é $2^{11} - 1 = 2047$. (Maior que 1600).

Resposta: Bia precisa escavar 11 níveis.

Questão 6.2. Um grupo de 6 bailarinas veste camisetas numeradas de 1 até 6. No palco, existem 6 marcas no chão também numeradas de 1 até 6. Uma “*formação*” consiste em posicionar cada bailarina sobre uma marca, de modo que todas as marcas estejam ocupadas. Dizemos que uma bailarina está na *posição original* quando o número de sua camiseta é igual ao número da marca no chão.

- Considere apenas as 5 bailarinas numeradas de 1 até 5 e as marcas de 1 até 5. Quantas formações existem em que nenhuma bailarina esteja na sua posição original?
- Considere agora as 6 bailarinas. Quantas formações existem em que exatamente uma bailarina esteja na **posição original** e as outras cinco estejam fora da sua **posição original**?
- Considere novamente as 6 bailarinas. Chamamos de *caminhada* uma forma de reorganizar as bailarinas: Para cada marca X no chão é designada uma nova marca Y no chão (X pode ser igual a Y), de modo que a bailarina que estava sobre a marca X se movimentará para a marca Y .

Podemos representar uma caminhada por uma tabela de duas linhas: na primeira linha, temos as marcas de 1 a 6; na segunda linha, embaixo de cada marca X , há a marca Y para onde a bailarina da marca X se movimenta.

Por exemplo, a seguinte tabela

Início	1	2	3	4	5	6
Depois	2	1	3	4	5	6

indica que as bailarinas das marcas 1 e 2 trocaram de lugar, e as demais permaneceram onde estavam.

Uma caminhada é chamada de *espelhada* quando, começando com todas as bailarinas em suas posições originais e realizando a caminhada duas vezes seguidas, todas voltam às posições originais.

A caminhada acima é espelhada. Já a caminhada

Início	1	2	3	4	5	6
Depois	2	3	1	4	5	6

não é espelhada, pois, ao repeti-la, a bailarina 1 termina na marca 3, que não é sua posição original.

Quantas caminhadas espelhadas existem?

Solução:

- Objetivo: Encontrar o número de formações com 5 bailarinas em 5 marcas de modo que *nenhuma* fique na sua posição original (um desarranjo).

Vamos focar na bailarina 1. Ela tem 4 opções de marcas para escolher (2, 3, 4 ou 5). Suponha, sem perda de generalidade, que a bailarina 1 escolha a marca 2. Para posicionar as demais bailarinas, o problema se divide em dois casos disjuntos, dependendo da escolha da bailarina 2 (Princípio Aditivo):

Caso 1: A bailarina 2 escolhe a marca 1.

Neste cenário, a bailarina 1 e a bailarina 2 apenas trocaram de lugar. Restam as bailarinas 3, 4 e 5 para serem distribuídas nas marcas 3, 4 e 5, de modo que nenhuma fique em sua marca original. O número de desarranjos para 3 elementos é 2 (3 vai para 4, 4 vai para 5, 5 vai para 3; ou 3 vai para 5, 5 vai para 4, 4 vai para 3). Temos 2 possibilidades neste caso.

Caso 2: A bailarina 2 escolhe qualquer marca diferente da 1.

Neste cenário, precisamos distribuir as bailarinas 2, 3, 4 e 5 nas marcas 1, 3, 4 e 5. Note que a bailarina 3 não pode ir para a 3, a 4 não pode ir para a 4, a 5 não pode ir para a 5, e a bailarina 2 não pode ir para a marca 1 (por definição deste caso). Isso é

estruturalmente idêntico a um desarranjo de 4 elementos, onde a “posição original” da bailarina 2 passou a ser virtualmente a marca 1. Como foi provado na solução do item *c* da prova do nível 1, o número de desarranjos de 4 elementos é 9. Temos 9 possibilidades neste caso.

Pelo Princípio Aditivo, se a bailarina 1 for para a marca 2, temos um total de $2 + 9 = 11$ formações válidas.

Como a bailarina 1 tinha 4 escolhas iniciais possíveis e cada uma gera 11 desdobramentos idênticos, usamos o Princípio Multiplicativo:

$$\text{Total} = 4 \times 11 = 44$$

Resposta do item a: Existem 44 formações.

- b) Objetivo: Encontrar o número de formações com 6 bailarinas onde *exatamente uma* fique na sua posição original e as outras cinco fiquem fora.

Podemos dividir este problema em duas etapas independentes:

Etapas 1: Escolher qual bailarina ficará na sua posição original.

Dentre as 6 bailarinas, temos 6 opções possíveis para escolher a que ficará fixa.

Etapas 2: Posicionar as 5 bailarinas restantes. Após fixar uma bailarina, sobram 5 bailarinas e 5 marcas correspondentes. A restrição é que *nenhuma* dessas 5 fique na sua posição original. Este é exatamente o cálculo que acabamos de realizar no item a. Sabemos que existem 44 maneiras de organizar essas 5 bailarinas.

Aplicando o Princípio Multiplicativo para as duas etapas: $\text{Total} = 6 \text{ (escolhas da fixa)} \times 44 \text{ (formas de desorganizar as outras 5)} = 264$.

Resposta do item b: Existem 264 formações.

- c) Objetivo: Encontrar quantas caminhadas são *espelhadas* para 6 bailarinas.

Para que a caminhada retorne ao início após duas repetições, a reordenação deve ser composta apenas por bailarinas que ficam fixas ou por pares de bailarinas que trocam de lugar entre si.

Vamos dividir o cálculo em casos disjuntos, dependendo da quantidade de pares que trocam de lugar (Princípio Aditivo):

Caso 0: Nenhuma troca.

Todas as 6 bailarinas ficam em suas posições originais. Existe 1 caminhada.

Caso 1: Exatamente um par troca de lugar (2 trocam, 4 fixas).

Basta escolhermos 2 bailarinas dentre as 6 para formar o par. Temos 6 opções para a primeira integrante e 5 para a segunda ($6 \times 5 = 30$). Como a ordem no par não importa, dividimos por 2.

$$30/2 = 15 \text{ caminhadas.}$$

Caso 2: Exatamente dois pares trocam de lugar (4 trocam, 2 fixas).

Etapas 1: Escolher as 2 bailarinas que ficarão fixas. Existem $(6 \times 5)/2 = 15$ modos.

Etapas 2: Com as 4 bailarinas restantes, formamos dois pares. A primeira bailarina disponível tem 3 opções de parceira. As duas que sobram formarão o segundo par automaticamente (1 opção). O número de formas de pareá-las é $3 \times 1 = 3$.

Pelo Princípio Multiplicativo: $15 \times 3 = 45$ caminhadas.

Caso 3: Exatamente três pares trocam de lugar (6 trocam, 0 fixas).

Pegamos a primeira bailarina (por exemplo, a de número 1). Ela tem 5 opções de parceira. Sobram 4 bailarinas. Pegamos a próxima disponível. Ela tem 3 opções de parceira. So-

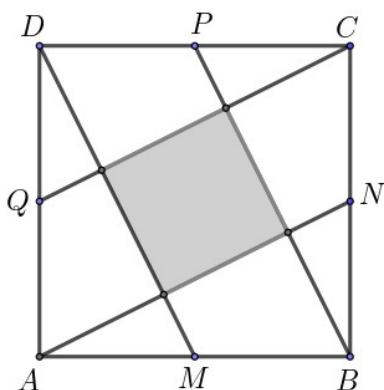
bram 2 bailarinas, que formam o último par (1 opção).

Pelo Princípio Multiplicativo: $5 \times 3 \times 1 = 15$ caminhadas.

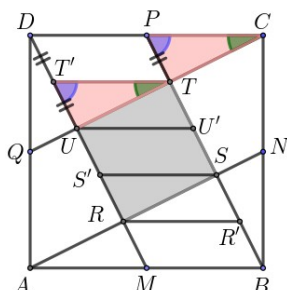
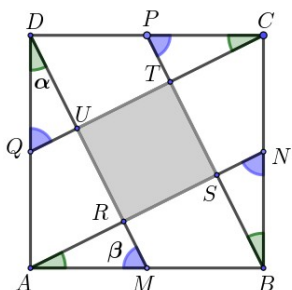
Finalmente, aplicando o Princípio Aditivo para somar todos os casos: Total = 1 (Caso 0) + 15 (Caso 1) + 45 (Caso 2) + 15 (Caso 3) = 76

Resposta do item c: Existem 76 caminhadas espelhadas.

Questão 6.3. Considere um quadrado $ABCD$. Sejam M, N, P e Q os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA , respectivamente. Observe a figura abaixo, construída a partir desses pontos. Determine a razão entre a área do quadrilátero hachurado e a área total do quadrado $ABCD$.



Solução: Denotemos por $[ABCD]$ a área do quadrado $ABCD$.



- (1) Primeiro observamos que o quadrilátero hachurado é um quadrado. Isto, segue pois no

⁶Por exemplo, realizando rotações de 90° em torno de cada vértice ou rotações de 180° em torno dos pontos médios dos lados.

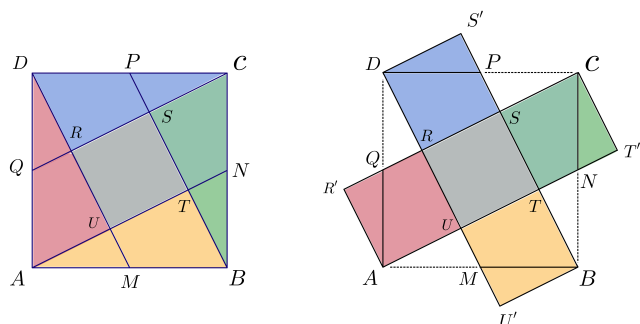
$\triangle AMD$, temos $\alpha + \beta = 90^\circ$ (onde $\alpha = \widehat{ADM}$ e $\beta = \widehat{AMD}$) e os triângulos AMD, BNA, CPB e DQB são congruentes pelo critério LAL .

- (2) Segue de (1) que os triângulos AMR, BNS, CPT e DQU são congruentes, critério ALA .
- (3) Pelos vértices do quadrado hachurado trace segmentos paralelos ao lado AB , veja figura acima à direita. Temos $T'TPD$ é paralelogramo e $\triangle TPC$ é congruente ao $\triangle UT'T$, pelo critério ALA . Segue que T' é ponto médio do segmento DU . Analogamente, R' é ponto médio de BS . Por (2), obtemos que o lado do quadrado UT é igual a $TC = UD$, pois $\triangle QUD$ é congruente a $\triangle PTC$. Como $CU'TT'$ e $RR'SS'$ são paralelogramos, obtemos que U' é ponto médio de TS e S' é ponto médio de RU .
- (4) De (3), concluímos que os paralelogramos $MBR'R, RR'SS', S'SU'U, UU'TT'$ e $T'TPD$ são congruentes. Como a diagonal de paralelogramo o divide em dois triângulos congruentes, tais triângulos possuem a mesma área. Portanto, a área do quadrado hachurado, corresponde à área de dois desses paralelogramos citados acima.
- (5) Finalmente, note que a área de cada um dos triângulos $\triangle AMD$ e $\triangle BCP$ representam $1/4$ da área do quadrado $ABCD$. Logo, $[MBPC] = \frac{1}{4}[ABCD]$. E como a área hachurada corresponde a dois dos 5 paralelogramos citados acima, obtemos $[RSTU] = \frac{2}{5}[MBPD] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}[ABCD] = \frac{1}{5}[ABCD]$. Logo, a porcentagem da área hachurada em relação ao quadrado $ABCD$ é $\frac{1}{5}$.

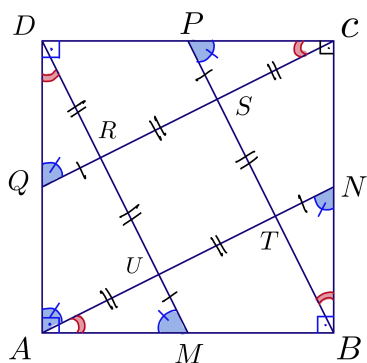
Solução 2

Uma outra solução consiste em “recortar” e “encaixar”⁶ os triângulos de cada uma das pontas, con-

forme a figura a seguir, obtendo-se uma figura formada por cinco quadrados idênticos, na qual a área hachurada corresponde a um quinto da área da figura.



Justificativa: Da construção a partir dos pontos médios de $ABCD$, podemos concluir que o quadrilátero $RSTU$ é realmente um quadrado cuja medida dos lados coincide com a medida dos segmentos DR , AU , BT e CS . De fato, os triângulos retângulos ABN , BCP , CDA e DAM são congruentes (critério LAL) e seus ângulos agudos são também ângulos internos dos triângulos AMU , BNT , CPS e DQR .

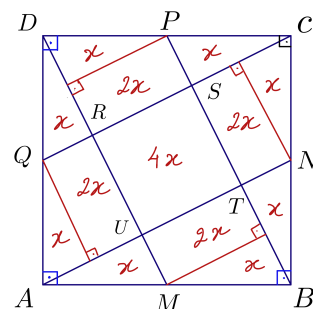


Daí, esses últimos triângulos são congruentes entre si (pelo critério ALA) e $DR = AU = BT = CS$. As retas AN e CQ são paralelas (perpendiculares a DM e BP) e sendo $DQ = QA$, segue-se que $DR = RU$ e $QR = \frac{1}{2}AU = \frac{1}{2}RU$. Portanto, considerando o triângulo AQR' congruente ao triângulo DQR ($QR' = QR$) completamos um quadrado $AURR'$, congruente ao quadrado $RSTU$. De forma análoga se obtém os outros quadrados.

3ª Ideia: Considerando as congruências estabelecidas anteriormente, a conclusão do problema

também pode ser obtida baixando-se perpendiculares dos pontos Q , M , T e S , respectivamente, às retas AN , BP , CQ e DM . Assim, formamos novos triângulos congruentes e retângulos cuja área é o dobro da área dos triângulos. Fazendo $x = [AMU] = [BNT] = [CPS] = [DQR]$, temos as áreas das regiões representadas na figura a seguir, dadas em termos de x .

$$\text{Portanto, } \frac{[RSTU]}{[ABCD]} = \frac{4x}{20x} = \frac{1}{5}.$$



Questão 6.4. Mostre que, para todo inteiro positivo n par,

$$a_n = 3^{2n} \cdot (3^{2n+1} - 1)$$

termina em 02 quando escrito em notação decimal.

Solução: Vamos mostrar por indução em n . Para $n = 2$, temos $a_2 = 19602$ que termina em 02. Suponha que o resultado é válido para n par, vamos mostrar que também é válido para $n + 2$. Para mostrar isso, vamos mostrar que o número 100 divide $a_{n+2} - a_n$.

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_n &= 3^{2(n+2)} (3^{2(n+2)+1} - 1) - 3^{2n} (3^{2n+1} - 1) \\ &= 81 \cdot 3^{2n} (3^{2n+5} - 1) - 3^{2n} (3^{2n+1} - 1) \\ &= 3^{2n} (81 \cdot 3^{2n+5} - 81 - 3^{2n+1} + 1) \\ &= 3^{2n} (6560 \cdot 3^{2n+1} - 80) \\ &= 80 \cdot 3^{2n} (82 \cdot 3^{2n+1} - 1) \end{aligned} \quad (1)$$

Observe que 20 divide 80, se 5 dividir $(82 \cdot 3^{2n+1} - 1)$, teremos mostrado que 100 divide $a_{n+2} - a_n$.

Observe que 3^2 deixa resto 4 na divisão por 5 e se n for par 3^{2n} deixa resto 1. Portanto 3^{2n+1}

deixa resto 3 na divisão por 5. Como 82 deixa resto 2 na divisão por 5, $82 \cdot 3^{2n+1}$ deixa resto 1, assim $(82 \cdot 3^{2n+1} - 1)$ deixa resto zero na divisão por 5.

Como 100 divide $a_{n+2} - a_n$ e a_n termina em 02, mostramos que para todo n par a_n termina em 02.

Questão 6.5. Há uma urna contendo 300 bolas verdes numeradas com o número 2, 200 bolas jade numeradas com o número 3 e 100 bolas violetas numeradas com o número 6. Gabriel, João e Vinicius jogam um jogo composto por 600 rodadas (em cada rodada, apenas um jogador participa). As regras são as seguintes:

- Inicialmente, todas as bolas são retiradas da urna, uma a uma, em ordem aleatória.
- Gabriel joga na i -ésima rodada se, e somente se, a i -ésima bola retirada for verde.
- João joga na i -ésima rodada se, e somente se, a i -ésima bola retirada for jade.
- Vinicius joga na i -ésima rodada se, e somente se, a i -ésima bola retirada for violeta.
- Em cada rodada, o jogador designado deve escolher um número real positivo estritamente menor que o número escrito na bola correspondente.
- O vencedor é o jogador que obtiver a maior soma dos números escolhidos ao longo de suas rodadas.

Qual é a probabilidade de que a ordem aleatória das bolas garanta uma estratégia vencedora para cada um deles?

Solução: Mostraremos que o jogador que possui uma estratégia vencedora é exatamente aquele que é o último a realizar sua primeira jogada. Suponha que os jogadores A e B já tenham jogado: o jogador A escolhe $M(A) - \varepsilon$ em sua primeira jogada (onde $M(A)$ é o supremo do conjunto de opções disponíveis para A), e o jogador B escolhe $M(B) - \delta$ (onde $M(B)$ é definido de forma análoga).

Para que o jogador C vença, basta que a soma de todos os números que ele escolher exceda tanto $600 - \varepsilon$ quanto $600 - \delta$. Isso é trivialmente possível, pois o jogador C pode fazer com que a soma dos números escolhidos seja arbitrariamente próxima de 600.

Para calcular as probabilidades requeridas, observe que, uma vez conhecido quem retira a primeira bola, a probabilidade de que o próximo “novo” jogador a aparecer seja um dos outros dois depende apenas da razão entre as bolas restantes de cada cor (podemos ignorar as bolas da cor já observada).

- Probabilidade de G ser o primeiro:

$$\Pr(G \text{ ser o primeiro}) = \frac{300}{600}.$$

$$\Pr(J \text{ antes de } V) = \frac{200}{300}, \Pr(V \text{ antes de } J) = \frac{100}{300}.$$

- Probabilidade de J ser o primeiro:

$$\Pr(J \text{ ser o primeiro}) = \frac{200}{600}.$$

$$\Pr(G \text{ antes de } V) = \frac{300}{400}, \Pr(V \text{ antes de } G) = \frac{100}{400}.$$

- Probabilidade de V ser o primeiro:

$$\Pr(V \text{ ser o primeiro}) = \frac{100}{600}.$$

$$\Pr(G \text{ antes de } J) = \frac{300}{500}, \Pr(J \text{ antes de } G) = \frac{200}{500}.$$

Assim, as probabilidades de G , J e V serem o último a realizar sua primeira jogada (e portanto vencer) são, respectivamente:

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5}, \quad \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5}, \quad \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{4}.$$

O que se simplifica para:

$$(G, J, V) = \left(\frac{9}{60}, \frac{16}{60}, \frac{35}{60} \right).$$

7. Problemas propostos

Convidamos o leitor a responder alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Envie as soluções dos problemas propostos para o e-mail: ematematicaorente@gmail.com

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, o envio do arquivo (.tex), no modelo disponível no site, deve ser realizado até **22/12/2026**.

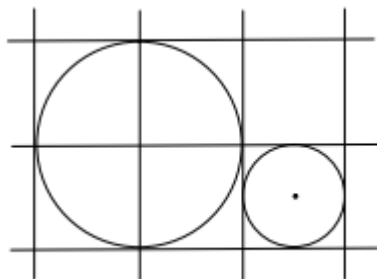
Problema 1 (OBMEP 2017 - Nível 3). A maior potência de 2 que divide o produto $1 \times 2 \times \dots \times 2023 \times 2024$ é 2^{2017} . Qual é a maior potência de 2 que divide o produto $1 \times \dots \times 4047 \times 4048 \times 2 \times \dots \times 4047 \times 4048$?

Problema 2 (OBM 2017 - 1ª fase - Nível Universitário). Considere a sequência $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k}$, para $n \geq 1$.

a) Determine $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

b) Determine $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n(2-a_n)}{n+1} \right)^{n+1}$.

Problema 3 (OBM - 2009 - Nível 2). Em uma folha quadriculada em que cada quadrado tem lado 2cm, são desenhados dois círculos como na figura ao lado. A distância mínima entre os dois círculos mede:



a) 3 cm

b) $\sqrt{10}$ cm

c) $(\sqrt{10} + 3)$ cm

d) $(\sqrt{10} - 2)$ cm

e) $(\sqrt{10} - 3)$ cm

8. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n. 38, de abril de 2026**.⁷

Problema 15 (UNEMAT - OM 2023) O tamanho da roda de uma bicicleta é determinado pela medida do seu diâmetro, em polegadas. Minha bicicleta tem aro 29 e a de minha filha aro 26. Isto é, o diâmetro da roda da minha bicicleta mede 29 polegadas e da minha filha 26 polegadas. Determine, aproximadamente, a diferença entre os comprimentos das circunferências das rodas das duas bicicletas, em centímetros. Dado: 1 polegada = 2,54cm e $\pi = 3,14$.

Solução 1. As diferenças entre os diâmetros é de 3 polegadas, ou seja, as diferenças dos raios é de 1,5 polegadas, equivalentemente, $1,5 \cdot 2,54 = 3,81$ cm. Portanto, a diferença entre os comprimentos das rodas é aproximadamente igual a $2 \cdot \pi \cdot 3,81 = 2 \cdot 3,14 \cdot 3,81 = 23,9268$ centímetros. $\square$

Solução 2. O diâmetro da primeira roda é $d_1 = 29 \cdot 2,54$ cm = 73,66cm, cujo raio é $r_1 = \frac{73,66}{2} = 36,83$ cm.

O diâmetro da segunda roda é $d_2 = 26 \cdot 2,54$ cm = 66,04cm, cujo raio é $r_2 = \frac{66,04}{2} = 33,02$ cm.

Considerando que o comprimento de uma roda é dado por $C = 2\pi r$, temos: $C_1 = 2\pi r_1 = 2 \cdot 3,14 \cdot 36,83 = 231,2924$ cm é o comprimento da primeira roda e $C_2 = 2\pi r_2 = 2 \cdot 3,14 \cdot 33,02 = 207,3656$ cm é

⁷As soluções dos Problema 16 e Problema 17 foram enviadas pelo leitor Amaro José.

o comprimento da segunda roda. A diferença então é $231,2924 - 207,3656 = 23,9268$ centímetros. $\square$

Problema 16 (OBMEP - 2013 - 1^o Fase - Nível 3). O número de alunos matriculados na Escola Municipal de Pirajuba permanece o mesmo desde 2011. Em 2012, foram construídas 5 novas salas de aula e, com isso, a média de alunos por sala foi reduzida em 6 alunos em relação à média de 2011. Em 2013, foram construídas mais 5 salas de aula e, com isso, a média de alunos por sala foi reduzida em 5 alunos em relação à média de 2012. Quantos alunos tem a Escola Municipal de Pirajuba?

- a) 3150
- b) 3180
- c) 3240
- d) 3300
- e) 3350

Solução: Seja x o número de salas em 2011 e N o número de alunos da escola, então em 2011, a média de alunos por sala era: $\frac{N}{x}$

Em 2012, foram construídas 5 salas, ficando $x+5$ salas. A média diminuiu 6 alunos: $\frac{N}{x+5} = \frac{N}{x} - 6$, que simplificando em função de x , teremos $N = \frac{6}{5}x(x+5)$ (*).

Em 2013, foram construídas mais 5 salas, ficando $x+10$ salas. A média diminuiu 5 alunos em relação a 2012: $\frac{N}{x+10} = \frac{N}{x+5} - 5$, que simplificando em função de x , teremos $N = (x+5)(x+10)$ (**).

Igualando (*) e (**), teremos a equação: $\frac{6}{5}x(x+5) = (x+5)(x+10)$ que resolvendo encontramos $x = 50$. Então $N = (50+5)(50+10) = 3300$ alunos. A resposta é o item d. $\square$

Problema 17 (OBM - 2011). De quantas maneiras é possível cobrir completamente um tabuleiro 2×2011 com dominós 1×2 (ou 2×1)?

Resolução: **Analisando casos menores**

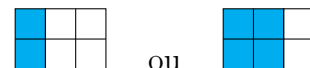
- Para um tabuleiro 2×1 : apenas 1 maneira (um dominó na vertical).



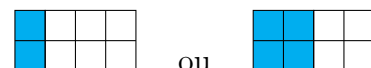
- Para um tabuleiro 2×2 : são 2 maneiras (dois na vertical ou dois na horizontal).



- Para um tabuleiro 2×3 : são 3 maneiras. Se colocar um dominó na vertical então o restante tem duas maneiras (os dois na vertical ou os dois na horizontal), mas se colocar os dois primeiros na vertical ou horizontal teremos apenas uma maneira.

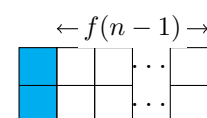


- Para um tabuleiro 2×4 : são 5 maneiras. Se preencher o primeiro na vertical o restante em branco pelo caso acima temos três maneiras, preenchendo os dois primeiros na horizontal ou vertical pelo outro caso acima teremos duas maneiras.

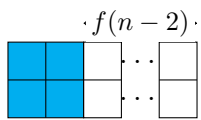


Generalizando

- Seja $f(n)$ o número de maneiras para cobrir um tabuleiro $2 \times n$.
- Olhando para a última coluna da direita, podemos colocar 1 dominó vertical, restando um tabuleiro $2 \times (n-1)$.



- Podemos colocar 2 dominós horizontais ou verticais, restando um tabuleiro $2 \times (n-2)$.



- Assim, a relação é dada por $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$.

Aplicando ao problema

A relação de recorrência é a mesma da Sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...), como $f(1) = 1 = F_2$ e $f(2) = 2 = F_3$, temos que $f(n) = F_{n+1}$.

Para $n = 2011$, o total de maneiras será $f(2011) = F_{2012}$, então o tabuleiro 2×2011 pode ser coberto de exatamente F_{2012} maneiras, correspondendo ao 2012º número de Fibonacci.

□