
É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 38, volume 1, abril de 2026

ISSN 2526-8651

Editorial

Caros Leitores,

Temos a satisfação de colocar à disposição de vocês a 38^a edição do É Matemática, Oxente! É o primeiro número de 2026, ano do nono aniversário do projeto.

Nessa edição, trazemos na seção artigo um trabalho intitulado Técnicas Olímpicas em Tabuleiros. Os autores são Ricardo Nunes Machado e Gabriel Araújo Guedes, professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco. Nesse artigo, é interessante constatar como o secular tabuleiro de xadrez tem um potencial para gerar problemas matemáticos. Muitos alunos do ensino médio lembram do tabuleiro associado ao célebre problema dos grãos de arroz, nas aulas de progressão geométrica. O artigo destaca o tabuleiro como fonte de problemas olímpicos, usando inclusive ferramentas matemáticas da atualidade, como o Teorema de Gomory.

Na seção curiosidade, com o título de A Matemática Pelas Ruas, o professor Severino Barros de Melo do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco destaca como a Matemática pode “ir aonde o povo está”.

A seção Quem pergunta quer saber! esclarece sobre a quantidade de números fracionários: Quantas frações existem?

O Homem que Mudou o Jogo é a indicação de filme, contribuição de Roberta Elaine Domingos de Araújo, aluna do Mestrado em Biometria e Estatís-

tica Aplicada da Universidade Federal Rural de Pernambuco. No filme vem em evidência o uso da estatística e da probabilidade como ferramentas para auxiliar no êxito de competições esportivas.

A seção dedicada à resolução de problemas apresenta soluções da Olimpíada Pernambucana de Matemática 2024, segunda fase, nível 3. Há também proposição de novos problemas bem como soluções daqueles apresentados na edição de número 36. Agradecemos aos leitores Amaro José de Oliveira Filho e Nélio Antônio da Conceição pelo envio de tais soluções.

Na agenda, destaque para a cerimônia realizada dia 18 de março, na qual o projeto do jornal É Matemática, Oxente! foi certificado com o Selo ODS Educação 2025, como uma das iniciativas aprovadas pela Universidade Federal Rural de Pernambuco. Este selo é um reconhecimento a projetos com impacto social, ambiental ou econômico, em sintonia com os objetivos de desenvolvimento sustentável da agenda 2030 da Organização das Nações Unidas.

A todos que nos prestigiam com seu apoio, estamos felizes em iniciar este ano juntos, mais uma vez.

Aproveitem bem desta edição.

Boa leitura!

Sumário

1 Artigo	2
Técnicas Olímpicas em Tabuleiros	2
2 Curiosidade	10
A Matemática Pelas Ruas	10
3 Indicação de Filme	11
O homem que mudou o jogo	11
4 Quem pergunta, quer saber!	12
Quantos números fracionários existem?	12
5 Eventos	13
6 Soluções de Olimpíadas	14
OPEMAT 2024 - nível 3	14
7 Problemas propostos	18
8 Soluções dos Problemas	18

1. Artigo

Técnicas Olímpicas em Tabuleiros

Ricardo Nunes Machado &
Gabriel Araújo Guedes

UFRPE - CEGEN - Departamento de Matemática
(52171-900) - Recife - PE - Brasil

INTRODUÇÃO

Problemas de cobertura de tabuleiros aparecem com frequência em olimpíadas de matemática. Em geral, nesses problemas, deseja-se decidir se um tabuleiro pode ou não ser coberto por certas peças, sem sobreposições e sem deixar lacunas. Apesar dos enunciados muitas vezes parecerem geométricos, sua resolução costuma depender de ideias combinatórias simples e elegantes.

Neste artigo, apresentamos algumas técnicas clássicas usadas em problemas olímpicos envolvendo tabuleiros. Entre elas, destacam-se a contagem de

casas, a coloração de xadrez, colorações com mais de duas cores, colorações listradas e atribuições de valores às casas. Essas ferramentas permitem, em muitos casos, provar que uma cobertura é impossível, em outros, ajudam a entender como uma cobertura pode ser construída.

Nosso objetivo é ilustrar essas técnicas por meio de exemplos selecionados e problemas propostos, mostrando como argumentos aparentemente elementares podem produzir soluções bastante sofisticadas. Para enriquecer a compreensão das técnicas abordadas, todas as ilustrações presentes neste artigo foram desenvolvidas pelos autores. Buscamos oferecer uma ampla variedade de exemplos visuais, garantindo que cada conceito seja demonstrado com a máxima clareza. Esperamos, assim, oferecer ao leitor um pequeno repertório de métodos úteis para resolver problemas de cobertura em olimpíadas de matemática.

Contagem e Colorações Básicas

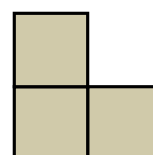
O raciocínio por contagem é a primeira e mais intuitiva ferramenta na resolução de problemas de tabuleiros. Inicialmente, um simples argumento de área, paridade ou divisibilidade pode ser suficiente para verificar a impossibilidade de uma cobertura. Nesta seção, começamos com argumentos simples de área, paridade e divisibilidade, que já são suficientes para resolver diversos problemas de cobertura.

Exemplo 1. É possível cobrir um tabuleiro 2025×2025 com dominós (peças 2×1)?

Solução. O tabuleiro possui uma quantidade ímpar de casas. Com dominós, não é possível cobrir uma quantidade ímpar de casas. Logo, não é possível cobrir o tabuleiro com os dominós. \square

Exemplo 2 (Rússia adaptado). Podemos cobrir um tabuleiro 5×7 com L -triminós?

Figura 1.1: L -triminó.

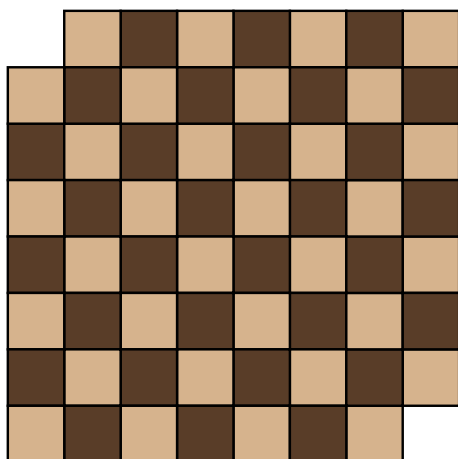


Solução. Note que um L -triminó tem 3 casas. Logo ele cobre exatamente 3 casas do tabuleiro. Como só temos esse tipo de peça, a quantidade de casas do tabuleiro coberta por essas peças tem que ser múltipla de 3. O nosso tabuleiro tem $5 \cdot 7 = 35$ casas, logo não pode ser coberto por L -triminós.

□

Exemplo 3 ([1]). Determine se é possível cobrir um tabuleiro 8×8 do qual foram retiradas a primeira casa e a casa diagonalmente oposta usando apenas dominós (peças 2×1)?

Figura 1.2: Tabuleiro 8×8 com a remoção da primeira casa e a casa diagonalmente oposta.

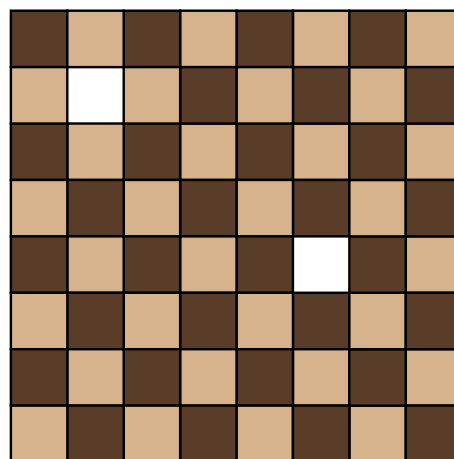


Solução. Observe que, neste tabuleiro, foram removidas duas casas escuras. Cada peça de dominó sempre cobre uma casa clara e uma escura no tabuleiro. Deste modo, se fosse possível cobrir o tabuleiro usando apenas dominós, deveríamos ter o tabuleiro com a quantidade de casas escuras igual à quantidade de casas claras. Neste tabuleiro existem 32 casas claras e 30 casas escuras. Logo, não é possível fazer tal cobertura.

□

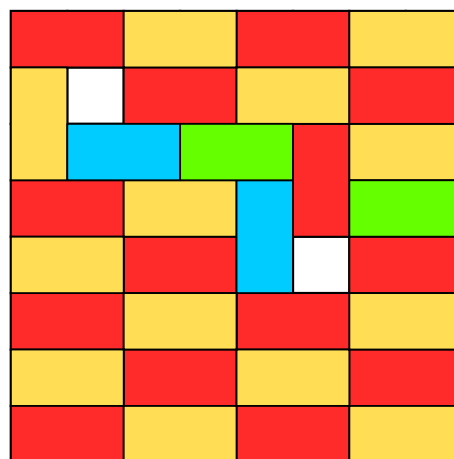
Exemplo 4. Determine se é possível cobrir um tabuleiro 8×8 do qual foram retiradas duas casas, conforme a Figura 1.3 usando apenas dominós (peças 2×1)?

Figura 1.3: Tabuleiro 8×8 com duas casas de cores distintas removidas.



Solução. Sim, é possível. Veja a Figura 1.4:

Figura 1.4: Cobertura do Tabuleiro da Figura 1.3 usando dominós.



□

De fato, o Exemplo 4 é um caso particular do seguinte teorema:

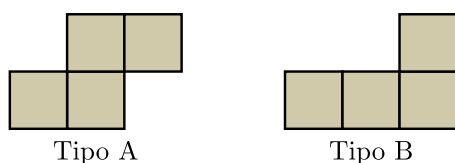
Teorema 1.1 (Teorema de Gomory [8]). *Seja um tabuleiro de xadrez de dimensões $m \times n$, onde o produto mn é um número par. Se removermos do tabuleiro exatamente duas casas de cores opostas (uma clara e uma escura), a malha resultante sempre admitirá uma cobertura perfeita utilizando exclusivamente peças de dominó 2×1 .*

Observação 1.1. Ralph E. Gomory foi um destacado matemático norte-americano e um dos pioneiros da programação inteira e da pesquisa operacional, tendo também desempenhado papel de grande

relevância na pesquisa científica da IBM. No contexto da matemática olímpica, seu nome está associado ao chamado Teorema de Gomory, que trata de maneira elegante do problema de recobrir, com peças de dominó, tabuleiros com casas removidas. A demonstração desse resultado apoia-se na modelagem do tabuleiro por meio de grafos e na construção de ciclos hamiltonianos. Como tais ferramentas se afastam do enfoque combinatório adotado neste trabalho, a prova formal do teorema foge ao escopo deste artigo. Para saber mais sobre Gomory veja [9].

Exemplo 5 (Seletiva Fortaleza – Rioplatense/2012 – Nível A [4]). Benjamim tem 25 peças A e 25 peças B, cujos formatos estão mostrados na figura.

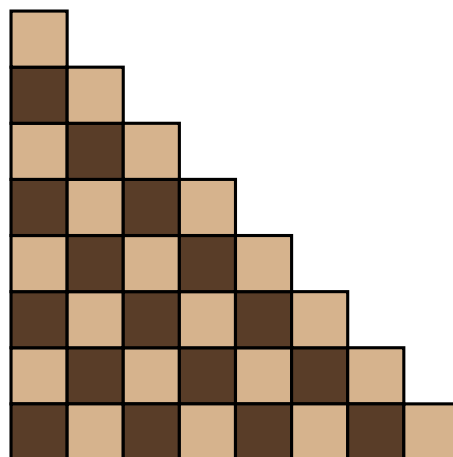
Figura 1.5: Peças do tipo A e B.



Com as 50 peças, Benjamim pretende cobrir um tabuleiro completamente, sem deixar buracos e nem fazer sobreposições. Ele sabe que cada quadradinho da peça A e que cada quadradinho da peça B tem 1 cm^2 de área. Sabendo que ele pode girar as peças do jeito que ele quiser, podendo inclusive “inverter” qualquer peça, pergunta-se:

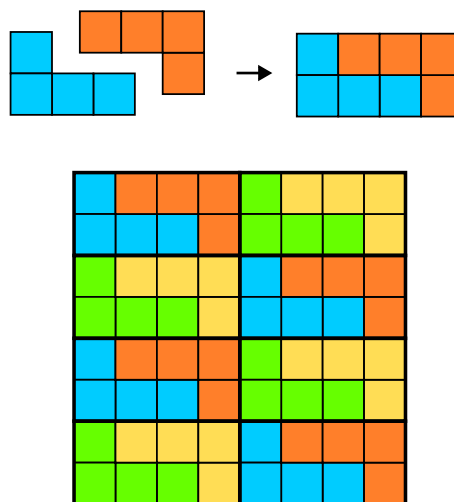
- Se o tabuleiro for 8×8 (ou seja, ele tiver 8 cm de comprimento por 8 cm de largura), é possível que ele consiga cobrir todo o tabuleiro?
- Se o tabuleiro for 8×9 , é possível que ele consiga cobrir todo o tabuleiro?
- Se o tabuleiro for 9×9 , é possível que ele consiga cobrir todo o tabuleiro?
- Se todas as casas acima de uma diagonal do tabuleiro 8×8 forem retiradas (veja Figura 1.6), é possível que ele consiga cobrir todo o tabuleiro?

Figura 1.6: Tabuleiro 8×8 sem as casas acima da diagonal principal.



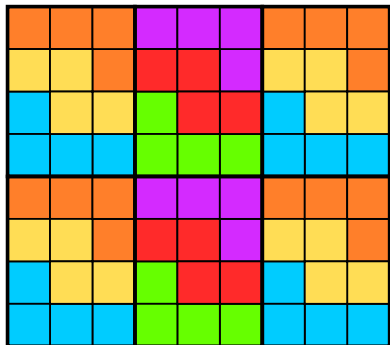
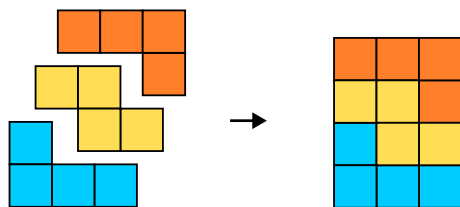
Solução. (a) Os dois tipos de peças possuem área 4 cm^2 e o tabuleiro possui área $8 \times 8 = 64 \text{ cm}^2$ que é múltiplo de 4. Vamos mostrar que é possível fazer a cobertura. Juntando duas peças do tipo B, obtemos um retângulo 2×4 e com 8 desses retângulos podemos cobrir o tabuleiro, conforme a figura abaixo:

Figura 1.7: Cobertura do tabuleiro 8×8 utilizando peças do Tipo B.



- Os dois tipos de peças possuem área 4 e o tabuleiro possui área 8×9 que é múltiplo de 4. Vamos mostrar que é possível fazer a cobertura. Juntando duas peças do tipo A e uma do tipo B podemos obter um retângulo 4×3 . Utilizando 6 desses retângulos podemos fazer a cobertura, conforme na figura a seguir.

Figura 1.8: Cobertura do tabuleiro 8×9 utilizando peças do Tipo A e B.



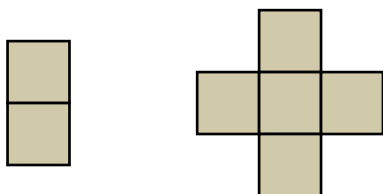
(c) O tabuleiro possui área 9×9 que não é múltiplo de 4. Portanto, não é possível fazer a cobertura.

(d) A área do tabuleiro é $1 + 2 + \dots + 8 = 36$ que é múltiplo de 4. Porém, vamos mostrar que não é possível cobrir o tabuleiro. Na coloração do tabuleiro de xadrez, os dois tipos de peças cobrem duas casas claras e duas casas escuras. O tabuleiro do item (d) possui 20 casas claras e 16 casas escuras, portanto não é possível fazer a cobertura.

□

Exemplo 6 (Rússia 1997 [6]). Podemos cobrir um tabuleiro 75×75 usando dominós e cruzes (peça de 5 quadrados)?

Figura 1.9: Peça do tipo dominó e do tipo cruz.



Solução. Utilizando a coloração de um tabuleiro de xadrez atribua o valor 1 para cada casa escura e o valor -1 para cada casa clara.

Supondo que a casa que fica no canto esquerdo superior é escura, o tabuleiro possui $\frac{75^2+1}{2} = 2813$

casas escuras e $\frac{75^2-1}{2} = 2812$ casas claras. Portanto, a soma dos valores de todas as casas deste tabuleiro é

$$2813 \cdot (+1) + 2812 \cdot (-1) = 1.$$

Analisando a soma dos valores que cada peça pode cobrir, observamos que

- Uma peça de Dominó cobre uma casa clara (-1) e uma escura ($+1$). O valor dessa cobertura é 0.
- Uma peça em forma de Cruz com centro escuro cobre 4 casas claras e 1 escura. O valor dessa cobertura é -3 .
- Uma peça em forma de Cruz com centro claro cobre 1 casa clara e 4 escuras. O valor dessa cobertura é 3.

Seja D o número de dominós, C_E o número de cruzes com centro escuro e C_C o número de cruzes com centro claro. Para que a cobertura seja possível é necessário que a seguinte equação admita solução nos inteiros não negativos:

$$0 \cdot D + 3 \cdot C_C + (-3) \cdot C_E = 1,$$

ou seja, $C_C - C_E = \frac{1}{3}$ precisa admitir solução com C_E e C_C inteiros, o que é um absurdo. □

Coloração com Mais Cores

Em muitos problemas de cobertura, a tradicional coloração com duas cores não é suficiente para resolvê-los. Em alguns casos, torna-se natural recorrer a colorações com três ou mais cores. Esse refinamento permite obter novos invariantes e, com eles, demonstrar impossibilidades ou localizar posições especiais em uma cobertura.

Exemplo 7 ([3]). Um tabuleiro 5×5 é coberto por oito peças 1×3 e uma peça 1×1 . Justifique por que a peça 1×1 deve ficar exatamente na casa do centro do tabuleiro.

Solução. Vamos pintar o tabuleiro com as três cores da seguinte forma:

Figura 1.10: Tabuleiro 5×5 com 3 cores.

A	B	C	A	B
B	C	A	B	C
C	A	B	C	A
A	B	C	A	B
B	C	A	B	C

Observe que o tabuleiro tem 8 casas com a cor A, 9 com a cor B e 8 com a cor C. Colocando uma peça 1×3 sobre o tabuleiro, ela sempre vai cobrir uma casa de cada cor. Concluimos que a peça 1×1 deve estar sobre uma casa da cor B. Vamos girar o tabuleiro 90 graus no sentido horário obtendo a nova coloração:

Figura 1.11: Rotação do tabuleiro da Figura 1.10.

B	A	C	B	A
C	B	A	C	B
A	C	B	A	C
B	A	C	B	A
C	B	A	C	B

Pelo mesmo argumento anterior, a distribuição de cores se mantém (8 casas da cor A, 9 casas da cor B, 8 casas da cor C). Logo, a peça 1×1 também deve ocupar uma casa da cor B nesta nova configuração. Para satisfazer ambas as condições simultaneamente, a posição da peça deve estar na interseção. Observando as duas figuras sobrepostas, a única casa que possui a cor B na primeira pintura e a cor B na segunda pintura é a casa central.

A seguir, exibimos uma cobertura válida:

Figura 1.12: Uma cobertura válida.

Amarelo	Amarelo	Amarelo	Vermelho	Verde
Amarelo	Amarelo	Amarelo	Vermelho	Verde
Vermelho	Verde	Azul	Vermelho	Verde
Vermelho	Verde	Amarelo	Amarelo	Amarelo
Vermelho	Verde	Amarelo	Amarelo	Amarelo

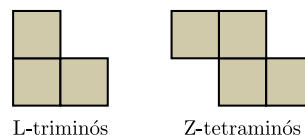
□

Coloração Listrada

Em vários problemas de cobertura, a coloração de xadrez não é a mais adequada para revelar a estrutura envolvida. Nesses casos, pode ser mais conveniente adotar uma coloração em faixas alternadas, pintando, por exemplo, colunas consecutivas com cores diferentes. Essa estratégia, que chamaremos de coloração listrada, permite analisar com mais precisão como cada peça ocupa o tabuleiro e pode tanto excluir certas coberturas quanto determinar quais configurações são possíveis. Nesta seção, veremos exemplos em que essa ideia se mostra especialmente útil.

Exemplo 8 (Estônia 1993 [5]). Para quais naturais n é possível cobrir um retângulo de tamanho $3 \times n$ com as peças mostradas na Figura 1.13?

Figura 1.13: Peças L-triminó e Z-tetraminó.



Solução. Pinte o tabuleiro com números da seguinte forma: as linhas 1 e 3 com o número 1, e a linha 2 com o número -1 . A soma de todos os números no tabuleiro é n .

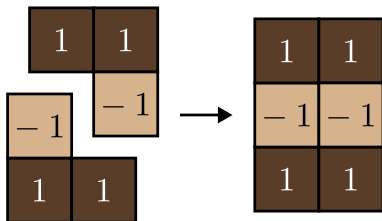
Figura 1.14: Tabuleiro $3 \times n$ com coloração listrada e atribuição de valores às casas.

1	1	1	1	1	...	1
-1	-1	-1	-1	-1	...	-1
1	1	1	1	1	...	1

Veja que a soma dos números cobertos por um Z-tetraminó é sempre zero. A soma dos números cobertos por um L-triminó é sempre 1 ou -1 (veja as Figuras 1.15 e 1.16). Para cobrir o tabuleiro, a soma total dos números cobertos pelas peças deve ser n .

Se colocarmos as peças do tipo L de modo que a soma das casas seja 1, é possível completar o tabuleiro de 2 em 2, de modo que a soma seja 2 a cada duas colunas.

Figura 1.15: Juntando duas peças L -triminós, cada uma com soma igual a 1.

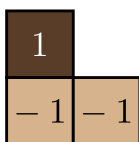


No final chegaremos em n , se n for par. Então para qualquer n par, podemos completar o tabuleiro apenas com L -triminós.

Se adicionarmos uma Z -tetraminó ao tabuleiro, a soma máxima de todas as peças será $(n - 2)$, pois cada Z -tetraminó possui soma zero e após adicionar uma peça deste tipo, no máximo cabem $(n - 2)$ L -triminós, portanto a soma máxima possível é $(n - 2)$. Logo, não podemos utilizar Z -tetraminós.

Vamos mostrar que n não pode ser ímpar. Como não podemos utilizar as peças Z -tetraminós, vamos analisar configurações com as peças L -triminós. Para cada peça do tipo L colocada como na Figura 1.16,

Figura 1.16: L -triminó com soma -1 .

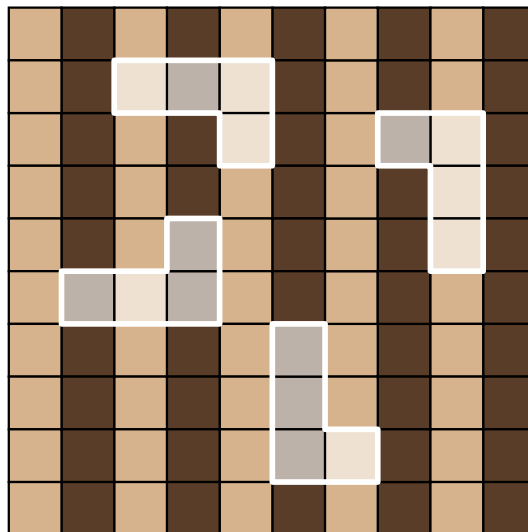


a soma será igual a -1 e a soma total da cobertura será menor que n . Como toda peça deve contribuir com soma $+1$, cada L -triminó ocupa exatamente duas casas de uma das linhas extremas e uma casa da linha central. Isso força o recobrimento a se organizar em blocos 3×2 , como na Figura 1.15. Portanto, n deve ser par. \square

Exemplo 9. Mostre que é impossível cobrir um tabuleiro 10×10 utilizando apenas L -tetraminós.

Solução. Vamos fazer uma coloração listrada nesse tabuleiro, conforme a Figura 1.17. Perceba que independentemente de como seja colocada no tabuleiro, um L -tetraminó sempre cobre 1 casa escura e 3 claras ou 3 escuras e 1 clara como na figura abaixo:

Figura 1.17: Tabuleiro 10×10 com coloração listrada na vertical.



Vamos chamar de x a quantidade L -tetraminós que cobrem 3 casas claras e uma escura do tabuleiro e de y as que cobrem 3 casas escuras e uma clara. Logo, temos o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ 3x + y = 50 \text{ (n}^\circ \text{ de casas claras)} \\ x + 3y = 50 \text{ (n}^\circ \text{ de casas escuras)}. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 3 e subtraindo pela segunda equação, obtemos $2y = 25$. Absurdo, pois x e y são números inteiros. Logo, não podemos cobrir o tabuleiro 10×10 apenas com esses tipos de peças. \square

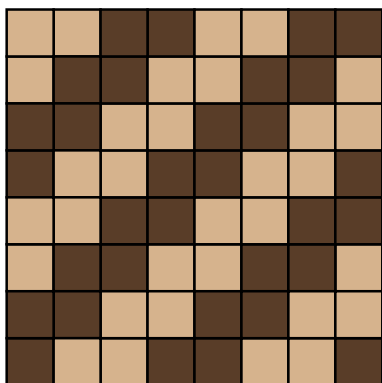
Outros Tipos de Coloração

Embora as colorações de xadrez, listrada e com mais cores sejam especialmente frequentes, elas estão longe de esgotar as possibilidades. Em muitos problemas, a chave da solução está em construir uma coloração adaptada à peça ou à configuração estudada, de modo a destacar alguma regularidade que não seria percebida pelas colorações mais usuais.

Exemplo 10 ([3]). Um tabuleiro 8×8 pode ser coberto por 15 peças 1×4 e uma peça 2×2 sem que haja sobreposição?

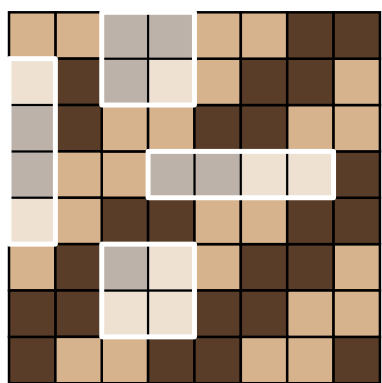
Solução. Vamos colorir esse tabuleiro com a coloração dupla diagonal:

Figura 1.18: Tabuleiro 8×8 com coloração dupla diagonal.



Nessa coloração temos 32 casas claras e 32 escuras. Cada peça 1×4 cobre duas claras e duas escuras independentemente de como for colocada no tabuleiro. E a peça 2×2 cobre uma casa escura e três claras ou cobre três casas escuras e uma clara.

Figura 1.19: Tabuleiro 8×8 com coloração dupla diagonal e algumas peças sobre o tabuleiro.



Logo, as 15 peças 1×4 cobrem 30 casas escuras e 30 casas claras. Com a adição da peça 2×2 , teríamos a cobertura de 31 casas escuras e 33 claras ou 33 casas escuras e 31 claras. Portanto, concluímos com esta contagem que tal cobertura é impossível. \square

Conclusão

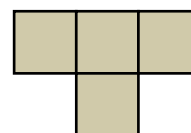
Ao longo deste artigo, vimos que muitos problemas de cobertura de tabuleiros podem ser resolvidos por meio de ideias combinatórias simples, mas bastante eficazes. Em tais problemas, a análise não depende apenas da geometria das peças, mas também da geometria do próprio tabuleiro e da maneira

como ambas interagem. Nesse contexto, contagem, colorações e atribuição de valores surgem como ferramentas capazes de revelar restrições ocultas, excluir certas coberturas e, em alguns casos, descrever as configurações possíveis. O domínio dessas técnicas amplia significativamente o repertório do aluno olímpico e contribui para o desenvolvimento de uma intuição mais refinada na resolução de problemas. A fim de consolidar esse repertório e desenvolver a intuição necessária para aplicar o método correto a cada situação, o leitor é fortemente encorajado a tentar resolver os problemas propostos a seguir.

Problemas propostos

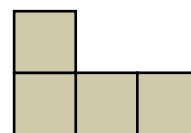
Problema 1 ([6]). É possível cobrir um tabuleiro 10×10 usando apenas T -tetraminós, como na figura abaixo?

Figura 1.20: T -tetraminó.



Problema 2 ([6]). Para quais valores de m e n podemos cobrir um tabuleiro $n \times m$ utilizando apenas L -tetraminós como na figura abaixo?

Figura 1.21: L -tetraminó.

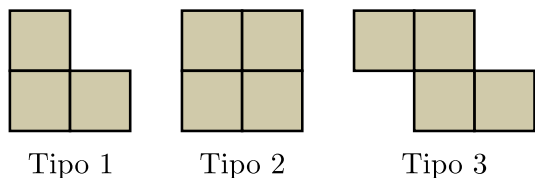


Problema 3. Resolva o Exemplo 9 novamente, agora utilizando a ideia de atribuir o valor $+1$ para cada casa escura e o valor -1 para cada casa clara.

Problema 4 (Rússia 1996). É possível cobrir um tabuleiro 5×7 com traminós em L (isto é, figuras obtidas de um quadrado 2×2 removendo-se um quadradinho de canto), sem ultrapassar sua borda, em várias camadas, de modo que cada casa do tabuleiro seja coberta pelo mesmo número de traminós?

Problema 5 (Olimpíada de Maio 2008 [7]). Matias cobriu um tabuleiro quadrado de 7×7 , dividido em casas de 1×1 , com peças dos três tipos a seguir

Figura 1.22: Os três tipos de peças.

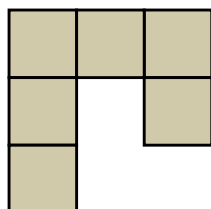


sem buracos nem superposições, e sem sair do tabuleiro. Cada peça do tipo 1 cobre exatamente 3 casas e cada peça do tipo 2 ou do tipo 3 cobre exatamente 4 casas. Determine a quantidade de peças do tipo 1 que Matias pode ter utilizado. (As peças podem girar e ser viradas).

Problema 6 (Turkish IMO TST - 2004). Um tabuleiro 11×11 é coberto por uma peça 1×1 e 40 peças 1×3 . Determine todos os locais onde a peça 1×1 pode ser colocada no tabuleiro.

Problema 7 (IMO - 2004 [2]). Defina um “gancho” (hook) como a figura composta por seis quadrados unitários, conforme mostrado na imagem abaixo, ou qualquer uma das figuras obtidas através de rotações e reflexões desta peça.

Figura 1.23: Gancho.



Determine todos os retângulos $m \times n$ que podem ser cobertos sem lacunas e sem sobreposições por ganchos, de modo que:

- o retângulo seja coberto sem lacunas e sem sobreposições;
- nenhuma parte de um gancho cubra uma área fora do retângulo.

Problema 8. Se um retângulo $a \times b$ é ladrilhado por barras $1 \times n$ (com rotações permitidas), prove que $n \mid a$ ou $n \mid b$.

Problema 9. Considere um tabuleiro $n \times n$ com a coloração usual de xadrez, no qual cada casa contém um número inteiro. Se a soma dos números em

cada linha e em cada coluna é par, prove que a soma de todos os números localizados nas casas escuras também é par.

REFERÊNCIAS

- [1] Golomb, Solomon W. Polyominoes: puzzles, patterns, problems, and packings. Vol. 16. Princeton University Press, 1996.
- [2] IMO. International Mathematical Olympiad. 2004. https://www.imo-official.org/year_info.aspx?year=2004. Acesso em: 19/02/2026.
- [3] Kin Y. Li, Coloring Problems, Mathematical Excalibur, 2016, V. 20, N. 3.
- [4] Barbosa, J. A. F. *Como cobrir tabuleiros*. Em: OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. 23^a Semana Olímpica, 2020. Disponível em: https://www.obm.org.br/content/uploads/2020/02/23_S0_Diego_Eloi_Tabuleiros_Nivel_1_Armando_compressed.pdf. Acesso em: 19 mar. 2026.
- [5] EMO. Estonian Mathematical Olympiad. 1993. <https://www.math.olympiadid.ut.ee/eng/archive/prob9293.pdf>. Acesso em: 19/02/2026.
- [6] Holanda, B. *Programa Olímpico de Treinamento (POTI - OBM): Combinatória, Aula 9, Nível 2*, Disponível em: <https://poti.obm.org.br/>. Acesso em: 19/03/2026.
- [7] Olimpíada de Maio. 2008. <https://www.obm.org.br/content/uploads/2016/12/maio2008.pdf>. Acesso em: 19/02/2026.
- [8] Martin Gardner. *The Colossal Book of Short Puzzles and Problems*. W. W. Norton & Company, New York, 2006.
- [9] https://en.wikipedia.org/wiki/Ralph_E._Gomory. Acesso em: 19/03/2026.

2. Curiosidade

A Matemática Pelas Ruas

Severino Barros de Melo¹

Caminhando em meio a uma multidão de turistas que invadem a cidade italiana de Nápolis durante a primavera, eis que os visitantes se deparam com um fato inusitado, talvez único em espaços turísticos. Em meio a lojas, bares, cafés, apresentações musicais, surge uma banca especializada em Matemática.

Seu proprietário, um apaixonado pela Matemática, teve a original ideia de disponibilizar as famosas adivinhações envolvendo tabelas de números. O turista ao passar recebe um convite: “Escolha um número dessa cartela e não me diga qual é. Farei perguntas sobre os números das demais cartelas e ao final descobrirei o número que você escolheu”. O transeunte entra na brincadeira, fica admirado com a inteligência do “matemático” e antes de continuar o passeio deixa algum dinheiro na caixinha do “gênio” que dessa forma vai ganhando uma graninha nas horas vagas.

Não deixa de ser um modo criativo de democratizar a temida matemática e faz lembrar uma afirmação do matemático espanhol Miguel de Guzmán, segundo a qual um matemático considera essa ciência, para além de qualquer outra coisa, também um jogo.

A foto abaixo dá uma ideia da originalidade da atividade e da banquinha, em meio a um cenário bem diferente, com o título *Universidade Matemática de Rua* e a informação hilária, *entrega diploma em 3 minutos* (para quem descobrir o truque, é claro).



Fonte: acervo do autor

Em outra cidade da Itália, Siracusa, onde o peso da história também é fortemente sentido, encontramos em muitos locais referências ao matemático Arquimedes que ali viveu por muito tempo (ver indicação de Leitura, *É Matemática, Oxente!*, n.22). Praças, monumentos e outras coisas homenageiam o filho ilustre. E, surpreendentemente, numa loja de artesanato encontra-se à venda um jogo criado pelo próprio Arquimedes. Na vitrine há uma explicação sobre o jogo e conseqüentemente popularizando a Matemática. No cartaz lê-se: “*O Stomachion de Arquimedes carrega em si uma magia milenar: 14 peças que podem formar um quadrado de 536 modos diferentes. Jogando, se pode formar além disso infinitas figuras geométricas e figuras de pessoas, animais ou qualquer outro objeto sugerido pela criatividade. Aqui ao lado temos propostas algumas soluções possíveis, cabe a você encontrar outras mais.*”

Arquimedes nasceu em Siracusa em 287 a.C.. Matemático, físico, astrônomo, é considerado um dos maiores cientistas da história. O desenho do Stomachion foi encontrado num seu pergaminho. Segundo muitos estudiosos, o estudo deste quebra-cabeça possibilitou a Arquimedes interessar-se pelo cálculo combinatório, um ramo da Matemática que se desenvolveria somente 2000 anos mais tarde”. (Tradução do autor).

¹Docente do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco

Figura 2.2: O jogo de Arquimedes



Fonte: Google imagem

Mas nem sempre as coisas funcionam tão bem em relação à Matemática. Numa nota explicativa ao lado de um quadro, em um museu na cidade de Faro (Portugal) há um erro na numeração romana colocada ao lado da obra em exposição.

Figura 2.3: Nota explicativa



Fonte: acervo do autor

Refletindo sobre as curiosidades mencionadas, podemos parafrasear o compositor mineiro Milton Nascimento dizendo: “a Matemática tem que ir onde o povo está”.

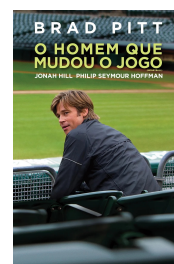
3. Indicação de Filme

O Homem que Mudou o Jogo

Roberta Elaine Domingos de Araújo²

²Discente do Mestrado em Biometria e Estatística Aplicada da Universidade Federal Rural de Pernambuco e monitora voluntária do Jornal *É Matemática, Oxente!*

Figura 3.1: Filme O Homem que Mudou o Jogo ilustrando o uso da matemática no esporte



Fonte: HBO MAX (2026).

O beisebol é um dos esportes mais tradicionais dos Estados Unidos e possui uma longa história marcada por estratégias, estatísticas e decisões técnicas. Nesse cenário competitivo, as equipes buscam constantemente novas formas de melhorar seu desempenho e superar adversários com maiores recursos financeiros.

É nesse contexto que se insere O Homem que Mudou o Jogo, um drama esportivo lançado em 2011, baseado em fatos reais. Disponível nas plataformas HBO Max e Prime Vídeo, o filme é estrelado por Brad Pitt e Jonah Hill, ambos indicados ao Oscar por suas atuações, e apresenta uma narrativa inspiradora sobre inovação e transformação no esporte.

A história acompanha Billy Beane, um ex-jogador de beisebol cuja carreira não alcançou o sucesso esperado. Após deixar os campos, ele assume o cargo de gerente geral do time Oakland Athletics e passa a enfrentar um grande desafio: montar uma equipe competitiva mesmo dispondo de um orçamento muito inferior ao de outros clubes. Diante dessa realidade, Beane percebe que precisa repensar completamente as estratégias tradicionais de recrutamento de jogadores.

É então que surge Peter Brand, um jovem analista formado em economia que acredita no poder dos dados e das estatísticas para avaliar o desempenho dos atletas. Utilizando modelos matemáticos, ele propõe uma abordagem inovadora para o recrutamento de jogadores, substituindo avaliações

subjetivas por indicadores estatísticos.

Entre suas ferramentas estão modelos de regressão linear, utilizados para estimar quantas partidas o time precisa vencer para alcançar a fase final da competição, e um código que se refere à implementação computacional desses modelos, responsável por organizar os dados dos jogadores em planilhas e aplicar cálculos estatísticos capazes de integrar diferentes informações e projetar o desempenho anual dos atletas. Ao apostar nesses jogadores, a dupla desafia a lógica dominante do esporte e conduz o time a uma impressionante sequência de vitórias consecutivas.

A proposta apresentada no filme evidencia o papel fundamental da matemática na tomada de decisões estratégicas. Por meio da análise de dados, padrões e probabilidades, Billy e Peter conseguem identificar potenciais que passam despercebidos pelas avaliações convencionais. Assim, o filme mostra como métodos quantitativos podem transformar a forma de pensar e gerir até mesmo um esporte tão tradicional quanto o beisebol.

Mais do que uma narrativa esportiva, o filme apresenta uma reflexão sobre inovação, coragem e transformação. A obra demonstra que questionar paradigmas e adotar novas perspectivas pode gerar mudanças significativas, mesmo diante de pressões e desafios. Ao retratar uma história real de reinvenção e estratégia, o filme convida o espectador a perceber como ideias ousadas e pensamento analítico podem, de fato, mudar o jogo.

Referências.

- [1] AMAZON. Prime Video. Moneyball (O homem que mudou o jogo). Disponível em: <https://www.primevideo.com>. Acesso em: 10 mar. 2026.
- [2] HBO MAX. Moneyball (O Homem que Mudou o Jogo). Disponível em: <https://www.hbomax.com>. Acesso em: 10 mar. 2026.
- [3] LEWIS, Michael. Moneyball: The Art of Win-

ning an Unfair Game. New York: W. W. Norton & Company, 2004.

4. Quem pergunta, quer saber!

Quantos números fracionários existem?

Severino Barros de Melo³

Continuamos nesta edição a visita ao *Mathematikum*, um museu interativo muito familiar aos nossos leitores (mais detalhes sobre o museu, acessar números anteriores do *É Matemática, Oxente!*). No final da visita o frequentador podia tirar dúvidas sobre a Matemática as quais eram respondidas pelo matemático diretor do museu.

Figura 4.1: Crianças visitando o *Mathematikum*



Fonte: Google imagem

Pergunta: Quantos números fracionários existem?

Resposta de Albrecht Beutelspacher, à época diretor do museu:

Georg Cantor (1845 - 1918) foi um autêntico revolucionário da Matemática. Desenvolveu uma série de métodos que permitiram comparar conjuntos infinitos. Cantor nos mostrou uma maneira viável de fazer afirmações objetivas sobre infinidades.

Um dos seus conceitos essenciais é o de enumerabilidade. Ele considera um conjunto infinito “enumerável” ou “contável” quando seus elementos podem ser ordenados de maneira sucessiva: número 1, número 2, número 3, etc, e quando nessa sucessão

³Docente do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco

aparece cada um dos seus elementos. Por exemplo, o conjunto dos números pares positivos é enumerável porque pode ser ordenado em uma sucessão: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

Uma primeira pergunta de peso que Cantor se fez foi: *os números racionais; ou seja, as frações são contáveis?* A autêntica provocação encontra-se na formulação da pergunta: aparentemente existem muito mais frações do que números inteiros, visto que entre cada dois números inteiros existe uma quantidade infinita de frações. De maneira que a quantidade dos números racionais deveria crescer ao “infinito do infinito”. Isso é correto, porém em seguida veremos que em matéria de infinitude não se avança nem um pouco com isso.

Porém consideremos agora seriamente a pergunta se os números racionais são contáveis. Vamos nos limitar a propor a enumerabilidade dos números racionais que estão entre os números 0 e 1. Para isso precisamos ordenar essas frações. Começa-se pela primeira, em seguida vem a segunda, depois a terceira e assim sucessivamente. E nessa série teriam que aparecer todas as frações situadas entre 0 e 1.

Só falta saber por onde começar. Sem dúvida não pela fração menor, pois entre os números 0 e 1 nenhuma é a menor. Um milionésimo não é o número menor, pois um bilionésimo é ainda menor.

Cantor revela também aqui uma radicalidade despreocupada. Não ordena as frações de acordo com o seu valor, mas pelo tamanho do seu denominador. Com isto se salta todas as propriedades aritméticas ... porém funciona.

O menor denominador de todas as frações existentes entre 0 e 1 é 2, como $1/2$. Essa é a primeira fração. Em seguida vem as frações com 3 no denominador, ou seja, $1/3$ e $2/3$. Seguem as frações com denominador 4; entre elas só figuram $1/4$ e $3/4$ porque $2/4$ é $1/2$ e esta já foi considerada. As frações com denominador 5 são $1/5$, $2/5$, $3/5$, $4/5$. E assim se procede sucessivamente.

Nessa sucessão aparecem todas as frações entre 0 e 1. De modo que as frações entre 0 e 1 são nume-

ráveis. Com um raciocínio um pouco mais complexo se observa que também o conjunto de todos os números fracionários é contável. De modo que existe uma quantidade infinita de frações, porém apenas isso, posto que a enumerabilidade representa unicamente o primeiro nível da infinitude.

5. Eventos

Fiquem Ligados!!!

- **X ENCONTRO GOIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – X EnGEM**

- Local: Universidade Estadual de Goiás – Câmpus Central Henrique Santilo – Anápolis/GO
- Data: 5 a 7 de maio de 2026
- Mais informações: <https://www.eventos3.com.br/x-engem-691728/>

- **SEMANA DA MATEMÁTICA APLICADA (SEMAP) DO IME-USP**

- Local: Universidade de São Paulo (IME-USP) – São Carlos - SP
- Data: 5 a 8 de maio de 2026
- Mais informações: <https://www.icmc.usp.br/eventos/7208-semana-da-matematica-aplicada-semap-do-ime-usp>

- **IV WORKSHOP DE MULHERES NA MATEMÁTICA - WMM**

- Local: Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) – Recife - PE
- Inscrição: 2 de fevereiro a 13 de maio de 2026
- Data: 13 a 15 de maio de 2026
- Mais informações: <https://mat.ufcg.edu.br/wmm/>

- **V SEMINÁRIO DA REDE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NORDESTE: A EQUIDADE NA INOVAÇÃO DE PRÁTICAS PEDAGÓGICAS E ENCONTRO ESTADUAL DOS NÚCLEOS DA SBEM - BA (EENS)**

- Local: Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC - Ilhéus - Bahia
- Data: 13 a 16 de maio de 2026
- Mais informações: <https://www.eventos3.com.br/iv-seminario-da-rem-ne/>

- **VI CONGRESSO BRASILEIRO DE JOVENS PESQUISADORES EM MATEMÁTICA PURA, APLICADA E ESTATÍSTICA (CBJME)**

- Local: Universidade Federal do Piauí (UFPI) – Teresina - PI
- Data: 18 a 22 de maio de 2026
- Mais informações: <https://www.eventos3.com.br/vi-congresso-brasileiro-de-jovens-pesquisadoras-e-pesquisadores-em-matematica-pura-aplicada-e-estatistica-554803/>

- **XXIV SEMINÁRIO TEMÁTICO INTERNACIONAL – ITINERÁRIOS HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA, ETNOMATEMÁTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

- Local: Universidade Estadual do Ceará (Campus do Itaperi) – Fortaleza - Ceará
- Data: 10 a 12 de junho de 2026
- Mais informações: <https://24sti.ghemat-brasil.com.br/>

6. Soluções de Olimpíadas

OPEMAT 2024 - nível 3

Nesta edição apresentaremos a resolução das questões da prova da 2ª fase da Olimpíada Pernam-

bucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2024 referentes ao nível 3.

Problema 10. Dado um número natural $n > 0$, definimos a operação unária n^* por

$$n^* = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

Encontre os números naturais n menores que 100 tal que n^* termina com a maior quantidade de zeros.

Observação: A quantidade de zeros em que um número n^* termina é o maior número $k \in \mathbb{N}$ tal que $n^* = a \cdot 10^k$, onde $a \in \mathbb{N}$.

Solução. A quantidade de zeros em que termina um natural m é dado pelo maior k para o qual 10^k é divisor de m . Com efeito, 10^k é divisor de m se, e só se, 2^k e 5^k são divisores de m .

Note que 5 divide um, e apenas um, dos números $n, n+1, n+2, n+3, n+4$. Como $n < 100$, se 5^k é divisor de n^* então $k \leq 2$.

Vale ainda que 2^2 divide n^* qualquer que seja n pois entre os números $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ existem pelo menos dois que são pares, qualquer que seja n .

n^* terminará em mais zeros se entre os números $n, n+1, n+2, n+3$ e $n+4$ houver um múltiplo de 25, o que é válido para

$$n = 21, 22, 23, 24, 25, 46, 47, 48, 49, 50, \\ 71, 72, 73, 74, 75, 96, 97, 98 \text{ e } 99.$$

□

Problema 11. Quantos são os divisores positivos de 2024^{2024} que são divisíveis por exatamente 2024 inteiros positivos?

Solução. Temos que $2024 = 2^3 \cdot 11^1 \cdot 23^1$. Portanto, $2024^{2024} = 2^{6072} \cdot 11^{2024} \cdot 23^{2024}$. Seja n um divisor de 2024^{2024} . Então, $n = 2^x \cdot 11^y \cdot 23^z$, em que $0 \leq x \leq 6072$, $0 \leq y \leq 2024$ e $0 \leq z \leq 2024$. Resulta que n é divisível por exatamente 2024 inteiros positivos se, e somente se,

$$(x+1)(y+1)(z+1) = 2024 = 2^3 \cdot 23^1 \cdot 11^1.$$

Ora, podemos pensar nos números no lado esquerdo da igualdade, $x + 1$, $y + 1$ e $z + 1$, como caixas e nos números no lado direito, 2, 2, 2, 11 e 23, como objetos a serem colocados nas caixas. Existem $C_5^2 = 10$ modos de se distribuir os números 2. Com efeito, podemos colocar os três números 2 em uma mesma caixa (3 modos), dois números 2 em uma caixa e um número 2 em outra caixa (6 modos) ou um número 2 em cada caixa (1 modo). Por fim, existem 3 modos de se distribuir o número 11 e 3 modos de se distribuir o número 23. Logo, existem $10 \cdot 3 \cdot 3 = 90$ divisores de 2024^{2024} que são divisíveis por exatamente 2024 inteiros positivos.

□

Problema 12. Para cada número inteiro positivo n associamos um número inteiro não negativo $f(n)$ de modo que se cumpram as seguintes regras:

1. $f(ab) = f(a) + f(b)$;
2. $f(n) = 0$ se n é um primo maior que 10;
3. $f(1) < f(3^5) < f(2) < 11$.

Sabendo que $f(2106) < 11$, qual o valor de $f(96)$?

Solução. Pela propriedade 1. temos $f(3^5) = 5f(3)$. Dado que $0 \leq f(1) < 5f(3) < f(2) < 11$, e que $5f(3)$ é um múltiplo de 5, temos $5f(3) = 5$, ou seja, $f(3) = 1$. Note que $2106 = 2 \cdot 3^4 \cdot 13$. Assim, pelas propriedades 1. e 2. temos que

$$f(2106) = f(2) + 4f(3) + f(13) = f(2) + 4.$$

De $f(2106) < 11$, segue que $f(2) < 7$. Usando 3. temos $5 < f(2) < 7$ e assim $f(2) = 6$. Logo,

$$f(96) = f(3 \cdot 2^5) = f(3) + 5f(2) = 31.$$

□

Problema 13. Uma folha de papel na forma de um quadrado $ABCD$ de lado 10cm , é recortada e dobrada da seguinte forma: a partir dos pontos médios M e N dos segmentos AB e CD , respectivamente, considere os pontos I e Y no segmento MN tais que Y é o centro do quadrado, I está entre M e

Y e o segmento IY mede 1cm . Considere também o ponto S dentro do retângulo $AMND$ tal que o triângulo ISY é isósceles com ângulo da base $\widehat{SYI} = 45^\circ$. Em seguida, a folha é recortada ao longo dos segmentos MI , IS e NY e dobrada ao longo de IY e YS simultaneamente, conforme as etapas descritas nas Figuras de 1 a 4, resultando na Figura 5.

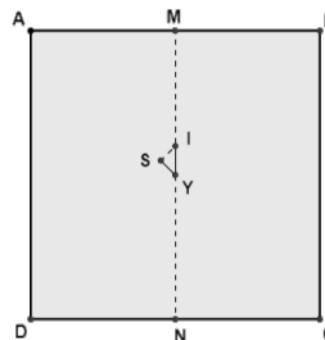


Figura 1

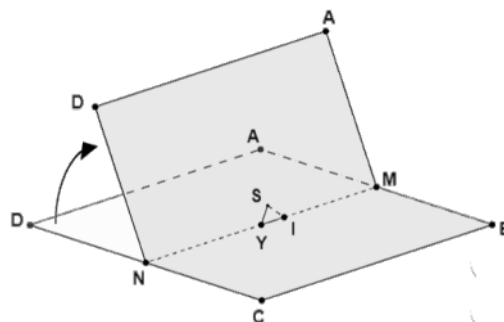


Figura 2

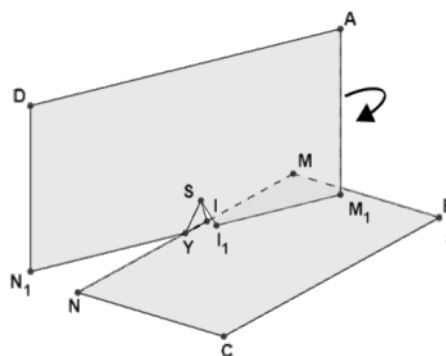


Figura 3

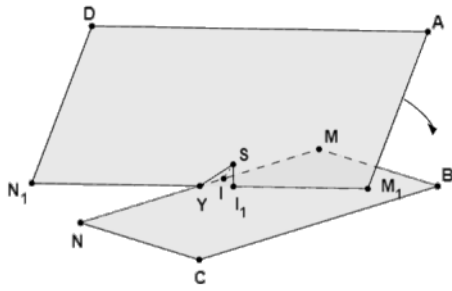


Figura 4

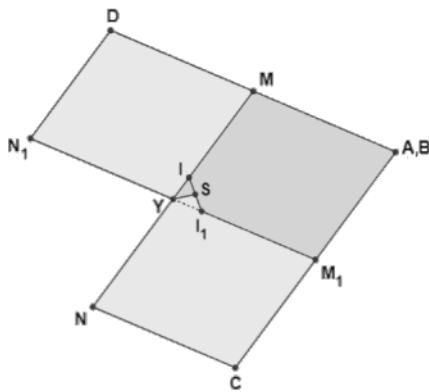
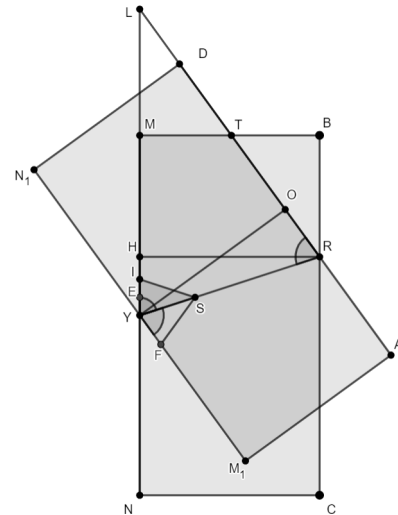


Figura 5

Se mudarmos as medidas dos ângulos da base do triângulo isósceles ISY de modo que $S\hat{I}Y = S\hat{Y}I$, $70^\circ < S\hat{Y}I < 75^\circ$, a área de ISY seja igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e fizermos uma dobra semelhante a descrita nas etapas acima, qual é o valor da área da região do retângulo $MBCN$ que será sobreposta pela região do retângulo AM_1N_1D após a dobra?

Solução. Como $[ISY] = \frac{\sqrt{2}}{2}$, temos que a altura do triângulo ISY relativa ao lado IS é $h = \frac{\sqrt{2}}{3}$ e, pelo Teorema de Pitágoras, temos que $YS = \frac{3}{2}$. Agora, seja R o ponto do segmento AD que intersecta BC após a dobra. Prolongando os segmentos YM e RD , obtemos o ponto L e observamos que o triângulo YLR é semelhante ao triângulo ISY , pois o triângulo ISY é congruente ao triângulo YSF e os ângulos $S\hat{Y}R$ e $O\hat{R}Y$ são alternos internos, visto que YR é transversal aos segmentos paralelos AD e M_1N_1 , onde M_1 e N_1 são os pontos correspondentes

a M e N , respectivamente, após a dobra conforme a figura abaixo.



Além disso, seja O um ponto em RD tal que YO é paralelo à AM_1 , e seja E o ponto médio do segmento YI . Então os triângulos EYS e ROY são semelhantes (critério AA). Desta semelhança, obtemos

$$\frac{OR}{EY} = \frac{OY}{ES} \implies OR = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} \implies OR = \frac{5\sqrt{2}}{4}.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras, ao triângulo ROY temos

$$(YR)^2 = (OY)^2 + (OR)^2 \implies YR = \sqrt{5^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2} \implies YR = \frac{15\sqrt{2}}{4}.$$

Da semelhança entre YLR e ISY temos que

$$\frac{LY}{SI} = \frac{YR}{IY} \implies LY = \frac{45\sqrt{2}}{8}.$$

Agora, seja H ponto de YM tal que o segmento HR seja paralelo a NC conforme a figura acima. Como os triângulos ROY e YHR são congruentes (caso (A.L.A)), temos que $HY = OR = \frac{5\sqrt{2}}{4}$. Seja T o ponto do segmento AD que intersecta MB após a dobra conforme a figura acima. Observe que os triângulos LHR e LMT são semelhantes (critério AA). Como

$$LH = LY - HY = \frac{45\sqrt{2}}{8} - \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{35\sqrt{2}}{8} \quad \text{e}$$

$$LM = LY - MY = \frac{45\sqrt{2}}{8} - 5,$$

temos

$$\frac{MT}{HR} = \frac{LM}{LH} \implies MT = \frac{45\sqrt{2} - 40}{7\sqrt{2}}.$$

Desta forma, a área do triângulo LMT é

$$[LMT] = \frac{LM \cdot MT}{2} = \frac{\left(\frac{45\sqrt{2} - 40}{8}\right) \left(\frac{45\sqrt{2} - 40}{7\sqrt{2}}\right)}{2} = \frac{(45\sqrt{2} - 40)^2}{112\sqrt{2}},$$

e a área de LYR é

$$[LYR] = \frac{LY \cdot HR}{2} = \frac{\frac{45\sqrt{2}}{8} \cdot 5}{2} = \frac{225\sqrt{2}}{16}.$$

Logo a área sobreposta A_S é dada por

$$A_S = 2 \cdot [YMTR] - [ISY] = 2 \cdot ([LYR] - [LMT]) - [ISY]$$

Assim,

$$A_S = 2 \left(\frac{225\sqrt{2}}{16} - \frac{(45\sqrt{2} - 40)^2}{112\sqrt{2}} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1800 - 639\sqrt{2}}{28}.$$

□

Problema 14. Aline, Bárbara e Clara são as únicas atendentes do setor de vendas de uma empresa de telemarketing. As três recebem uma planilha, conforme abaixo, com informações de 2023 clientes que devem ser contactados:

Número	Nome	Atendente
1	Cliente 1	
2	Cliente 2	
3	Cliente 3	
⋮	⋮	
2023	Cliente 2023	

No intuito de dividir o trabalho entre si, as três começam a preencher a terceira coluna da planilha, informando quem irá contactar cada cliente. De quantos modos distintos isso pode ser feito, se cada atendente deve ligar para um número ímpar de clientes, e se cada cliente só pode ser contactado por exatamente uma atendente?

Solução. Note que cada modo distinto de se dividir os clientes entre as atendentes corresponde a uma sequência de comprimento 2023, formada apenas pelas letras A , B e C , de modo que cada letra apareça um número ímpar de vezes. Seja a_n o número de sequências de comprimento n que cumprem a condição do problema. Note que n é ímpar. Dada uma sequência de comprimento $n + 2$, temos duas possibilidades:

- (i) a sequência termina em duas letras idênticas;
- (ii) a sequência termina em duas letras distintas.

No primeiro caso, se removermos as duas últimas letras, obteremos uma sequência de comprimento n cumprindo a condição do problema. Como há 3 possibilidades para a letra que se repetirá ao final da sequência, há $3a_n$ tais sequências.

No segundo caso, a sequência obtida retirando-se as duas últimas letras será uma sequência de comprimento n que não cumpre a condição do problema. Com efeito, a sequência terá duas letras ocorrendo um número par de vezes e a terceira letra, um número ímpar de vezes. Assim, para contar as sequências de comprimento $n + 2$ no segundo caso, basta observar que tais sequências são obtidas a partir das sequências de comprimento n que não cumprem a condição do problema acrescidas de uma cópia de cada letra que ocorre um número par de vezes, em alguma ordem. Ora, existem $2(3^n - a_n)$ tais sequências.

Portanto, o número total de sequências de comprimento $n + 2$ é

$$a_{n+2} = 3a_n + 2(3^n - a_n) = a_n + 2 \cdot 3^n.$$

Definindo $b_n = a_n/3^n - 1/4$, vem que

$$a_{n+2} = a_n + 2 \cdot 3^n \Leftrightarrow b_{n+2} = \frac{1}{9}b_n.$$

A equação característica associada é

$$\lambda^2 = \frac{1}{9}.$$

Daí, resulta que $\lambda = 1/3$ ou $\lambda = -1/3$. Segue que

a solução geral tem a forma

$$b_n = c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Reescrevendo em termos de a_n , vem que

$$a_n = c_1 - c_2 + \frac{3^n}{4}.$$

Usando o fato de que $a_1 = 0$ e $a_3 = 6$, obtemos

$$a_n = \frac{3}{4}(3^{n-1} - 1).$$

Resulta que $a_{2023} = \frac{3}{4}(3^{2022} - 1)$. □

7. Problemas propostos

Convidamos o leitor a responder alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Envie as soluções dos problemas propostos para o e-mail: ematematicaoxente@gmail.com

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, o envio do arquivo (.tex), no modelo disponível no site, deve ser realizado até **22/06/2026**.

Problema 15 (UNEMAT - OM 2023). O tamanho da roda de uma bicicleta é determinado pela medida do seu diâmetro, em polegadas. Minha bicicleta tem aro 29 e a de minha filha aro 26. Isto é, o diâmetro da roda da minha bicicleta mede 29 polegadas e da minha filha 26 polegadas. Determine, aproximadamente, a diferença entre os comprimentos das circunferências das rodas das duas bicicletas, em centímetros. Dado: 1 polegada = 2,54cm e $\pi = 3,14$.

Problema 16 (OBMEP - 2013 - 1^o Fase - Nível 3). O número de alunos matriculados na Escola Municipal de Pirajuba permanece o mesmo desde 2011. Em 2012, foram construídas 5 novas salas de aula e, com isso, a média de alunos por sala foi reduzida em 6 alunos em relação à média de 2011. Em 2013,

foram construídas mais 5 salas de aula e, com isso, a média de alunos por sala foi reduzida em 5 alunos em relação à média de 2012. Quantos alunos tem a Escola Municipal de Pirajuba?

- a) 3150
- b) 3180
- c) 3240
- d) 3300
- e) 3350

Problema 17 (OBM - 2011). De quantas maneiras é possível cobrir completamente um tabuleiro 2×2011 com dominós 1×2 (ou 2×1)?

8. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n. 36, de outubro de 2025**.⁴

Problema 1. No último aniversário de Carol, enquanto colocávamos as velas com os dois dígitos da idade dela, percebemos algo curioso: os mesmos números podiam ser usados como base e expoente de uma potência — e o resultado era exatamente a idade dela! Consegue descobrir quantos anos ela fez?

Solução. A única idade possível é 25 anos. Por quê? Se a idade tem dois dígitos a e b , então a idade é $10a+b$. O enunciado diz que usando os mesmos dois dígitos como base e expoente, em alguma ordem, o resultado é exatamente a idade.

Então deve valer ou

$$a^b = 10a + b$$

ou

$$b^a = 10a + b.$$

⁴O leitor Nélcio Antônio enviou solução para o Problema 1, enquanto que o leitor Amaro José enviou solução para o Problema 3. Além disso, ambos enviaram soluções distintas para o Problema 2.

Testando todas as combinações possíveis, a única que funciona é: $5^2 = 25$, ou seja, com os dígitos 2 e 5, usando 5 como base e 2 como expoente, obtemos exatamente 25, que corresponde à idade 25. Resposta: Carol fez 25 anos, pois $5^2 = 25$, a mesma idade formada pelos dois dígitos usados como base e expoente.

□

Problema 2 (Banco de Questões OBMEP - 2013). O personagem histórico mexicano Benito Juárez nasceu na primeira metade do século XIX (o século XIX vai do ano 1801 ao ano 1900). Sabendo que Benito Juárez completou x anos no ano x^2 , qual foi o ano do seu nascimento?

*Solução.*⁵ Se ele completou x anos no ano x^2 , então: ano de nascimento = $x^2 - x$ porque no ano x^2 ele tem exatamente x anos. O nascimento deve estar entre

$$1801 \text{ e } 1850: 1801 \leq x^2 - x \leq 1850.$$

x	x^2	$x^2 - x$
40	1600	1560
41	1681	1640
42	1764	1722
43	1849	1806
44	1936	1892
45	2025	1980

O único valor de x cujo resultado está entre 1801 e 1850 é: $x=43$ ano de nascimento = 1806.

Resposta: Benito Juárez nasceu em 1806. □

*Solução.*⁶ Seja N o ano de nascimento de Benito. As informações do problema nos diz que

$$N + x = x^2.$$

Logo:

$$N = x^2 - x.$$

Como ele nasceu na primeira metade do século XIX (1801-1850), temos:

⁵Solução enviada pelo leitor Amaro José

⁶Solução enviada pelo leitor Nélio Antônio

$$1801 \leq x^2 - x \leq 1850.$$

Precisamos resolver essa inequação e encontrar o valor de x que satisfaz essa desigualdade. Então, primeiro, resolvemos

$$x^2 - x \geq 1801$$

$$x^2 - x - 1801 \geq 0.$$

Note que as raízes da equação

$$x^2 - x - 1801 = 0$$

são:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 7204}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{7205}}{2}.$$

Verifique que $\sqrt{7205} \approx 84,88$, então:

$$x \approx \frac{1 + 84,88}{2} \approx 42,94$$

(a raiz negativa não nos interessa, afinal estamos tratando da idade de Benito). Sabemos que o gráfico dessa equação é uma parábola representada por $x^2 - x - 1801$, que tem concavidade para cima.

Logo a desigualdade vale para $x > 42,94$. Como x é inteiro, $x \geq 43$.

Agora resolvemos

$$x^2 - x \leq 1850$$

$$x^2 - x - 1850 \leq 0.$$

Note que as raízes da equação

$$x^2 - x - 1850 = 0$$

são:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 7400}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{7401}}{2}. \quad (1)$$

Verifique que $\sqrt{7401} \approx 86,02$, então $x \approx \frac{1+86,02}{2} \approx 43,515$.

A inequação vale para x entre as raízes, pois $x^2 - x \leq 1850$, mas como $x > 0$, temos:

$$0 < x \leq 43,515.$$

De $x \geq 43$ que foi solução do primeiro caso e $x \leq 43,515$ que foi solução do segundo caso, concluímos que o único valor inteiro possível dessa desigualdade, será:

$$x = 43.$$

Logo o ano de nascimento de Benito será dado por

$$N = 43^2 - 43 = 1849 - 43 = 1806.$$

Portanto, concluímos que ele nasceu no ano de 1806. \square

Problema 3 (OBMEP – 2025). Uma sequência de números naturais é definida por:

$$a_{n+1} = a_n + a_n^2$$

para todo número natural $n \geq 1$. E $a_1 = 3$. Por exemplo: $a_2 = a_1 + a_1^2 = 3 + 3^2 = 12$. Qual é o algarismo das unidades de a_{2015} ?

- a) 2 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

Solução. Basta olhar apenas o algarismo das unidades: se u_n é a unidade de a_n , então $u_{n+1} \equiv u_n + u_n^2 \pmod{10}$, porque o algarismo das unidades de a_n^2 depende só de u_n .

Começando com $u_1 = 3$:

- $u_2 \equiv 3 + 3^2 = 3 + 9 = 12 \equiv 2 \pmod{10}$.
- $u_3 \equiv 2 + 2^2 = 2 + 4 = 6$.
- $u_4 \equiv 6 + 6^2 = 6 + 36 = 42 \equiv 2$.

A partir daí as unidades alternam 2, 6, 2, 6, ... (período 2). Como a_{2015} tem índice ímpar maior do que 1, sua unidade é 6.

Resposta: 6. \square