É Matemática, Oxente!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 39, volume 1, Julho de 2026

ISSN 2526-8651

Editorial

Caros(as) Leitores(as),

temos a satisfação de colocar à disposição de vocês a 39ª edição do É Matemática, Oxente!, o segundo número no ano do nono aniversário do jornal. Vale destacar que esta publicação é um dos projetos de extensão mais longevos em atuação no Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

Nessa edição trazemos na seção Artigo um trabalho intitulado Uma Breve Passagem Sobre as Funções Convexas em Problemas Olímpicos. Os autores Eudes Mendes Barboza e Eduardo Augusto de Lira Souza, respectivamente professor e aluno do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, numa abordagem mais voltada para olimpíadas universitárias, apresentam as principais ferramentas matemáticas utilizadas para o estudo das questões práticas de convexidade. Na seção Curiosidade com o título de O buraco negro da matemática: a constante de Kaprekar, Erick Jessé Oliveira Arruda, aluno do curso de Licenciatura em Matemática da UFRPE, apresenta uma interessante propriedade de certos números, que nos faz lembrar outras tantas abordadas por Hans Magnus Enzensberger no seu livro O Diabo dos Números.

A seção Quem pergunta quer saber! remete a uma dúvida de um leitor da Revista do Professor de Matemática e mostra como uma simples "brincadeira" com dobraduras pode gerar uma interessante questão de Geometria. Uma Senhora toma chá é a indicação de leitura de Roberta Elaine Domingos de Araújo, aluna do Mestrado em Biometria e Estatística Aplicada da Universidade Federal Rural de Pernambuco. A obra voltada para divulgação aborda como a Estatística evoluiu e ocupa hoje um espaço insubstituível na sociedade e nos diversos campos de pesquisa. A seção dedicada a resolução de problemas apresenta soluções da Olimpíada Pernambucana de Matemática 2025, segunda fase, nível 1.

Na agenda sugerimos o acesso aos sites da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMAT); neles há uma série de eventos voltados para vários âmbitos da Matemática e seu ensino. Entretanto, pela proximidade de datas, vale destacar a XII Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática (3 a 7 de agosto de 2026- Natal/RN), X Encontro luso-brasileiro de História da Matemática (11 a 14 de agosto 2026- Belém /PA) e III Colóquio de Livros Didáticos de Matemática (2 a 4 de setembro de 2026-Recife/PE).

A todos que nos prestigiam com seu apoio desejamos um excelente proveito desta edição do É Matemática, Oxente! Boa leitura.

Sumário

1. Artigo

Uma Breve Passagem Sobre as Funções Convexas em Problemas Olímpicos

Eduardo Augusto de Lira Souza [1]
Eudes Mendes Barboza [2]

A ideia de convexidade é tão antiga quanto o próprio pensamento geométrico, embora tenha levado séculos para ser formalizada como a conhecemos hoje.

Os gregos antigos, liderados pelo gênio Arquimedes, já intuíam suas propriedades. Ao estudar polígonos e círculos, Arquimedes percebeu que as figuras possuíam características únicas de perímetro e área. No entanto, durante milênios, a convexidade foi vista apenas como um aspecto visual da geometria.

A verdadeira revolução aconteceu na virada do século XIX para o XX. O matemático dinamarquês Johan Jensen e o alemão Hermann Minkowski perceberam que a convexidade não estava apenas nas formas que vemos, mas nas funções que descrevem a realidade. Foi Jensen que, em 1906, formalizou o que hoje chamamos de Desigualdade de Jensen, mostrando que, "em uma função convexa, a média dos resultados é sempre maior ou igual ao resultado da média".

Essa descoberta transformou a convexidade de uma curiosidade visual em um pilar da análise matemática e da estatística. Hoje, o legado de Jensen é o que permite aos economistas preverem riscos e aos engenheiros calcularem a resistência de materiais.

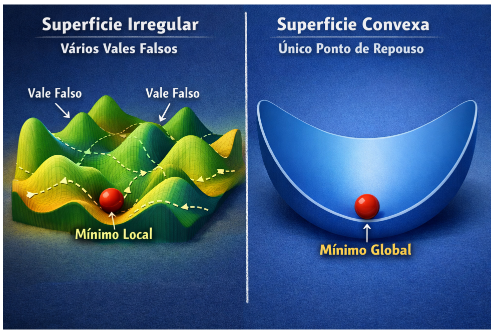
Para entender o que torna uma função convexa tão especial, imagine que você está diante de dois cenários geográficos distintos:

No primeiro, você está em uma cordilheira cheia de picos e vales irregulares (uma função não-convexa). Se você for solto ali com os olhos vendados e for instruído a encontrar o ponto mais baixo apenas descendo, você pode acabar preso em um pequeno buraco no topo de uma montanha alta, acreditando ter chegado ao fim da jornada. Isso é o que chamamos de mínimo local.

No segundo cenário, você está dentro de uma gigantesca bacia perfeitamente lisa (uma função convexa). Não importa onde você comece: qualquer movimento para baixo o levará inevitavelmente ao centro exato, o ponto mais baixo de todos. As situações acima são ilustradas na figura a seguir.

[1]Discente do Curso de Licenciatura em Matemática – UFRPE – Bolsista PIBIC FACEPE – eduardo.augustos@ufrpe.br
[2]Professor do Departamento de Matemática – UFRPE – eudes.barboza@ufrpe.br

Figura 1.1: Comparação entre uma superfície irregular e uma superfície convexa lisa



Fonte: ChatGPT

O presente artigo propõe uma análise da teoria da convexidade, buscando relacionar sempre que possível com aplicações em questões olímpicas.

O estudo que se segue não se limita à apresentação de definições e resultados teóricos, mas busca evidenciar a relevância da teoria da convexidade em diferentes contextos da matemática. Em particular, serão exploradas propriedades fundamentais das funções convexas, bem como algumas de suas aplicações em desigualdades matemáticas e problemas de otimização, destacando a importância desse conceito em diversas áreas do conhecimento.

Propriedades das Funções Convexas

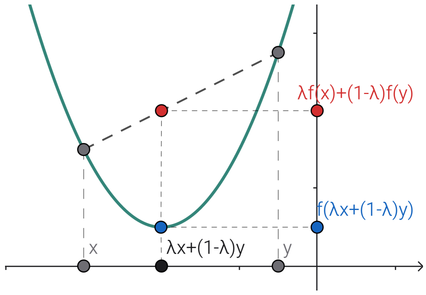
Definição 1.1. Seja I um intervalo. Uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita convexa em I se, para todo x, $y \in I$ e todo $\lambda \in [0, 1]$, satisfaz a desigualdade:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \qquad (1)$$

Equivalentemente, uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, para qualquer par de pontos x, y no domínio, com $x \neq y$, o segmento de reta com extremos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ fica acima do gráfico de f no intervalo (x, y).

Se a desigualdade em (1) for estrita, diremos que f é estritamente convexa.

Figura 1.2: Interpretação da Definição



Fonte: autoria própria.

Definição 1.2. Uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita côncava quando $-f$ é convexa.

Exemplo 1. Vejamos que a função $f(x) = x^2$ é convexa.
De fato, primeiramente consideremos que, como $\lambda \in [0, 1]$, então $\lambda - 1$ é negativo, além disso, a expressão $(x-y)^2 \geq 0$ é sempre verdadeira, então:

$$\lambda(\lambda-1)(x-y)^2 \leq 0$$
$$\lambda(\lambda-1)(x^2 - 2xy + y^2) \leq 0$$

$$\lambda(\lambda-1)x^2 + \lambda(\lambda-1)y^2$$
$$-2\lambda(\lambda-1)xy \leq 0$$

$$\lambda x^2(\lambda-1) - (1-\lambda)y^2(1+\lambda-1)$$
$$+2\lambda(1-\lambda)xy \leq 0$$

$$\lambda^2x^2 - \lambda x^2 + (1-\lambda)^2y^2$$
$$-(1-\lambda)y^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy \leq 0$$

$$\implies \lambda^2x^2 + 2\lambda x(1-\lambda)y + (1-\lambda)^2y^2$$
$$\leq \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2$$

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \leq \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2$$
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Portanto, com base na última desigualdade, $f(x)$ é convexa.

Teorema 1.1 (Desigualdade de Jensen)**.** *Uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$, se $x_1, ..., x_n \in I$ e $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0, 1]$ tais que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, então*

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n). \quad (2)$$

Demonstração. Provaremos usando indução.
Para $n = 2$, recai na definição de convexidade.
Supondo que f seja convexa e que

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

seja válida para algum $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, e para quaisquer $0 \leq \lambda_i \leq 1$ com $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ e $x_i \in I$ com $i = 1, 2, ..., n$.
Mostraremos que a desigualdade

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n+1} x_{n+1})$$
$$\leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

também é válida, para $x_1, ..., x_{n+1} \in I$ e $\lambda_1, ..., \lambda_{n+1} \geq 0$ com $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1$.

Se $\lambda_{n+1} = 1$, então

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

o que reduziria a análise ao caso $f(1 \cdot x_{n+1}) \leq 1 \cdot f(x_{n+1})$, a desigualdade se satisfaz. Supondo, então, que $\lambda_{n+1} \neq 1$, tomando

$$y = \frac{\lambda_1 x_1}{1 - \lambda_{n+1}} + \cdots + \frac{\lambda_n x_n}{1 - \lambda_{n+1}},$$

e observando que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1 - \lambda_{n+1}$ implica em

$$\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} + \cdots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} = 1 \tag{3}$$

da convexidade de f e da hipótese, segue que:

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \\
= f((1 - \lambda_{n+1}) y + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \\
\leq (1 - \lambda_{n+1}) f(y) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - \lambda_{n+1}) f \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \cdots \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n \right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\leq (1 - \lambda_{n+1}) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_1) + \cdots \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_n) \right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&= \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Reciprocamente, supondo que a desigualdade (3) é válida para qualquer $n \in \mathbb{N}$, em particular para $n = 2$ se tem que, por definição, f é convexa. □

Exemplo 2. Tomando $f(x) = x^2$ avaliada nos pontos $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$ e $\lambda_1 = \frac{2}{9}$, $\lambda_2 = \frac{3}{9}$, $\lambda_3 = \frac{4}{9}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 5}{9}\right) \\
\leq \frac{2f(1) + 3f(2) + 4f(5)}{9} \\
\frac{256}{81} \leq \frac{114}{9}.
\end{aligned}$$

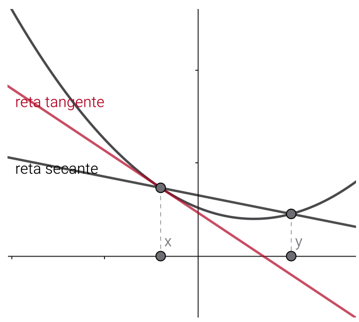
Também são válidas as propriedades sobre somas e produtos escalares (quando consideramos o escalar pertencente ao intervalo positivo dos reais) de funções convexas.

Agora relacionamos as funções convexas com o conceito de derivadas.

Teorema 1.2. *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em um intervalo aberto I. Então, f é convexa em I se, e somente se, para todo x, $y \in I$*

$$f(x) \geq f(y) + f'(y) \cdot (x - y).$$

Figura 1.3: Interpretação do Teorema 1.2



Fonte: Autoria própria.

Demonstração. Se $x = y$ a desigualdade é satisfeita, pois $f(x) \geq f(y) + f'(y) \cdot 0$. Se $x \neq y$, sem perda de generalidade, é possível considerar $x > y$. Se f é convexa, então, para todo $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Segue que

$$f(\lambda x + y - \lambda y) \leq \lambda f(x) + f(y) - \lambda f(y)$$

disto

$$f(\lambda(x-y)+y) \leq \lambda(f(x)-f(y)) + f(y). \quad (4)$$

Tomando $0 < h < x-y$ e fazendo $\lambda = \frac{h}{x-y}$, consequentemente, $h = \lambda(x-y)$. Daí, $\lambda \in (0,1)$ e portanto, de (4), segue:

$$\begin{aligned} f(y+h) &\leq \frac{h}{x-y}(f(x)-f(y)) + f(y) \\ f(y+h)-f(y) &\leq \frac{h}{x-y}(f(x)-f(y)) \\ \frac{f(y+h)-f(y)}{h} &\leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y}. \end{aligned}$$

Como f é diferenciável em y, fazendo h tender a zero, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(y+h)-f(y)}{h} &\leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \\ f'(y) &\leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \\ f'(y)\cdot(x-y) &\leq f(x)-f(y) \\ f(x) &\geq f(y) + f'(y)\cdot(x-y). \end{aligned}$$

Como se desejava. $\square$

Teorema 1.3. *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e diferenciável em I. f é convexa se, e somente se, f' é monótona não-decrescente, ou seja $f'(x) \leq f'(y)$ para todos $x, y \in I$ com $x \leq y$.*

Demonstração. Supondo f convexa e, dados quaisquer quatro pontos $x, y, z, w \in I$, que cumpram a desigualdade $x < z < y < w$, pelo Teorema 1.2, temos que:

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(w)-f(y)}{w-y}.$$

Fazendo z tender a x, então

$$\lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(w)-f(y)}{w-y}.$$

Segue que

$$f'(x) \leq \frac{f(w)-f(y)}{w-y}$$

e fazendo w tender a y, tem-se

$$f'(x) \leq \lim_{w\to y} \frac{f(w)-f(y)}{w-y},$$

então, tem-se $f'(x) \leq f'(y)$. Portanto f' é não-decrescente.

Reciprocamente, sejam $x, y \in I$ e $\lambda \in [0,1]$. Tomando

$$z = \lambda x + (1-\lambda)y$$

fica evidente que $x \leq z \leq y$. Nessas condições, pelo Teorema do Valor Médio, existem $a \in (x,z)$ e $b \in (z,y)$ de modo que

$$f'(a) = \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \quad (5)$$

e

$$f'(b) = \frac{f(y)-f(z)}{y-z}. \quad (6)$$

Disto, segue que

$$f(z)-f(x) = f'(a)(z-x) = (1-\lambda)(y-x)f'(a) \quad (7)$$

e

$$f(y)-f(z) = f'(b)(y-z) = \lambda(y-x)f'(b). \quad (8)$$

Como $a \leq b$, pela hipótese $f'(a) \leq f'(b)$. Segue que

$$\begin{aligned} &f(z) - \lambda f(x) - (1-\lambda)f(y) \\ &= (\lambda f(z) - \lambda f(z)) + f(z) - \lambda f(x) - (1-\lambda)f(y) \\ &= \lambda f(z) - \lambda f(x) + (1-\lambda)f(z) - (1-\lambda)f(y) \\ &= \lambda(f(z)-f(x)) + (1-\lambda)(f(z)-f(y)) \\ &= \lambda(f(z)-f(x)) - (1-\lambda)(f(y)-f(z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{(de (7) e (8))} \\ &= \lambda(1-\lambda)(y-x)f'(a) - (1-\lambda)\lambda(y-x)f'(b) \\ &= \lambda(1-\lambda)(y-x)(f'(a)-f'(b)) \leq 0. \end{aligned}$$

Portanto, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, mostrando a convexidade de f. $\square$

Corolário 1.4. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável e convexa em I. Se $a \in I$ é ponto crítico de f (isto é, $f'(a) = 0$), então a é ponto de mínimo absoluto de*

f em I.

Demonstração. Pelo Teorema 1.2, para toda função diferenciável e convexa $f : I \to \mathbb{R}$, vale que

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a), \quad \text{para todo } x \in I.$$

Como a é ponto crítico, temos $f'(a) = 0$. Substituindo na desigualdade acima, obtemos

$$f(x) \geq f(a), \quad \text{para todo } x \in I.$$

Logo $f(a)$ é o menor valor de f em I, isto é, a é ponto de mínimo absoluto de f. $\square$

Observação 1.1. A condição de convexidade é essencial: se f não for convexa, o fato de $f'(a) = 0$ não garante que a seja ponto de mínimo absoluto (pode ser máximo ou ponto de sela).

Corolário 1.5. *Seja $f : I \subset \mathbb{R}$ contínua e, duas vezes, diferenciável em I. A função f é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.*

Demonstração. Como f é duas vezes diferenciável, então pelo Teorema 1.3, f' é não-decrescente. Reciprocamente, uma função não-decrescente jamais terá derivadas negativas, assim, $f''(x) \geq 0$. $\square$

Exemplo 3. Sejam $a, b, c > 0$. Mostre que:

$$a^a \cdot b^b \cdot c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}.$$

Demonstração. Considere a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x\ln(x)$. Observe que:

$$f'(x) = 1 + \ln(x) \text{ e } f''(x) = \frac{1}{x}.$$

Como $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, então f é convexa em $(0, +\infty)$.

Utilizando o Teorema 1.1 com $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3} &\geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \\
\frac{a\ln a + b\ln b + c\ln c}{3} &\geq \frac{a+b+c}{3}\ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \\
a\ln a + b\ln b + c\ln c &\geq (a+b+c)\ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \\
\ln a^a + \ln b^b + \ln c^c &\geq \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c} \\
\ln(a^a \cdot b^b \cdot c^c) &\geq \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c} \\
a^a \cdot b^b \cdot c^c &\geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}.
\end{aligned}$$

$\square$

Antes de apresentarmos as questões olímpicas, enunciaremos alguns teoremas importantes, cujas demonstrações se baseiam na teoria das funções convexas. Esses resultados servirão como lemas fundamentais para a resolução dos problemas propostos.

Teorema 1.6 (Desigualdade das Médias)**.** *Sejam $a_1, a_2, ..., a_n > 0$, com $n \in \mathbb{N}$. Então:*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Demonstração. Considere a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$. Observe que:

$$f'(x) = e^x \text{ e } f''(x) = e^x.$$

Como $f''(x) = e^x > 0$ então f é convexa em $\mathbb{R}$. Logo, $\forall b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}, \forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n > 0$ com $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$ tem-se:

$$\begin{aligned}
&f(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + ... + \lambda_n b_n) \\
&\leq \lambda_1 f(b_1) + \lambda_2 f(b_2) + ... + \lambda_n f(b_n).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&e^{(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + ... + \lambda_n b_n)} \\
&\leq \lambda_1 e^{b_1} + \lambda_2 e^{b_2} + ... + \lambda_n e^{b_n}.
\end{aligned}$$

Para $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ considere $b_j = \ln a_j$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \frac{1}{n}$. Assim:

$$e^{\left(\frac{1}{n}\ln a_1 + \frac{1}{n}\ln a_2 + ... + \frac{1}{n}\ln a_n\right)} \leq \tfrac{1}{n}e^{\ln a_1} + \tfrac{1}{n}e^{\ln a_2} + ... + \tfrac{1}{n}e^{\ln a_n}.$$

Logo

$$e^{\frac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n)} \leq \tfrac{1}{n}(e^{\ln a_1} + e^{\ln a_2} + ... + e^{\ln a_n}).$$

Dessa maneira

$$e^{\frac{1}{n}[\ln(a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n)]} \leq \frac{e^{\ln a_1} + e^{\ln a_2} + ... + e^{\ln a_n}}{n}$$

Consequentemente,

$$(a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

Portanto,

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

Se $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, então a igualdade é imediata.

Reciprocamente, suponha que

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Então todas as desigualdades obtidas acima são, na verdade, igualdades. Em particular,

$$e^{\left(\frac{1}{n}\ln a_1 + \frac{1}{n}\ln a_2 + \cdots + \frac{1}{n}\ln a_n\right)} = \frac{1}{n}e^{\ln a_1} + \frac{1}{n}e^{\ln a_2} + \cdots + \frac{1}{n}e^{\ln a_n}.$$

Como a função $f(x) = e^x$ é estritamente convexa em $\mathbb{R}$, a igualdade na desigualdade de Jensen ocorre se, e somente se, $\ln a_1 = \ln a_2 = \cdots = \ln a_n$. Como o logaritmo natural é injetivo, segue que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Portanto,

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. $\square$

Teorema 1.7 (Desigualdade de Holder). *Sejam $p, q > 1$ números reais tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$, então:*

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k||b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Considere a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^q$. Observe que:

$$f'(x) = qx^{q-1}$$

$$f''(x) = q(q-1)x^{q-2}.$$

Como $f''(x) = q(q-1)x^{q-2} > 0$, então f é convexa em $(0, +\infty)$. Utilizando o Teorema 1.1, temos:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right)^q \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^q$$

onde $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n > 0$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$.

Seja $A = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p$. Escolhendo $\lambda_k = \frac{1}{A}|a_k|^p$ e $x_k = \frac{1}{\lambda_k}|a_k||b_k|$ e substituindo na desigualdade acima obtém-se:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k||b_k|\right)^q &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A}|a_k|^p \frac{1}{\lambda_k}|a_k||b_k|\right)^q \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A}|a_k|^p \left(\frac{1}{\lambda_k}|a_k||b_k|\right)^q \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A}|a_k|^{p+q} \left(\frac{1}{\lambda_k^q}|b_k|^q\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A}(|a_k|^p)^q \left(\frac{1}{\lambda_k^q}|b_k|^q\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A}(\lambda_k A)^q \left(\frac{1}{\lambda_k^q}|b_k|^q\right) \\
&= A^{q-1} \sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \\
&= A^{\frac{q}{p}} \sum_{k=1}^{n} |b_k|^q.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k||b_k| \leq A^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

□

Observação 1.2. A igualdade ocorre se, e somente se,

$$x_1 = x_2 = ... = x_n,$$

ou seja,

$$\frac{|a_1|^p}{|b_1|^p} = \frac{|a_2|^p}{|b_2|^p} = ... = \frac{|a_n|^p}{|b_n|^p}.$$

As igualdades indicam o seguinte: Se um certo $b_k = 0$ então devemos ter $a_k = 0$.

Questões Olímpicas

Questão 1. (PIC-OBMEP - 2009) Prove que num triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa é sempre menor ou igual que a metade da hipotenusa. Mostre ainda que a igualdade só ocorre se o triângulo retângulo é isósceles.

Demonstração. Sejam a, b as medidas dos catetos, c a medida da hipotenusa, x, y as medidas das projeções relativas à hipotenusa e h a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo. Assim tem-se: $c = x + y$ e $h^2 = xy$. Logo $h = \sqrt{xy}$.
Utilizando o Teorema 1.6, temos:

$$h = \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{c}{2}.$$

Portanto a altura relativa à hipotenusa h é menor ou igual à metade da medida da hipotenusa. Além disso, utilizando o Teorema de Pitágoras tem-se:

$$a^2 = x^2 + h^2$$
$$b^2 = y^2 + h^2.$$

Como a igualdade no Teorema 1.6 só ocorre se $x = y$, então:

$$a^2 = x^2 + h^2$$
$$b^2 = x^2 + h^2.$$

Logo,

$$a^2 = b^2$$
$$a = b.$$

Portanto os catetos a e b são iguais e o triângulo retângulo é isósceles. □

Questão 2. (Teste de seleção da Romênia para IMO - 1999) Sejam $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ números reais positivos tais que $x_1 + x_2 + ... + x_n = x_{n+1}$. Prove que:

$$\sqrt{x_1(x_{n+1} - x_1)} + ... + \sqrt{x_n(x_{n+1} - x_n)}$$

$$\leq \sqrt{x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) + ... + x_{n+1}(x_{n+1} - x_n)}.$$

Demonstração. Para $1 \leq j \leq n$, seja $y_j = x_{n+1} - x_j$. Aplicando o Teorema 1.7 com $p = q = 2$ e n termos, tem-se:

$$(\sqrt{x_1 y_1} + ... + \sqrt{x_n y_n})^2$$
$$\leq ((\sqrt{x_1})^2 + ... + (\sqrt{x_n})^2)\cdot$$
$$\cdot((\sqrt{y_1})^2 + ... + (\sqrt{y_n})^2)$$

Daí,

$$\sqrt{x_1 y_1} + ... + \sqrt{x_n y_n}$$
$$\leq \sqrt{x_1 + ... + x_n} \cdot \sqrt{y_1 + ... + y_n}.$$

Substituindo os valores originais:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k(x_{n+1} - x_k)} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k}$$
$$= \sqrt{x_{n+1}} \cdot \sqrt{(x_{n+1} - x_1) + ... + (x_{n+1} - x_n)}$$
$$= \sqrt{x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) + ... + x_{n+1}(x_{n+1} - x_n)}.$$

□

Questão 3. (IMO 1999) Seja $n \geq 2$ um inteiro positivo fixado. Encontre a menor constante C tal que, para todos reais não negativos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tem-se

$$\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j(x_i^2+x_j^2) \le C\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^4.$$

Demonstração. Observemos que

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^4 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j\right)^2.$$

Usando o Teorema 1.6, obtemos

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^4$$
$$\ge 4\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(2\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j\right).$$

Logo,

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^4 = 8\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j\sum_{k=1}^n x_k^2.$$

Por outro lado,

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 \ge x_i^2+x_j^2,$$

com igualdade quando $x_k=0$ para todo $k\neq i,j$. Assim,

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^4 \ge 8\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j(x_i^2+x_j^2).$$

Portanto,

$$\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j(x_i^2+x_j^2) \le \frac{1}{8}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^4.$$

Concluímos que a menor constante possível é

$$C=\frac{1}{8}.$$

□

Questão 4. (OBM – Primeira Fase – Nível Universitário – 2009)

(a) Encontre o valor mínimo da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=e^{\frac{x}{e}}-x.$$

Demonstração. Temos

$$f'(x)=\frac{1}{e}e^{\frac{x}{e}}-1$$

e

$$f''(x)=\frac{1}{e^2}e^{\frac{x}{e}}.$$

Como $f''(x)>0$, segue que f é uma função convexa. Portanto, pelo Teorema 1.4, o mínimo é global no ponto onde $f'(x)=0$. Assim,

$$\frac{1}{e}e^{\frac{x}{e}}=1 \Rightarrow e^{\frac{x}{e}}=e \Rightarrow \frac{x}{e}=1 \Rightarrow x=e.$$

Logo, o valor mínimo da função é

$$f(e)=e^{\frac{e}{e}}-e=0.$$

□

Questão 5. (IMO 1995/2) Para reais positivos satisfazendo $abc=1$, mostre que

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}.$$

Demonstração. Façamos $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$ e $z=\frac{1}{c}$. Da igualdade $abc=1$, obtemos $xyz=1$. Fazendo as devidas substituições devemos mostrar que

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{3}{2}. \tag{9}$$

Consideremos a função convexa $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x>0)$. Pelo Teorema 1.1, temos

$$f\left(\frac{x}{x+y+z}\cdot\frac{y+z}{x}+\frac{y}{x+y+z}\cdot\frac{x+z}{y}+\frac{z}{x+y+z}\cdot\frac{x+y}{z}\right)$$
$$\le\frac{x}{x+y+z}f\left(\frac{y+z}{x}\right)+\frac{y}{x+y+z}f\left(\frac{x+z}{y}\right)+\frac{z}{x+y+z}f\left(\frac{x+y}{z}\right).$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade por $x+y+z>0$, obtemos

$$(x+y+z)\,f\left(\frac{y+z+x+z+x+y}{x+y+z}\right)$$

$$\leq \frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}.$$

Logo,

$$\frac{x+y+z}{2} \leq \frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}.$$

Pelo Teorema 1.6 temos

$$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3,$$

obtemos a desigualdade desejada. □

Problemas Propostos

Problema 1.1. (IMO 2008) Sejam a, b, c, d reais positivos tais que $abcd = 1$ e

$$a+b+c+d > \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}.$$

Prove que

$$a+b+c+d < \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}.$$

Problema 1.2. (OBM – Primeira Fase – Nível Universitário – 2010) Há muito tempo em uma galáxia muito distante, utilizavam-se como referência para viagens espaciais os pontos A, B, C, D, E, F, G, H, vértices de um cubo de aresta igual a um ano-luz, tendo os quadrados $ABCD$ e $EFGH$ como faces e os segmentos AE, BF, CG, DH como arestas.

Uma nave espacial viaja com velocidade constante em trajetória retilínea de B para C. Outra nave viaja com velocidade constante igual ao triplo da velocidade da primeira, em trajetória retilínea de A para G. Sabendo que a primeira atinge o ponto C no mesmo instante em que a segunda atinge o ponto G, determine a menor distância entre as naves durante esse deslocamento.

Problema 1.3. (IMO 1995/2) Para reais positivos satisfazendo $abc = 1$, mostre que

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Problema 1.4. Mostre que de todos os retângulos de perímetro p dado, o quadrado é o que tem maior área.

Referências

[1] LIMA, Elon Lages. **Análise Real Volume 1: Funções de Uma Variável**. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

[2] KRASSOWSKI FILHO, Carlos. **Uma Introdução às Funções Convexas**. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

[3] CARVALHO, Valessa Zaigla Faustino Sousa. **Funções convexas com aplicações em problemas de Olimpíadas de Matemática**. 2013. 50 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências da Natureza, Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013.

[4] SILVA, Alvaro Antunes da. **Funções convexas e desigualdades: uma abordagem no ensino médio**. 2015. 68 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto, 2015.

[5] BOYD, Stephen; VANDENBERGHE, Lieven. **Convex Optimization**. Cambridge University Press, 2004.

[6] JENSEN, Johan. **Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes**. Acta Mathematica, 1906.

[7] STEWART, Ian. **Em Busca do Infinito: Uma História da Matemática**. Zahar, 2014.

[8] MINKOWSKI, Hermann. **Geometrie der Zahlen**. Teubner, 1910.

[9] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. Disponível em: <https://www.obm.org.br/>. Acesso em: 15 jun. 2026.

[10] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS. Disponível em: <https://obmep.org.br/>. Acesso em: 15 jun. 2026.

[11] INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD. Disponível em: <https://imomath.com/>. Acesso em: 15 jun. 2026.

2. Curiosidade

O buraco negro da matemática: a constante de Kaprekar

Erick Jessé Oliveira Arruda[3]

Um dos objetivos mais recorrentes na álgebra e na aritmética é a busca por padrões para compreender a ciência dos números, essa persistência permitiu avanços para toda a sociedade ao longo das gerações.

Para além das aplicações práticas, algumas descobertas fascinam e divertem, simplesmente por apresentarem uma "feliz e bonita coincidência" que apenas os números são capazes de proporcionar (MALHEIRO; GOMES, 2011, online). A partir desse contexto, o matemático indiano Shri Dattatreya Ramachandra Kaprekar dedicou-se a pesquisar relações aritméticas intrigantes e publicá-las, mesmo enfrentando dificuldades como a oposição e a falta de apoio aos seus trabalhos, vistos como triviais e supérfluos.

[3]Discente de Licenciatura em Matemática da UFRPE

O resultado mais conhecido é o caso do número 6174, nomeado de constante de Kaprekar, em sua homenagem. Essa descoberta foi apresentada na Conferência Matemática de Madras em 1949, e publicada na revista Scripta Mathematica, em 1953.

Esse número é também denominado de atrator de ponto fixo dos 4 dígitos e pode ser obtido seguindo o algoritmo da rotina de Kaprekar, conforme descrito a seguir, e uma vez que um número entra nessa rotina não há como escapar do fato que sempre convergirá para 6174, de maneira semelhante a um buraco negro que suga tudo para a singularidade.

A rotina consiste em seguir os seguintes passos: (i) Escolher um número de 4 dígitos, com pelo menos dois dígitos distintos, (ii) Reorganizar os algarismos em ordem decrescente e em ordem crescente, (iii) Subtrair o menor número do maior, (iv) Repetir os passos (ii) e (iii) com o novo número obtido. Repetindo o passo (iv) em até 7 vezes, a resposta final será 6174.

Esse resultado pode ser facilmente testado de maneira recreativa para despertar o interesse pela matemática e qualquer pessoa pode verificar e se surpreender. Vejamos alguns exemplos a seguir.

Exemplo 1: Número da Edição - 0039

Decrescente: 9300 e Crescente: 0039

1) 9300 – 0039 = 9261
2) 9621 - 1269 = 8352
3) 8532 - 2358 = **6174**

Exemplo 2: Número do Ano - 2026

Decrescente: 6220 e Crescente: 0226

1) 6220 – 0226 = 5994
2) 9954 – 4599 = 5355
3) 5553 – 3555 = 1998
4) 9981 – 1899 = 8082
5) 8820 – 0288 = 8532
6) 8532 – 2358 = **6174**

Nos dois exemplos acima, assim como em todas as 8991 possibilidades, o número sempre resultará na constante de Kaprekar. Essa propriedade já foi demonstrada e pode ser acessada em [1]. Todavia, existem outras constantes, como o número 495 que é o atrator de ponto fixo dos números de 3 dígitos, obtido ao aplicar a rotina de Kaprekar em até 6 vezes.

Ainda há um mistério sobre porque esses números em particular são as constantes, no entanto, segundo Silva (2021, p.16) os possíveis obtidos são sempre múltiplos de 9, reduzindo o número de possíveis respostas, e a repetida aplicação dessa rotina linear tendem a levar o número escolhido para uma constante ou um ciclo de números.

Em suma, a constante de Kaprekar é um lembrete vívido de que a matemática não se resume apenas à fórmulas rígidas, mas está repleta de enigmas elegantes. O trabalho de Dattatreya Kaprekar revela que mesmo nos algoritmos mais simples podem residir padrões surpreendentes. Explorar o número 6174 ou o 495 é, sobretudo, um convite à curiosidade: uma prova de que na aleatoriedade dos números, reside uma ordem silenciosa e fascinante que rege o nosso sistema de contagem.

Referências

[1] GOMES, Alexandra; MALHEIRO, Catarina. A rotina de Kaprekar. Jornal de Matemática Elementar, Lisboa, n. 292, p. 14-19, mar. 2011. Disponível em: https://ludicum.org/wp-content/uploads/2024/01/JME-292-Novo.pdf.Acessoem:21jan.2026.

[2] SILVA, Isadora Nobre. Curiosidades numéricas: constante de Kaprekar e soma de cubos, Vitória da Conquista, p. 14-25, 2021. Disponível em: https://www2.uesb.br/curso/matematica/matematicavca2/wp-content/uploads/2024/02/2021-06-15-Isadora-Nobre-Silva.pdf.Acessoem:23jan.2026.

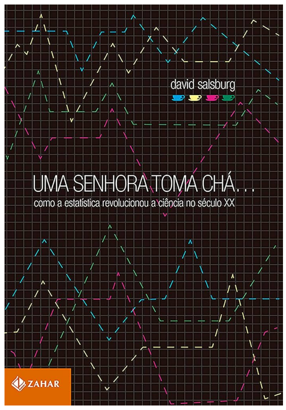
[3] LYNCH, Peter. Kaprekar's Number, 6174. That's Maths, 25 jan. 2018. Disponível em: https://thatsmaths.com/2018/01/25/kaprekars-number-6174/.Acessoem:26jan.2026.

3. Indicação de Leitura

Uma Senhora Toma Chá...: como a estatística revolucionou a ciência no século XX

Roberta Elaine Domingos de Araújo[4]

O livro **"Uma Senhora Toma Chá..."**, apresenta uma narrativa sobre o desenvolvimento da Estatística moderna e sua influência na construção da ciência ao longo do século XX. Escrita pelo estatístico norte-americano David Salsburg, a obra reúne episódios, pesquisadores e descobertas que contribuíram para transformar a maneira como hipóteses científicas passaram a ser analisadas e validadas em diferentes áreas do conhecimento.



A obra faz referência a um episódio clássico da história da Estatística envolvendo o estatístico Ronald Aylmer Fisher. Durante uma reunião social, uma senhora afirmou ser capaz de identificar se o leite havia sido colocado antes ou depois do chá em uma xícara. Fisher transformou essa situação aparentemente simples em um experimento estatístico, elaborando um teste de hipótese para verificar se a afirmação poderia ser comprovada cientificamente.

O episódio tornou-se um marco da Estatística moderna e exemplifica como métodos estatísticos podem ser utilizados para testar hipóteses e analisar resultados de forma objetiva e rigorosa.

[4] Discente do Mestrado em Biometria e Estatística Aplicada da Universidade Federal Rural de Pernambuco e monitora voluntária do Jornal É Matemática, OXENTE!

O livro está organizado em 29 capítulos que apresentam episódios marcantes da história da Estatística, permitindo conhecer métodos utilizados em setores que influenciam diretamente nossas vidas, como estudos farmacológicos e a melhoria da qualidade de produtos industriais.

No capítulo 3, Querido senhor Gosset, David Salsburg apresenta a trajetória de William Sealy Gosset, estatístico que publicou seus trabalhos sob o pseudônimo "Student". O autor descreve como Gosset desenvolveu o famoso teste t de Student ao buscar soluções para problemas enfrentados na análise de pequenas amostras, especialmente em pesquisas industriais realizadas na cervejaria Guinness. Além disso, Salsburg destaca a colaboração entre Gosset e outros pesquisadores da época, evidenciando o caráter coletivo da construção do conhecimento estatístico.

Entre os capítulos apresentados na obra, o capítulo 5, Estudos da variação de safras, foi o que mais despertou meu interesse, por destacar as contribuições de Ronald A. Fisher para a consolidação da Estatística moderna, especialmente o desenvolvimento da análise de variância (ANOVA) e dos princípios do planejamento experimental, que revolucionaram a condução e a análise de pesquisas científicas em diversas áreas do conhecimento. Nesse capítulo, são discutidas as pesquisas agrícolas realizadas em Rothamsted, nas quais o autor apresenta o desenvolvimento da análise de variância (ANOVA), dos experimentos randomizados controlados e da regressão, conceitos fundamentais para a Estatística aplicada. O capítulo demonstra como Fisher utilizou métodos estatísticos para compreender as variações observadas na produção agrícola, permitindo distinguir efeitos naturais de resultados efetivamente significativos.

Já no capítulo 11, intitulado Testes de hipótese, Salsburg apresenta discussões sobre probabilidade, inferência estatística e os trabalhos de Jerzy Neyman. O autor descreve os debates entre diferentes escolas estatísticas acerca da interpretação da probabilidade e da utilização dos valores de p (medida de significância estatística). A narrativa também evidencia que a Estatística não se desenvolveu de forma linear, mas a partir de debates teóricos, discordâncias e reformulações conceituais.

A leitura de Uma Senhora Toma Chá permite compreender que a Estatística foi construída historicamente como resposta às limitações da ciência determinista. O livro possui uma linguagem acessível, tornando-se uma leitura interessante tanto para estudantes quanto para pesquisadores. Assim, sob minha perspectiva, a obra possibilita ao leitor perceber a presença da Estatística em diversas áreas da sociedade e compreender sua importância para a produção do conhecimento científico moderno.

Referências.

[1] SALSBURG, David. Uma senhora toma chá: como a estatística revolucionou a ciência no século XX. Tradução de José Maurício Gradel. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

4. Quem pergunta, quer saber!

Revista do Professor de Matemática (RPM nº 62, 2007)

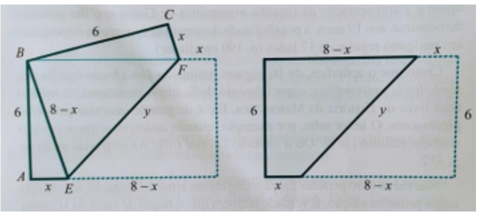
Severino Barros de Melo[5]

Na presente edição voltamos a revisitar a Revista do Professor de Matemática (RPM) no intuito de disponibilizar aos nossos leitores algumas dentre as questões interessantes que foram propostas por leitores da RPM em mais de quatro décadas de publicação, com as respectivas soluções. Nessa seção veiculada na RPM nº 62, ano de 2007, os professores Antônio Luiz Pereira e Renate Watanabe receberam a seguinte pergunta.

Pergunta: Sou uma assinante da RPM e gostaria de saber se é possível vocês me ajudarem na solução do exercício abaixo. Uma folha de papel de

[5]Docente do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco

dimensões 6×8 é dobrada de modo que os dois vértices diagonalmente opostos coincidam. Determine o comprimento do vinco.



Resposta da RPM: Os triângulos retângulos BAE e BCF são congruentes porque $\widehat{ABE} = \widehat{CBF}$ (iguais a $90 - \widehat{EBF}$. Logo, $AE = FC = FD = x$. Da figura à esquerda, obtém-se $62 + x^2 = (8 - x)^2$ e, portanto, $x = 7/4$. Do trapézio, à direita, vem $y^2 = 62 + (8 - 2x)^2 = 36 + (9/2)^2 = 225/4$. Portanto, $y = 15/2$.

5. Eventos

Fiquem Ligados!!!

- **XII BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA**
  - Local: Universidade Federal do Rio Grande do Norte - Natal/RN
  - Data: 3 a 7 de agosto de 2026
  - Mais informações: https://sbm.org.br/xii-bienal/sobre-o-evento/
- **10º ENCONTRO LUSO-BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**
  - Local: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA) - Campus Belém - Belém/PA
  - Data: 11 a 14 de agosto de 2026
  - Mais informações: https://sites.google.com/view/xelbhm/
- **I CLAMC–UMALCA JOINT MEETING IN MATHEMATICS**
  - Local: Universidade de Campinas (UNICAMP) - Campinas/SP
  - Data: 24 a 28 de agosto de 2026
  - Mais informações: https://sbm.org.br/clamc/
- **VI ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL**
  - Local: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal da Bahia (UFBA) - Salvador - Bahia
  - Data: 24 a 26 de agosto de 2026
  - Mais informações: https://www.even3.com.br/vi-ermac-703820/
- **IV WORKSHOP ONLINE DO PROFMAT**
  - Data: 17 a 19 de setembro de 2026
  - Mais informações: https://sites.google.com/view/ivworkshopdoprofmat/home?authuser=0
- **5° COLÓQUIO DE MATEMÁTICA DA REGIÃO SUDESTE**
  - Local: Universidade Federal do Rio de Janeiro - Rio de Janeiro/RJ
  - Data: 28 de setembro a 02 de outubro de 2026
  - Mais informações: https://sbm.org.br/coloquio-sudeste-5/

6. Soluções de Olimpíadas

OPEMAT 2025 - nível 1

Nesta edição apresentaremos a resolução das questões da prova da 2ª fase da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2025 referentes ao nível 1.

Estas questões foram elaborada pela comissão de provas da OPEMAT 2025 formada pelos professores Adriano Regis Rodrigues, Daniel Casimiro, Joás Elias dos Santos Rocha, Jogli Gidel da Silva Araújo, Jorge Antonio Hinojosa Vera, Ricardo Nunes Machado Junior e Thiago Dias.

Problema 1. Na papelaria *"Escola Feliz"*, Dona Sônia vende materiais escolares apenas em pacotes fechados. Existem dois tipos de pacotes:

- Pacotes com Lápis contendo 5 unidades.
- Pacotes com Borrachas contendo 7 unidades.

As compras devem ser realizadas exclusivamente combinando quantidades inteiras desses pacotes. Uma compra é considerada impossível quando existem zero maneiras de realizá-la.

a) É possível comprar exatamente 22 itens? Se sim, de quantas maneiras diferentes essa compra pode ser feita?

b) É possível comprar exatamente 16 itens? Se sim, de quantas maneiras diferentes essa compra pode ser feita?

c) Qual é a maior quantidade de itens que é impossível de comprar? Justifique sua resposta.

Solução. Sejam x a quantidade de pacotes de lápis e y a quantidade de pacotes de borrachas. O total de itens é dado por $5x+7y$, onde x e y são números inteiros não negativos.

a) Sim. Queremos $5x + 7y = 22$. Testando valores para y:

- Se $y = 0$, a equação $5x = 22$ não possui solução inteira.
- Se $y = 1$, $5x = 22 - 7 = 15 \Rightarrow x = 3$.
- Se $y = 2$, a equação $5x = 22 - 14 = 8$ não solução inteira.
- Se $y = 3$, a equação $5x = 1$ não possui solução inteira.
- Se $y \geq 4$, o valor ultrapassa 22.

Portanto, há apenas uma maneira: 3 pacotes de lápis e 1 pacote de borrachas.

b) Não. Queremos $5x + 7y = 16$. Testando todos os valores possíveis para y:

- Se $y = 0$, $5x = 16$ (não é divisível por 5).
- Se $y = 1$, $5x = 16 - 7 = 9$ (não é divisível por 5).
- Se $y = 2$, $5x = 16 - 14 = 2$ (não é divisível por 5).
- Se $y \geq 3$, o valor já ultrapassa 16 ($7 \times 3 = 21$).

Como não há valores inteiros de x e y que satisfaçam a equação, é impossível comprar exatamente 16 itens.

c) 23 itens.

Justificativa: Primeiro, verificamos que 23 é impossível testando os valores de y:

- $y = 0 \Rightarrow 5x = 23$ (não).
- $y = 1 \Rightarrow 5x = 16$ (não).
- $y = 2 \Rightarrow 5x = 9$ (não).
- $y = 3 \Rightarrow 5x = 2$ (não).

Em seguida, notamos que conseguimos formar 5 totais consecutivos logo após o 23:

- $24 = 5 \times 2 + 7 \times 2$
- $25 = 5 \times 5 + 7 \times 0$
- $26 = 5 \times 1 + 7 \times 3$
- $27 = 5 \times 4 + 7 \times 1$
- $28 = 5 \times 0 + 7 \times 4$

Como conseguimos obter 24, 25, 26, 27 e 28, qualquer valor maior que 28 pode ser obtido simplesmente adicionando pacotes de 5 unidades a um desses valores base. Logo, 23 é o maior valor impossível.

□

Problema 2. Um grupo de 5 bailarinas veste camisetas numeradas de 1 até 5. No palco, existem 5 marcas no chão também numeradas de 1 até 5. Uma "*formação*" consiste em posicionar cada bailarina sobre uma marca, de modo que todas as marcas estejam ocupadas. Dizemos que uma bailarina está na *posição original* quando o número de sua camiseta é igual ao número da marca no chão.

a) Considere apenas as 4 bailarinas numeradas de 1 até 4 e as marcas de 1 até 4. Quantas formações existem em que nenhuma bailarina esteja na sua posição original?

b) Considere agora as 5 bailarinas. Quantas formações existem em que exatamente uma bailarina esteja na **posição original** e as outras quatro estejam fora da sua **posição original**?

c) Considere novamente as 5 bailarinas. Chamamos de *caminhada* uma forma de reorganizar as bailarinas: Para cada marca X no chão é designada uma nova marca Y no chão (X pode ser igual a Y), de modo que a bailarina que estava sobre a marca X se movimentará para a marca Y.

   Podemos representar uma caminhada por uma tabela de duas linhas: na primeira linha, temos as marcas de 1 a 5; na segunda linha, embaixo de cada marca X, há a marca Y para onde a bailarina da marca X se movimenta.

   Por exemplo, a seguinte tabela

Início	1	2	3	4	5
Depois	2	1	3	4	5

   indica que as bailarinas das marcas 1 e 2 trocaram de lugar, e as demais permaneceram onde estavam.

   Uma caminhada é chamada de *espelhada* quando, começando com todas as bailarinas em suas posições originais e realizando a caminhada duas vezes seguidas, todas voltam às posições originais.

   A caminhada acima é espelhada. Já a caminhada

Início	1	2	3	4	5
Depois	2	3	1	4	5

   não é espelhada, pois, ao repeti-la, a bailarina 1 termina na marca 3, que não é sua posição original.

   Quantas caminhadas espelhadas existem?

Solução. a) Vamos analisar as escolhas da Bailarina 1 e as consequências para as demais. A Bailarina 1 está na fila para escolher uma marca. Como ela não pode ficar na marca 1, ela tem 3 opções (marcas 2, 3 ou 4).

Vamos supor que a Bailarina 1 escolha a marca 2. Agora precisamos posicionar as bailarinas 2, 3 e 4 nas marcas restantes (1, 3 e 4), garantindo que nenhuma fique na sua própria marca. Vamos dividir as escolhas da Bailarina 2 em casos disjuntos (Princípio Aditivo):

Caso 1: A Bailarina 2 escolhe a marca 1. Restam as bailarinas 3 e 4 para as marcas 3 e 4. A Bailarina 3 não pode ficar na marca 3, então ela *obrigatoriamente* vai para a marca 4. A Bailarina 4 fica com a marca que sobrou, a marca 3. Temos 1 possibilidade neste caso.

Caso 2: A Bailarina 2 escolhe a marca 3. Restam as bailarinas 3 e 4 para as marcas 1 e 4. A Bailarina 4 não pode ficar na marca 4, então ela *obrigatoriamente* vai para a marca 1. A Bailarina 3 fica com a marca que sobrou, a marca 4. Temos 1 possibilidade neste caso.

Caso 3: A Bailarina 2 escolhe a marca 4. Restam as bailarinas 3 e 4 para as marcas 1 e 3. A Bailarina 3 não pode ficar na marca 3, então ela *obrigatoriamente* vai para a marca 1. A Bailarina 4 fica com a marca que sobrou, a marca 3. Temos 1 possibilidade neste caso.

Pelo Princípio Aditivo, se a Bailarina 1 for para a marca 2, temos um total de $1+1+1=3$ formações válidas.

O mesmo raciocínio se aplicaria de forma idêntica se a Bailarina 1 tivesse escolhido a marca 3 ou a marca 4 (sempre gerando 3 ramificações válidas para cada escolha inicial).

Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, multiplicamos as opções iniciais da Bailarina 1 pelas possibilidades de desdobramento de cada escolha:
Total = 3(escolhas da Bailarina 1)×3(formações para cada escolha)= 9

Resposta do item a): Existem 9 formações.

b) Este problema pode ser dividido em duas etapas de decisão independentes:

Etapa 1: Escolher qual bailarina ficará na sua posição original.
Como temos 5 bailarinas, temos 5 escolhas possíveis (pode ser a bailarina 1, ou a 2, ou a 3, ou a 4, ou a 5).

Etapa 2: Posicionar as 4 bailarinas restantes. Uma vez fixada a bailarina que fica no seu lugar correto, restam 4 bailarinas e 4 marcas. A condição do problema exige que *nenhuma* dessas 4 fique na sua posição original. Nós já calculamos exatamente esse cenário no item a. Sabemos que existem 9 maneiras de reorganizar 4 bailarinas de modo que nenhuma fique em sua marca original.

Aplicando o Princípio Multiplicativo (já que para cada escolha da Etapa 1, temos as possibilidades da Etapa 2):
Total = 5(escolhas da fixa)×9(formas de desorganizar as outras 4)= 45.

Resposta do item b): Existem 45 formações.

c) Uma caminhada espelhada significa que, se você aplicar a mesma regra de movimento duas vezes, todas as bailarinas voltam para o ponto de partida.

Se em uma caminhada s bailarina na marca X vai para a marca Y e a bailarina da marca Y vai para uma marca Z então a bailarina da marca X não volta a sua posição original. Portanto, precisamos contar as formas de organizar as 5 bailarinas em pares de troca e posições fixas.

Isso só é possível se as bailarinas se enquadrarem em duas situações:

(a) A bailarina não se move (fica na sua posição original).

(b) Duas bailarinas trocam de lugar entre si (um "par de troca").

Vamos dividir o problema em casos disjuntos baseados na quantidade de pares que trocam de lugar (Princípio Aditivo):

Caso 0: Nenhuma troca.
Todas as 5 bailarinas ficam em suas posições originais. Existe apenas 1 caminhada assim.

Caso 1: Exatamente um par troca de lugar (2 trocam, 3 fixas).
Para formar o par que vai trocar de lugar, precisamos escolher 2 bailarinas dentre as 5.

(a) Temos 5 opções para a primeira integrante do par.

(b) Temos 4 opções para a segunda integrante.

(c) Pelo princípio multiplicativo: $5\times 4=20$. Porém, a ordem de escolha dentro do par não importa.

(d) Dividindo para corrigir a repetição: $20/2=10$.

Existem 10 caminhadas neste caso.

Caso 2: Exatamente dois pares trocam de lugar (4 trocam, 1 fixa).
Podemos construir essas caminhadas em etapas:

(a) Etapa 1: Escolher a única bailarina que ficará fixa. Temos 5 opções.
(b) Etapa 2: Separar as 4 bailarinas restantes em dois pares. Para fazer isso, pegamos a primeira bailarina disponível. Ela tem 3 opções de parceira. Após esse primeiro par ser formado, sobrarão exatamente 2 bailarinas, que formarão o segundo par obrigatoriamente (1 opção).

Pelo princípio multiplicativo:
5(escolhas da fixa) $\times$ 3(escolhas de parceira) $\times$ 1(parceiras restantes) $= 15$.
Existem 15 caminhadas neste caso.

Finalmente, aplicando o Princípio Aditivo, somamos os totais: Total $=$ 1(Caso 0) $+$ 10(Caso 1) $+$ 15(Caso 2) $= 26$.
Resposta do item c: Existem 26 caminhadas espelhadas.

□

Problema 3. Um tradicional bloco de carnaval de Pernambuco possui, em seu acervo inicial, 93 sombrinhas de frevo e 50 estandartes.

Para renovar e equilibrar o desfile, a diretoria utiliza um "Quiosque de Trocas" que trabalha segundo duas regras estritas:

Regra 1. Entregar 5 sombrinhas para receber 3 estandartes.

Regra 2. Entregar 2 estandartes para receber 6 sombrinhas.

Determine se é possível, através de uma sucessão dessas operações, aumentar o número total de adereços do acervo em exatamente 10 unidades, de modo que, ao final, a quantidade de sombrinhas seja exatamente o dobro da quantidade de estandartes. Caso seja possível, indique quantas vezes cada regra de troca deve ser utilizada. Caso contrário, explique o porquê.

Solução. Sejam:

- $S_0 = 93$: Quantidade inicial de sombrinhas.
- $E_0 = 50$: Quantidade inicial de estandartes.
- x: Número de vezes que a Regra 1 é aplicada.
- y: Número de vezes que a Regra 2 é aplicada.

Analisamos o saldo líquido de adereços (total de peças) em cada operação:

- Regra 1: Perde 5 sombrinhas, ganha 3 estandartes. Variação: $-5 + 3 = -2$.
- Regra 2: Perde 2 estandartes, ganha 6 sombrinhas. Variação: $-2 + 6 = +4$.

O problema exige que o aumento total seja de 10 unidades. Logo:

$$-2x+4y = 10 \Rightarrow -x+2y = 5 \Rightarrow x = 2y-5 \quad \text{(Eq. I)}$$

As quantidades finais de sombrinhas (S_f) e estandartes (E_f) são dadas por:

$$\begin{aligned} S_f &= 93 - 5x + 6y \\ E_f &= 50 + 3x - 2y \end{aligned}$$

A condição do problema é que $S_f = 2 \cdot E_f$. Substituindo as expressões:

$$93 - 5x + 6y = 2(50 + 3x - 2y) \tag{10}$$

Desenvolvendo a equação:

$$\begin{aligned} 93 - 5x + 6y &= 100 + 6x - 4y \\ 6y + 4y - 5x - 6x &= 100 - 93 \\ 10y - 11x &= 7 \quad \text{(Eq. II)} \end{aligned}$$

Substituímos a (Eq. I) na (Eq. II):

$$\begin{aligned} 10y - 11(2y - 5) &= 7 \\ 10y - 22y + 55 &= 7 \\ -12y &= 7 - 55 \\ -12y &= -48 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Agora, encontramos o valor de x:

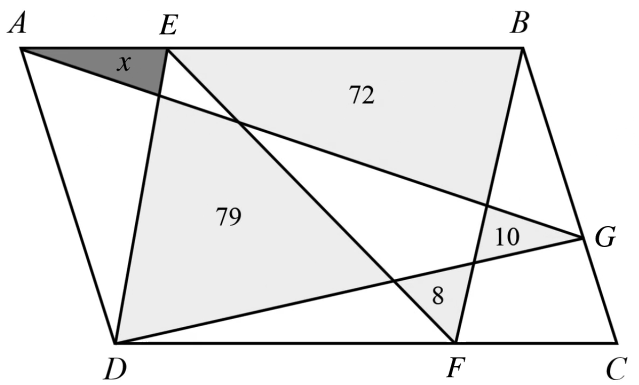
$$x = 2(4) - 5$$
$$x = 8 - 5$$
$$x = 3$$

Verificamos os valores finais com $x = 3$ e $y = 4$:

- Sombrinhas: $93 - 5(3) + 6(4) = 93 - 15 + 24 = 102$.
- Estandartes: $50 + 3(3) - 2(4) = 50 + 9 - 8 = 51$.
- Proporção: $102 = 2 \times 51$ (Correto).
- Total: $102 + 51 = 153$. Inicial era 143. Aumento de 10 (Correto).

Resposta: Sim, é possível. O bloco deve realizar a Regra 1 três vezes e a Regra 2 quatro vezes. □

Problema 4. Um grande vitral de uma igreja tem o formato de um paralelogramo $ABCD$, conforme a figura abaixo.



Por razões estruturais, engenheiros instalam cabos de aço no interior do painel, ligando vértices e pontos das bordas, exatamente como mostrado na figura. Todos os cabos são retilíneos, e seus pontos extremos pertencem aos lados do paralelogramo.
Esses cabos dividem o painel em várias regiões. As áreas de quatro dessas regiões (em metros quadrados) são conhecidas:

(i) um painel central no formato de um quadrilátero com área 79;

(ii) um painel superior no formato de um quadrilátero com área 72;

(iii) dois pequenos painéis triangulares à direita, com áreas 10 e 8.

Próxima ao vértice superior esquerdo A, há um pequeno painel triangular (a região escura na figura), cuja área é desconhecida. Determine o valor x da área desconhecida.

Solução. Denotaremos, doravante, por $[P]$ a área de um polígono P. Considere o paralelogramo $ABCD$ e os pontos

$$E \in \overline{AB}, \quad G \in \overline{BC}, \quad F \in \overline{DC}.$$

Observe inicialmente que os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle EFB$ têm bases contidas em $\overline{AB}$, e a soma das medidas dessas bases é igual à medida de AB. Além disso, ambos possuem altura igual à altura do paralelogramo $ABCD$ relativa à base AB.

Logo, a soma das áreas desses dois triângulos é igual à metade da área do paralelogramo:

$$[ADE] + [EFB] = \frac{1}{2}[ABCD].$$

Por outro lado, considere o triângulo $\triangle ADG$. Tomando AD como base do paralelogramo, nota-se que $\triangle ADG$ tem a mesma base e a mesma altura que $ABCD$. Portanto,

$$[ADG] = \frac{1}{2}[ABCD].$$

Assim, conclui-se que

$$[ADE] + [EFB] = [ADG].$$

Seja y a área da parte não sombreada do triângulo $\triangle ADE$, de modo que

$$[ADE] = x + y.$$

Seja z a área da parte não sombreada do triângulo $\triangle EFB$, de modo que

$$[EFB] = 72 + z + 8.$$

 ISSN 2526-8651

Observando a decomposição do triângulo $\triangle ADG$, temos

$$[ADG] = y + 79 + z + 10.$$

Substituindo essas expressões na igualdade

$$[ADE] + [EFB] = [ADG],$$

obtemos

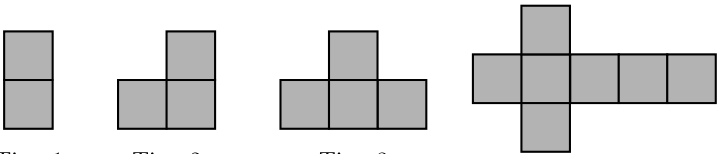
$$(x + y) + (72 + z + 8) = y + 79 + z + 10.$$

Simplificando,

$$x + 80 = 89,$$

donde concluímos que $x = 9$ $\square$

Problema 5. O pai de Mateus recortou diversas peças de quatro tipos diferentes, todas compostas por quadrados unitários, conforme ilustrado abaixo. Considere que há um estoque ilimitado de cada tipo de peça e que todas podem ser rotacionadas ou refletidas.



Tipo 1 Tipo 2 Tipo 3 Tipo 4

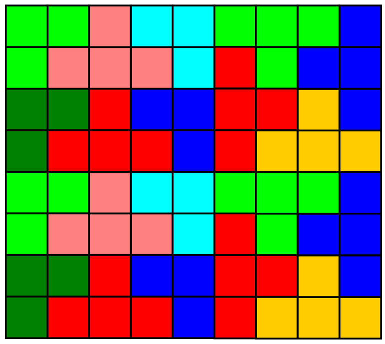
Mateus deve decidir se é possível cobrir perfeitamente (sem sobreposições ou espaços vazios) certos tabuleiros retangulares utilizando apenas alguns dos tipos de peças fornecidas. Determine se:

(a) é possível cobrir um tabuleiro 8×9 usando peças do tipo 2 e/ou 3?

(b) é possível cobrir um tabuleiro 11×13 usando peças do tipo 1 e/ou 3?

(c) é possível cobrir um tabuleiro 11×13 usando peças do tipo 1 e/ou 4?

Solução. (a) Sim



(b) Não. Observe que o total de casas do tabuleiro é um número ímpar e tanto as peças do Tipo 1 como as peças do Tipo 3 possuem uma quantidade par de quadrados, ao utilizar várias dessas peças, elas sempre vão cobrir um número par de casas.

(c) Não. Utilizando a coloração de um tabuleiro de xadrez atribua o valor 1 para cada casa escura e o valor -1 para cada casa clara.

Supondo que a casa que fica no canto esquerdo superior é escura, o tabuleiro possui 72 casas escuras e 71 casas claras. Portanto, a soma dos valores de todas as casas deste tabuleiro é

$$72 \cdot (+1) + 71 \cdot (-1) = 1.$$

Analisando a soma dos valores que cada peça pode cobrir, observamos que

- Uma peça do Tipo 1 cobre uma casa branca $(+1)$ e uma preta (-1). O valor dessa cobertura é $(-1) + (+1) = 0$.
- Uma peça do Tipo 4 pode cobrir 5 casas pretas e 2 brancas. O valor dessa cobertura é 3.
- Uma peça do Tipo 4 pode cobrir 5 casas brancas e 2 pretas. O valor dessa cobertura é -3.

Seja P_1 o número de peças do Tipo 1. Seja $P_{(4,3)}$ o número de peças do Tipo 4 com valor da cobertura igual a 3. Seja $P_{(4,-3)}$ o número de peças do Tipo 4 com valor da cobertura igual a -3. Para que cobertura seja possível é necessário que a seguinte equação admita solução nos inteiros não negativos:

$$0 \cdot P_1 + 3 \cdot P_{(4,3)} + (-3) \cdot P_{(4,-3)} = 1,$$

ou seja, $P_{(4,3)} - P_{(4,-3)} = \frac{1}{3}$ precisa admitir solução com $P_{(4,3)}$ e $P_{(4,-3)}$ inteiros, o que é um absurdo.

□

7. Problemas propostos

Convidamos o leitor a responder alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Enviem as soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, o envio do arquivo (.tex), no modelo disponível no site, deve ser realizado até **22/09/2026**.

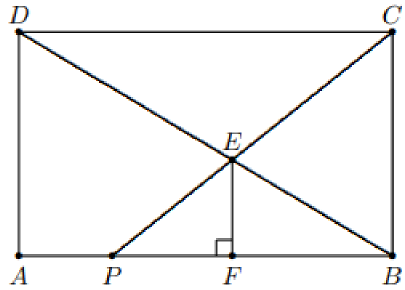
Problema 1. Sejam $x, y, z \in \mathbb{N}$ tais que

$$4^x + 4^y + 4^z = 1104.$$

Determine o valor de xyz.

Problema 2. (OBM 2017 - 1ª fase - Nível Universitário) Determine o menor número positivo A tal que, dados dois quadrados cuja soma das áreas é igual a 2017, é sempre possível encaixar esses dois quadrados, sem sobreposição, num retângulo de área A, sendo os lados dos quadrados paralelos aos lados do retângulo.

Problema 3. Na figura abaixo temos um retângulo $ABCD$ cujos lados AB e BC medem 70 cm e 42 cm, respectivamente, e o segmento AP mede um quarto do comprimento do lado AB. O ponto E é a intersecção do segmento CP com a diagonal BD. Determine a distância do ponto E ao lado AB, isto é, determine o comprimento do segmento EF.



8. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n. 37, de outubro de 2025**.[6]

Problema 4 (OBM – 2008)**.** Considere a função f, definida no conjunto dos números reais e satisfazendo $f(x) = \frac{cx}{2x+3}$ para todo $x \neq \frac{-3}{2}$. Determine o número de tais funções f para as quais $f(f(x)) = x$, para todo x tal que $f(f(x))$ está bem definida.

Solução. A função é $f(x) = \frac{cx}{2x+3}$, $x \neq \frac{-3}{2}$. Queremos que $f(f(x)) = x$ para todo x em que a composição esteja bem definida.

Substituindo $f(x)$ em si mesma:

$$f(f(x)) = \frac{c \cdot \frac{cx}{2x+3}}{2 \cdot \frac{cx}{2x+3} + 3}$$

Simplificando o denominador: $2 \cdot \frac{cx}{2x+3} + 3 = \frac{(2c+6)x+9}{2x+3}$, logo:

$$f(f(x)) = \frac{c^2 x}{(2c+6)x+9}.$$

Impondo a condição $f(f(x)) = x$, teremos:

$$\frac{c^2 x}{(2c+6)x+9} = x.$$

Multiplicando:

$$c^2 x = (2c+6)x^2 + 9x$$

Para que isso valha para todo x, os coeficientes devem coincidir:

[6] Todas as soluções desta edição foram enviadas pelo leitor Amaro José.

- coeficiente de x^2: $2c+6=0 \Rightarrow c=-3$;
- coeficiente de x: $c^2=9$, o que é compatível com $c=-3$.

Conclusão: Existe apenas um valor de c, $(c=-3)$ que satisfaz a condição, e há exatamente uma função f, $\left(f(x)=\frac{-3x}{2x+3}\right)$ com a propriedade $f(f(x))=x$. □

Problema 5 (OBM – 2012)**.** Dois trens viajam com velocidades constantes. Em comparação com o trem mais rápido, o trem mais lento demora 5 minutos a mais para percorrer 6 km e, num intervalo de 20 minutos, percorre 4 km a menos. Qual é a velocidade, em quilômetros por hora, do trem mais rápido?

a) 21
b) 27
c) 30
d) 33
e) 36

Solução: Sejam:

- v_r = velocidade do trem mais rápido (km/h)
- v_l = velocidade do trem mais lento (km/h)

Para percorrer 6 km, o trem mais lento demora 5 minutos a mais. Como 5 minutos $=\frac{1}{12}$ hora, temos:

$$\frac{6}{v_l}=\frac{6}{v_r}+\frac{1}{12} \quad (1)$$

Em 20 minutos ($\frac{1}{3}$ hora), o trem mais lento percorre 4 km a menos que o rápido:

$$v_l \cdot \frac{1}{3}=v_r \cdot \frac{1}{3}-4$$

Multiplicando toda a equação por 3, obtemos:

$$v_l=v_r-12 \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$\frac{6}{v_r-12}=\frac{6}{v_r}+\frac{1}{12}$$

Multiplicando toda a equação por $12v_r(v_r-12)$:

$$72v_r=72(v_r-12)+v_r(v_r-12)$$

$$72v_r=72v_r-864+v_r^2-12v_r$$

Simplificando, temos a equação quadrática:

$$v_r^2-12v_r-864=0$$

Resolvendo a equação, encontramos a solução positiva:

$$v_r=36 \text{ km/h}$$

A resposta é o item **e)**. □

Problema 6 (UNEMAT – OM 2023)**.** Em um certo dia, o Dr. Márcio solicitou que seus pacientes presentes compareçam em dias distintos para futuras consultas. O paciente A deve comparecer a cada 8 dias, o paciente B a cada 12 dias e o paciente C a cada 18 dias. Após quantos dias os três pacientes estarão no consultório no mesmo dia pela terceira vez?

Solução. Os três pacientes voltam juntos sempre em um intervalo igual ao mínimo múltiplo comum (MMC) dos períodos:

- A: 8 dias
- B: 12 dias
- C: 18 dias

Fatorando:

- $8=2^3$
- $12=2^2\cdot 3$
- $18=2\cdot 3^2$

$\text{MMC}=2^3\cdot 3^2=8\cdot 9=72$

Portanto, a cada 72 dias os três estarão no consultório no mesmo dia. Agora a contagem:

- 1ª vez: no dia inicial (todos já estavam presentes)
- 2ª vez: após 72 dias
- 3ª vez: após $2\times 72=144$ dias

Resposta: os três pacientes estarão juntos pela terceira vez após 144 dias. □