
É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 36, volume 1, outubro de 2025

ISSN 2526-8651

Editorial

Caros Leitores,

Temos a satisfação de compartilhar com vocês a edição número 36 do nosso periódico. Cada nova publicação traz para além do que está escrito algo de muito especial que caracteriza o jornal: empenho, entusiasmo e sinergia entre os membros da equipe, tendo sempre diante de nós os leitores que nos estimulam a fazer mais e melhor.

O presente número apresenta na seção *artigo*, um trabalho intitulado *Números racionais e irracionais: um aceno histórico e algumas conexões com as olimpíadas de Matemática*, elaborado pelo professor Severino Barros de Melo do departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco. O artigo revista problemas de olimpíadas cujo enunciado se refere a tais números, procurando apresentar de forma breve a história relacionada a esses aspectos conceituais e operacionais dos dois conjuntos numéricos.

Na seção *curiosidade*, Roberta Elaine Domingos de Araújo, aluna do Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada da Universidade Federal Rural de Pernambuco, aborda *O Enigma das Manchas: Matemática de Turing e a morfogênese dos padrões naturais*. Relata uma incursão no campo da Biologia e da Química com o olhar do matemático tentando explicar um fenômeno recorrente nos reinos animal e vegetal.

A seção *Quem pergunta, quer saber!* nos leva no-

vamente ao museu Mathematikum, já familiar aos nossos leitores. Dessa vez destaca a resposta dada a um visitante interessado em saber *o que são os problemas de Hilbert*.

A *indicação de leitura* é dada pelo professor Filipe Andrade da Costa, do Departamento de Matemática na Universidade Federal Rural de Pernambuco, e se refere ao livro *Incríveis passatempos matemáticos*. A obra escrita pelo matemático Ian Stewart, professor emérito da Universidade de Warwick, Inglaterra, para além de outras conclusões, reforça a afirmação do matemático espanhol Miguel de Guzmán, segundo a qual um matemático considera essa ciência, para além de qualquer outra coisa, também um jogo.

A seção dedicada à *resolução de problemas* apresenta soluções da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT-2024), segunda fase, nível 1. Finalizamos o jornal com novos problemas propostos e soluções daqueles apresentados na edição 34; dentre estas, algumas foram enviadas pelo leitor Amaro José de Oliveira Filho.

Não esquecemos a agenda de eventos divulgados nos sites da *Sociedade Brasileira de Matemática* e da *Sociedade Brasileira de Educação Matemática*.

Reafirmamos, com esta nova edição, nosso compromisso em valorizar a Matemática como um espaço de descoberta, diálogo e encantamento. Que cada página desperte em vocês a curiosidade e o prazer de aprender algo novo.

Desejamos uma excelente leitura!

Sumário

1 Artigo	2
Números Racionais e Irracionais: um Aceno Histórico e Algumas Conexões com as Olimpíadas de Matemática	2
2 Curiosidade	12
O Enigma das Manchas: A Matemática de Turing e a Morfogênese dos Padrões Naturais	12
3 Indicação de Leitura	13
Incríveis passatempos matemáticos	13
4 Quem pergunta, quer saber!	14
O que são os problemas de Hilbert?	14
5 Eventos	15
6 Soluções de Olimpíadas	16
OPEMAT 2024 - 2ª Fase Nível 1	16
7 Problemas	19
8 Soluções dos Problemas	20

1. Artigo

Números Racionais e Irracionais: um Aceno Histórico e Algumas Conexões com as Olimpíadas de Matemática

Severino Barros de Melo
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Educação
52171-900 - Recife-PE - Brasil
severino.barros@ufrpe.br

INTRODUÇÃO

O objetivo do presente artigo é abordar o tema números irracionais com um olhar voltado para sua história, ao mesmo tempo queremos fazer algumas conexões com questões presentes em diversos níveis nas olimpíadas de Matemática ou em atividades preparatórias para tais certames.

Algumas questões serão resolvidas e outras ficarão como proposta para os leitores, mas todas foram inseridas num quadro mais amplo com foco na História da Matemática.

A escolha dos irracionais deve-se ao fato deles carregarem em si algumas características especiais. De fato, desde a sua descoberta atribuída à Escola Pitagórica (século V a.C) até sua completa explicação se passaram praticamente 2500 anos. Portanto, foram necessários muitos séculos para sua plena compreensão.

Muitos autores em artigos dedicados aos números irracionais já revelam a partir do título uma história de dificuldades e perplexidades em relação a tais números. Por exemplo: Jones (1956, p.123) chama de “*escândalo lógico*” o surgimento dessa categoria de números; Knorr (1983, p.41) define o tema como “*a cruz dos matemáticos*” e Dessanti (1991) anuncia o fato como “*uma crise de desenvolvimento exemplar*.”

Ao mesmo tempo a caminhada em direção à sua completa explicação propiciou um enorme enriquecimento em vários tópicos da Matemática. Vale lembrar que ao abordarmos o tema números irracionais somos naturalmente levados ao longo do texto a tecer comentários sobre os números racionais pelo fato de um número qualquer não poder pertencer ao mesmo tempo a essas duas categorias.

DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

Os números racionais são da forma $x = \frac{m}{n}$, onde m e n são inteiros e $n \neq 0$. Esse conjunto é usualmente representado pela letra $\mathbb{Q}$. O conjunto dos números naturais, usualmente representado pela letra $\mathbb{N}$ e dos inteiros, usualmente representado pela letra $\mathbb{Z}$ são formados por elementos que também podem ser escritos na forma de fração. Considerando que mesmo as chamadas dízimas periódicas - que veremos adiante - podem também ser escritas na forma de fração, é válida a seguinte cadeia de inclusão:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

A título de observação, vale destacar que essa cadeia de inclusão, verdadeira do ponto de vista da teoria dos conjuntos pode induzir a um erro histórico, dando a entender que os números inteiros foram criados antes dos racionais, o que não é verdade.

No entanto, existem muitos números reais que não são racionais e por isso são chamados irracionais. Tais números se caracterizam por possuírem infinitas casas decimais, mas não terem períodos; ou seja, não terem um determinado agrupamento de números que se repetem. Portanto, dizendo de modo bastante simplificado, não podem ser representados em forma de fração com numeradores e denominadores inteiros.

Exemplos:

- $\sqrt{2} = 1,414213562 \dots$;
- $\pi = 3,141592654 \dots$.

Ainda no campo das definições, a título de curiosidade, na seção “*Quem pergunta, quer saber!*” do jornal *É Matemática, Oxente!* (2021; N.20; p.12) foi apresentada de forma detalhada a diferença entre números irracionais algébricos e transcendentos.

Se comparado com os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, o conjunto dos irracionais não goza da propriedade do fechamento; ou seja, a soma ou o produto de dois irracionais nem sempre é um número irracional. Como exemplo basta verificar que a soma $(5 + \sqrt{2}) + (5 - \sqrt{2}) = 10$ ou o produto $(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 7$.

Os quatro problemas seguintes estão relacionados com as definições e propriedades supracitadas:

Problema 1.1 (Olimpíada Regional de Matemática da Grande Porto Alegre 2017). Responda, justificando:

- a) $\sqrt{x}$ irracional implica x irracional?
- b) $\sqrt{x}$ racional implica x racional?
- c) x irracional implica $\sqrt{x}$ irracional?
- d) x racional implica $\sqrt{x}$ racional?

Solução: a) Falso. $\sqrt{2}$ é irracional, mas 2 é racional.

b) Verdadeiro. Se $\sqrt{x}$ é racional, pode ser escrito na forma $\frac{m}{n}$, portanto $x = \frac{m^2}{n^2}$.

c) Verdadeiro. Se x não pode ser escrito com numerador e denominador inteiros, $\sqrt{x}$ por ser raiz, também não pode, logo é irracional.

d) Falso. 2 é racional, mas $\sqrt{2}$ não é racional. □

Problema 1.2 (Olimpíada Regional de Matemática da Grande Porto Alegre 2017). Decidir se o número $\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$ é racional ou irracional. Justifique.

Solução. Consideremos

$$X = \sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}},$$

portanto:

$$\begin{aligned} X^2 &= \left(\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}} \right)^2 \\ &= 12 + 6\sqrt{3} + 2\sqrt{12 + 6\sqrt{3}}\sqrt{12 - 6\sqrt{3}} \\ &\quad + 12 - 6\sqrt{3} \\ &= 24 + 2\sqrt{144 - 36 \cdot 3} \\ &= 24 + 2\sqrt{144 - 108} \\ &= 24 + 2\sqrt{36} \\ &= 24 + 12 \\ &= 36. \end{aligned}$$

Logo, $X = \pm 6$, ou seja, X é racional. □

Problema 1.3 (Olimpíada Mineira de Matemática - 2005). Qual o valor inteiro da expressão $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$?

Solução: Publicada na edição 19 do *É Matemática, Oxente!* num artigo dos autores Lucas Wanderley, Rafael Souto e Thiago Tanaka do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco. □

Problema 1.4 (ARML - 1997). Sejam a, b, c números racionais, tais que:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

Determine os valores de a, b, c .

Solução: Publicada na edição 19 do É Matemática, Oxente! num artigo dos autores Lucas Wanderley, Rafael Souto e Thiago Tanaka do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco. $\square$

Problema 1.5 (Olimpíada Regional de Matemática da Grande Porto Alegre 2017). Cada afirmação abaixo refere-se a retângulos não quadrados. Para cada uma, decida qual a melhor resposta dentre as seguintes alternativas: “sempre vale”, “pode valer, mas nem sempre”, “nunca vale”.

- a) se o perímetro é número racional, então a área também é racional;
- b) se o perímetro é número irracional, então a área também é irracional.

Solução: a) Pode valer, mas nem sempre. Basta verificar como caso particular um retângulo de lados $(\sqrt{7}-1)$ e $(10-\sqrt{7})$.

- b) Pode valer, mas nem sempre. Basta verificar como caso particular um retângulo de lados $(\sqrt{5}-1)$ e $(\sqrt{5}+1)$. $\square$

Problema 1.6 (Moscow Math Circles). Existem números irracionais x, y com $x > 0$ tais que x^y é racional?

Solução: Podemos testar com um caso particular. Se considerarmos $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $y = \sqrt{2}$, temos: $x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$, portanto, racional. $\square$

ALGUNS ASPECTOS DOS NÚMEROS IRRACIONAIS COM UM ACENO HISTÓRICO

Nesse tópico queremos destacar três aspectos relacionados aos números racionais e irracionais: a *existência*, a *representação decimal* e as *irracionalidades trigonométricas* fazendo um breve aceno histórico. Por que a História? É claro que muitas pessoas têm grande domínio da Matemática sem ter necessariamente conhecimento da sua História, entretanto a aproximação com a História pode ajudar a entender melhor a Matemática. No texto o comentário histórico ficará inserido num box; ou seja, uma área visual usada para dar destaque à informação.

Existência dos Irracionais

Camargo (2003, p.75-83) na *Revista da Olimpíada* do IME-UFG demonstra a irracionalidade de $\sqrt{2}$.

A demonstração apresentada por ele é a seguinte:

“ $\sqrt{2}$ também não é racional. Se fosse racional, poderíamos escrevê-lo como dízima periódica ou na forma $\frac{a}{b}$, a, b inteiros $b \neq 0$. Suponhamos que seja possível escrevê-lo na forma $\frac{a}{b}$ acima, podemos supor também que a fração seja irredutível, nessas condições teremos $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, $a^2 = 2b^2$, o número $2b^2$ é um inteiro par, daí a^2 é inteiro par, portanto a é par, pondo $a = 2k$, sendo k também um inteiro, substituindo $2k$ na igualdade acima, teremos $4k^2 = 2b^2$; $b^2 = 2k^2$, assim, b também é par. Concluímos que a e b são ambos pares, mas inicialmente supomos que a e b seriam primos entre si. Essa contradição nos dá a conclusão de que não é possível escrever $\sqrt{2}$ na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e, portanto, $\sqrt{2}$ não é racional.”

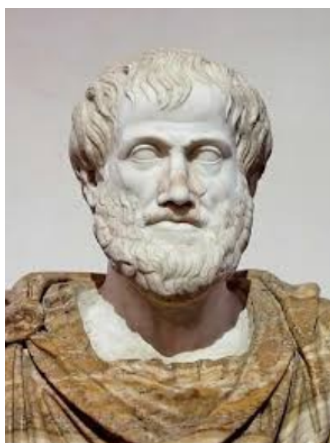
Sobre esse modo de provar algo na Matemática vale destacar o comentário de Beutelspacher (em tradução livre).

As afirmações “negativas” desse tipo (...) se inserem entre as pérolas da Matemática. Como se demonstram esses enunciados? As pessoas ingenuamente acreditam que para isso se faz necessário comprovar separadamente uma quantidade interminável de casos. Portanto, para demonstrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$ teríamos que examinar todos os pares de números inteiros e certificar-se caso a caso de que $\sqrt{2}$ não corresponde a nenhuma fração formada por esses pares de números. Porém esse seria um procedimento nada inteligente, posto que com uma quantidade infinita de casos o processo não terminaria nunca. Necessitamos de um método que nos permita, digamos, encerrar com “um só golpe” todos os intermináveis casos. O método é denominado demonstração por contradição: se supõe que o enunciado seja correto (*), e por meio de uma sucessão mais ou menos breve de conclusões lógicas, se chega a uma contradição. A contradição deve-se, portanto, ao fato do enunciado ser falso. (Beutelspacher, 2011, p. 30-31).

(*) Nota nossa: enunciado correto significa supor que $\sqrt{2}$ é racional.

Essa prova foi apresentada pela primeira vez por Aristóteles (384-322 a.C) na obra *Analytica Priora* como único exemplo de demonstração por redução ao absurdo.

Figura 1.1: Aristóteles



Fonte: Google imagem

Aristóteles se refere a uma prova da incomensurabilidade da diagonal de um quadrado com seu lado, indicando que se baseava na distinção entre pares e ímpares. (Boyer, 1996, p.50).

Relacionada à existência de números irracionais a nota histórica seguinte que é quase o resumo de uma saga pode iluminar o cenário no qual nasce essa categoria de números.

“Desde o século VI a.C., os matemáticos gregos a começar por Pitágoras, já tinham descoberto que a diagonal de um quadrado ‘não tem nenhuma medida comum’ com o seu lado. De fato, tanto pela medida quanto pelo raciocínio, o comprimento de sua diagonal não corresponde a um número inteiro de metros. Ou seja, uma vez que tal é o seu comprimento matemático, a $\sqrt{2}$ é um número ‘incomensurável’. Foi a descoberta do que hoje denominamos ‘números irracionais’ os que não são nem inteiros nem frações. Esta descoberta provocou uma grande consternação no seio dos pitagóricos, que pensavam então que ‘o número rege o universo’, pensando desse modo nos ‘números racionais’, isto é, nos inteiros naturais e nas suas combinações mais simples, que são as frações ordinárias.” (Ifrah, 1989, p.329)

Para o historiador de um modo geral (incluindo o da Matemática) um dos elementos fundamentais é a fonte. Ela pode ser um documento, um objeto ou testemunho original elaborado na mesma ocasião do fato em estudo. A fonte em geral pode ser classificada em *primária*, *secundária* ou *terciária*. A fonte primária é aquela que sendo contemporânea ao fato não é afetada pela mediação e interpretações posteriores.

No que concerne à História da Matemática, em que pese a quantidade e qualidade da Matemática produzida na Antiga Grécia, as fontes primárias são escassas, contrastando com as Matemáticas Egípcias e Mesopotâmicas sobre as quais há fontes primárias. Por esta razão, grande parte da história

dos números irracionais foi resgatada de textos secundários ou terciários, escritos pelos chamados comentadores. Dentre eles, Proclus (410-485) depois de Cristo é citado por Gundlach.

“Embora Proclus pareça atribuir a descoberta de quantidades incomensuráveis a Pitágoras, é mais provável que esta tenha sido realizada por algum pitagórico posterior, no período entre 500 e 375 a.C. Como, segundo a filosofia da escola pitagórica, os números inteiros, ou as razões entre eles, eram a essência de todas as coisas existentes, os membros da escola só poderiam considerar como um ‘escândalo lógico’ essa descoberta e a posterior revelação de grandezas geométricas cuja razão não podia ser representada por pares de inteiros. Proclus escreveu: ‘conta-se que aqueles que primeiro trouxeram a luz os irracionais pereceram todos num naufrágio, sem exceção.’” (Gundlach, 1992, p.55)

O matemático e historiador holandês Dirck Struik aborda a História da Matemática com um olhar voltado fortemente para a influência das relações sociais no desenvolvimento dessa ciência. Ao se referir a descoberta dos irracionais cita aspectos religiosos e sociais associados à Escola Pitagórica.

“A descoberta mais importante atribuída a Pitágoras foi a dos ‘irracionais’ por meio de segmentos de reta incomensuráveis. Esta descoberta pode ter sido o resultado de seu interesse pela média geométrica $a : b = b : c$, que servia como símbolo da aristocracia. Qual a média geométrica de 1 e 2, dois símbolos sagrados? Esta questão conduziu ao estudo da razão entre a diagonal e o lado do quadrado e descobriu-se que esta razão não podia ser expressa por ‘números’- isto é, por aqueles números a que chamamos atualmente ‘números’ racionais (inteiros ou fracionários), os únicos números que eram reconhecidos como tais.” (Struik, 1989, p.80) .

Camargo (2003) no artigo supracitado usando o método da redução ao absurdo, prova a irracionalidade de $\sqrt{3}$ e cita sem demonstrar que “ $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, e $\sqrt[p]{p}$, p primo, são todos exemplos de números não racionais”.

A demonstração da irracionalidade de $\sqrt{5}$ pode ser feita como a seguir. Para isso precisamos do seguinte lema:

Lema 1.1. *O quadrado de um número inteiro é divisível por 5 se e somente se o inteiro for divisível por 5.*

Demonstração. Todo inteiro divisível por 5 é da forma $5n$, enquanto inteiros não divisíveis por 5 são da forma $5n + 1, 5n + 2, 5n + 3, 5n + 4$.

Assim,

$$\begin{aligned}(5n)^2 &= 25n^2 = 5(5n^2), \\ (5n + 1)^2 &= 25n^2 + 10n + 1 \\ &= 5(5n^2 + 2n) + 1, \\ (5n + 2)^2 &= 25n^2 + 20n + 4 \\ &= 5(5n^2 + 4n) + 4, \\ (5n + 3)^2 &= 25n^2 + 30n + 9 \\ &= 5(5n^2 + 6n + 1) + 4, \\ (5n + 4)^2 &= 25n^2 + 40n + 16 \\ &= 5(5n^2 + 8n + 3) + 1.\end{aligned}$$

□

Proposição 1.2. $\sqrt{5}$ é irracional.

Demonstração. Suponha que $\sqrt{5}$ é racional, logo pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, (a, b primos entre si). Portanto $a^2 = 5b^2$. Desse modo o inteiro $5b^2$ é divisível por 5, isto é, a^2 é divisível por 5, e, portanto, pelo lema (1.1), a é divisível por 5. Suponhamos $a = 5c$, onde c é um inteiro. Substituindo-se a por $5c$ na equação $a^2 = 5b^2$, obtemos:

$$\begin{aligned}(5c)^2 &= 5b^2 \Leftrightarrow \\ 25c^2 &= 5b^2 \Leftrightarrow \\ 5c^2 &= b^2.\end{aligned}$$

Isso mostra que b^2 é divisível por 5 e, portanto, b é divisível por 5. Concluimos assim que a e b são ambos divisíveis por 5 e isto contraria a hipótese inicial de ser $\frac{a}{b}$, irredutível. Portanto, $\sqrt{5}$ é irracional. $\square$

Sobre a representação decimal dos números racionais

Várias questões propostas nas olimpíadas, como a seguinte (Olimpíada Húngara - 2000) tratam de representação decimal:

“Se $A = (1000 + \sqrt{1000^2 + 1})^{1000}$, determine o 2000-ésimo algarismo após a vírgula de sua representação decimal”.

A menção a este modo de representação nos remete ao fato de um número racional poder ter representação diferente da forma $\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{9}{7}$, etc. Exemplos: 0,5; 0,74; 2,721, etc.

As representações decimais de alguns racionais são finitas. Exemplos: $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{2}{5} = 0,4$; $\frac{1}{80} = 0,0125$. Outros têm representação decimal infinita, as chamadas *dízimas periódicas* que podem ser classificadas em *simples* e *compostas*.

As *simples* não possuem depois da vírgula algarismo que não seja o período (grupo de números que se repete). Exemplos: $\frac{1}{3} = 0,3333\ldots$; $\frac{1}{6} = 0,166666\ldots$; $\frac{5}{11} = 0,454545\ldots$.

As *compostas* possuem após a vírgula algarismos diferentes do período, ou seja, o anteperíodo. As representações decimais finitas ou infinitas podem ser obtidas das frações, dividindo-se o numerador pelo denominador.

Vamos tentar escrever a *dízima periódica* $0,232323\ldots$ em forma de fração (ou seja, um número racional).

Seja $x = 0,23232323\ldots$.

Multiplicando ambos os termos por 100, temos:

$$100x = 23,232323\ldots \Leftrightarrow$$

$$100x = 23 + x \Leftrightarrow$$

$$99x = 23 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{23}{99}.$$

Podemos generalizar o procedimento para qualquer *dízima periódica simples*.

Considere

$$x = 0,(a_1a_2\ldots a_r)(a_1a_2\ldots a_r)\ldots$$

Multiplicando ambos os termos da igualdade por 10^r , obtemos:

$$10^r x = (a_1a_2\ldots a_r), (a_1a_2\ldots a_r)(a_1a_2\ldots a_r)\ldots$$

que equivale a

$$10^r x = (a_1a_2\ldots a_r) + x \Leftrightarrow$$

$$10^r x - x = (a_1a_2\ldots a_r) \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{(a_1a_2\ldots a_r)}{10^r - 1}.$$

Caso o número apresente parte inteira podemos escrevê-lo como soma da parte inteira com a parte decimal.

No caso da chamada *dízima composta* é ainda possível usar o raciocínio anterior como fonte de inspiração.

Seja reduzir à forma de fração ordinária $x = 0,21507507507\ldots$. Então,

$$100x = 21 + 0,507507507\ldots$$

$$= 21 + \frac{507}{999}$$

$$= \frac{21 \times 999 + 507}{999}$$

$$= \frac{2 \times (1000 - 1) + 507}{999}$$

$$= \frac{21507 - 21}{999}$$

$$= \frac{21486}{999}.$$

Portanto, $x = \frac{21486}{99900}$.

O caso acima é uma *verificação* da regra “Quando a dízima é composta o numerador será a diferença entre o número formado pela parte não periódica seguida de um período e o número que expressa o anteperíodo. O denominador é formado por tantos nove quantos são os algarismos do período, seguidos de um número de zeros igual ao número de algarismos do anteperíodo.” Uma continuação dessa atividade seria propor uma generalização.

Alguns problemas olímpicos como a seguir se referem às características das casas decimais de um número.

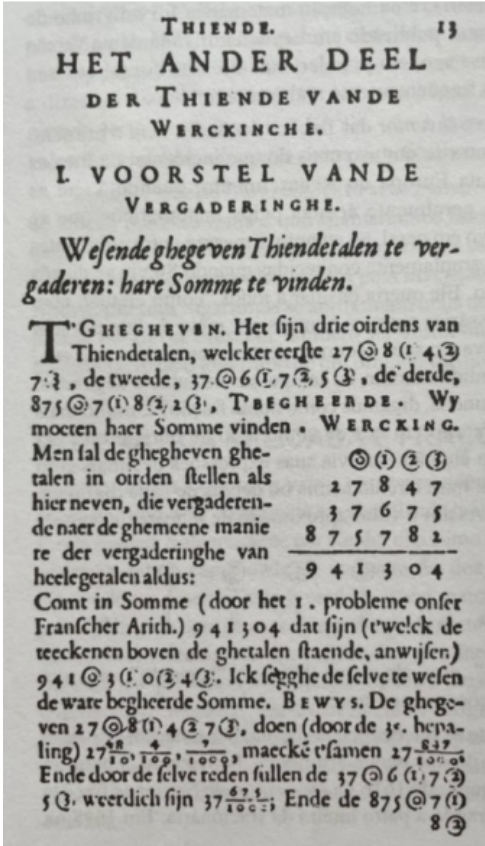
Problema 1.7 (Olimpíada Regional de Matemática da Grande Porto Alegre 2017). Considere o número $0,112358314\cdots$, onde cada algarismo, a partir do terceiro, é obtido somando os dois algarismos anteriores a ele, ficando-se apenas com o algarismo das unidades e desprezando o das dezenas. Esse número é racional ou irracional? Justifique.

Solução: O número dado possui uma clara lei de formação e infinitas casas decimais, entretanto prosseguindo na geração dos algarismos não aparece período, portanto não podendo ser representado por fração não é racional. □

O que abordamos nesta seção pode ser enriquecido com a nota histórica a seguir.

“A introdução da notação decimal, com as regras de Cálculo hoje conhecidas e usadas, devemos-la ao matemático holandês Simon Stevin (1548-1620). Não foi ele propriamente o inventor das frações decimais, pois estas já aparecem na China Antiga, na Arábia Medieval e mesmo em trabalhos matemáticos europeus do século XVI que precederam a Stevin. Todavia, em seu livro *A Dízima*, publicado em 1585, foi o primeiro a fazer uma apresentação sistemática e completa das frações decimais e de seu cálculo. É fácil entender a oportunidade desta descoberta, numa época em que a computação numérica era essencial para as atividades comerciais que se intensificavam e, mais ainda, para lidar com os laboriosos cálculos de astronomia.” (Ávila, 1994, p. 24).

Figura 1.2: Uma página de La Disme edição de 1634



Fonte: Boyer (1996, p. 218)

A introdução da representação dos números racionais na forma decimal ajudou a tornar a Mate-

mática mais acessível e consequentemente sua popularização, cenário possível somente pela consolidação na Europa Ocidental do sistema de numeração Indo-arábico em substituição ao sistema de numeração romano, dentre outros.

Stevin, um guarda-livros de Bruges, tornou-se engenheiro no exército do príncipe Maurício de Orange, que apreciava a maneira como Stevin combinava o sentido prático com a compreensão teórica e a originalidade. Em La disme (1585) introduziu frações decimais como parte de um projeto para unificar o sistema de medições numa base decimal. Foi um dos maiores desenvolvimentos tornados possíveis pela introdução do sistema de numeração indo-árabe. (Struik, 1992, p.152).

Figura 1.3: Simon Stevin



Fonte: Google Imagem

Os cálculos com frações ordinárias são sem dúvida mais complicados que os mesmos cálculos com decimais. De extrema utilidade na época em que a expansão comercial por meio das grandes navegações começava a ser intensa, é ainda hoje a representação mais popularizada devido ao seu uso constante nos meios de comunicação e a disseminação de calculadoras em smartphones ou computadores. Essa constatação ratifica o desejo de Stevin ao propor esse tipo de representação.

É claro que Stevin não foi em nenhum sentido o inventor das frações decimais, nem o primeiro a usá-la sistematicamente (...) Entre o povo em geral, no entanto, e mesmo entre praticantes da matemática, as frações decimais só se tornaram amplamente conhecidas quando Stevin se dispôs a explicar o sistema de modo elementar e completo. “Ele queria ensinar a todos ‘como efetuar com facilidade nunca vista’, todas as computações necessárias entre os homens por meio de inteiros sem frações.” (Boyer, 1996, p.217)

Todavia, como na maioria das criações revestidas de grande praticidade é preciso estar atento a questões emergentes com a nova prática proposta; de fato, o uso das calculadoras induz a pensar que números cuja representação decimal tenham infinitas casas e não sejam periódicos possam parecer racionais, unicamente pela forma de arredondamento. A raiz quadrada de 2, por exemplo, aparece na calculadora do smartphone como 1,414213562.

Sobre irracionalidades trigonométricas

Um aspecto que em geral não é abordado no Brasil nas aulas de Matemática no ensino médio diz respeito a conexão entre números irracionais e trigonometria. Geralmente como exemplos de números irracionais ou da prova da sua existência não são apresentados irracionais associados a valores do seno ou cosseno. A seguir dois exemplos de como é possível tal associação.

Exemplo 1. Provar a irracionalidade de $\cos 20^\circ$.

Prova: Considere:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (1)$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b. \quad (2)$$

Se $a = b = t$, temos:

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t \quad (3)$$

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t. \quad (4)$$

Substituindo a por $2t$ e b por t em (1), temos:

$$\begin{aligned}\cos(2t + t) &= \cos 3t \\ &= \cos 2t \cos t - \sin 2t \sin t.\end{aligned}$$

Usando (3) e (4) e a identidade $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, temos:

$$\begin{aligned}\cos(3t) &= (\cos^2 t - \sin^2 t) \cos t - (2 \sin t \cos t) \sin t \\ &= \cos^3 t - \sin^2 t \cos t - 2 \sin^2 t \cos t \\ &= \cos^3 t - 3 \sin^2 t \cos t \\ &= \cos^3 t - 3(1 - \cos^2 t) \cos t \\ &= 4 \cos^3 t - 3 \cos t\end{aligned}$$

Considerando o enunciado do problema façamos $t = 20^\circ$.

Temos:

$$\cos 60^\circ = 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ.$$

Fazendo $\cos 20^\circ = x$ e $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, temos:

$$8x^3 - 6x - 1 = 0,$$

onde uma das raízes é $\cos 20^\circ$.

Pelo **Teorema das Raízes Racionais**:

Se um polinômio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

possui raízes racionais na forma p/q então, tem-se que:

1. a_n é divisível por q ;
2. a_0 é divisível por p .

O teorema garante que as únicas possíveis raízes racionais são $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$. Por substituição vemos que nenhum destes números é raiz, portanto, a raiz é irracional. Por outro caminho basta verificar que esses oito valores não correspondem a $\cos 20^\circ$ na tabela trigonométrica. $\square$

Exemplo 2. Provar a irracionalidade de $\sin 10^\circ$

Prova: Seja $\sin(3t) = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$, obtido da fórmula do seno do arco duplo.

Substituindo t por 10° na fórmula acima e lembrando que $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, temos:

$$3 \sin 10^\circ - 4 \sin^3 10^\circ = \frac{1}{2}.$$

Fazendo a mudança de variável $\sin 10^\circ = x$, temos $8x^3 - 6x + 1 = 0$. Como no exemplo anterior, não é difícil mostrar que a equação não possui raízes racionais. Portanto, $\sin 10^\circ$ é irracional.

Uma outra forma de demonstração é a seguinte:

Usando-se $\cos(2t) = 1 - 2 \sin^2 t$ (obtido da fórmula do cosseno do arco duplo e da relação fundamental da trigonometria), e substituindo t por 10° temos:

$$\cos 20^\circ = 1 - 2 \sin^2 10^\circ.$$

Suponhamos agora que $\sin 10^\circ$ fosse racional, então $\sin^2 10^\circ$ e $1 - 2 \sin^2 10^\circ$ seriam racionais. Como $\cos 20^\circ$ é irracional, eis a contradição! $\square$

Os dois exemplos apontam a possibilidade de se ter um processo em cadeia para a obtenção de outros irracionais trigonométricos.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Como desafio seguem quatro questões de olimpíadas cujas soluções estão relacionadas com o assunto abordado no presente artigo.

Problema 1.8 (Olimpíada Regional de Matemática da Grande Porto Alegre 2017). Denominaremos de casa de Einstein de um número irracional à primeira casa depois da vírgula de sua expansão decimal que é seguida por um bloco de três dígitos iguais. Assim sendo, pede-se:

- a) Mostrar que existem números irracionais sem casa de Einstein.
- b) Mostrar que, para cada inteiro $n \geq 1$, existe um número irracional cuja casa de Einstein é a n -ésima casa decimal.

Problema 1.9 (Olimpíada Regional de Matemática da Grande Porto Alegre 2017). Sejam u, v, w três números reais, tais que $u - v$ e $u + v + w$ são números racionais. Pergunta-se:

- Se um dentre u e v for racional, então w é racional? Justifique.
- Se v for racional, então $u + v$ é racional? Justifique.
- Se w for racional, então u e v são racionais? Justifique.

Problema 1.10 (Olimpíada húngara - 2000). Se $A = (1000 + \sqrt{1000^2 + 1})^{1000}$, determine o 2000-ésimo algarismo após a vírgula de sua representação decimal.

Problema 1.11 (Olimpíada Regional de Matemática da Grande Porto Alegre 2017). Cada afirmação abaixo refere-se à circunferência e à área de um mesmo círculo. Para cada uma, decida qual a melhor resposta dentre as seguintes alternativas: “sempre vale”, “pode valer, mas nem sempre vale”, “nunca vale”. Justifique todas as afirmações que fizer, mas considere sabido que π e $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ são números irracionais.

- se a circunferência é número racional, então a área também é racional;
- se a circunferência é número irracional, então a área também é irracional.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo dos números racionais e irracionais representam um campo fértil para o aprofundamento da Matemática. No presente artigo quisemos nos fixar em três aspectos (existência dos irracionais, representação decimal dos racionais e irracionalidades trigonométricas), aspectos importantes tanto no âmbito interno da Matemática quanto pela História a eles associados.

Fica claro também a importância do tema pela presença constante de questões olímpicas a esse respeito. Uma proposta de continuação do conteúdo

apresentado no artigo poderia contemplar a *representação na reta*, a *questão da densidade*, *irracionais logarítmicas* e *irracionais algébricos e transcendentais*, considerando também o aspecto histórico.

Por fim um agradecimento aos professores Gabriel Guedes e Eudes Mendes do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco por disponibilizar problemas de olimpíadas que permitiu escolhas para a elaboração desse artigo.

REFERÊNCIAS

- [1] ÁVILA, Geraldo. *Cálculo I: Funções de Uma Variável*. Rio de Janeiro: LTC, 1994.
- [2] BEUTELSPACHER, Albrecht. *Matemáticas: 101 perguntas fundamentais*. Madri: Alianza editorial, 2011.
- [3] BOYER, C. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
- [4] CAMARGO, Miguel Antônio de. Caracterização dos números racionais e irracionais. *Revista da Olimpíada*, Goiânia, n.4, p.75-83, 2003.
- [5] DESSANTI J. T. Uma Crise de Desenvolvimento Exemplar: A “Descoberta” dos Números Irracionais. Tradução e Comentários de R. R. Baldino na Disciplina Análise. Mestrado em Educação Matemática, Rio Claro (SP), 1991.
- [6] GUNDLACH, Bernard. *História dos Números e Numerais*. São Paulo: Ed. Atual, 1992.
- [7] IFRAH, Georges. *Os Números: História de Uma Grande Invenção*. Rio de Janeiro: Globo, 1989.
- [8] JONES, Phillip S. Irrationals or Incommensurables I: Their Discovery, and “Logical Scandal”. *The Mathematics Teacher*, p. 123-127, February 1956.
- [9] KNOR. “La Croix des Mathematiciens”: The Euclidean Theory of Irrational Lines. *Bulletin*

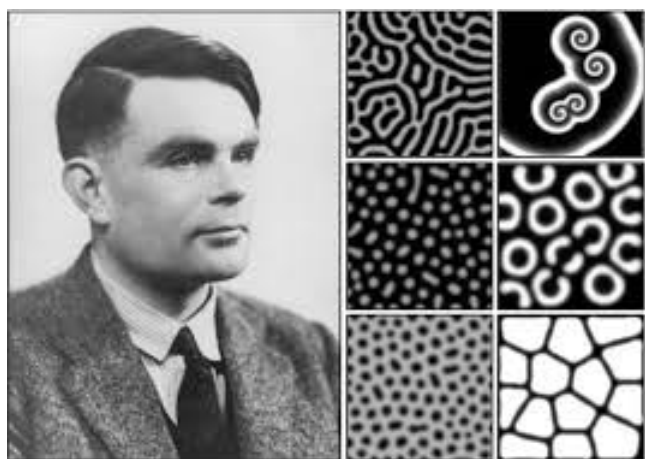
- [10] STRUIK, Dirk. *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1987.

2. Curiosidade

O Enigma das Manchas: A Matemática de Turing e a Morfogênese dos Padrões Naturais

Roberta Elaine Domingos de Araújo¹

Figura 2.1: Alan Turing e padrões de auto-organização associados à sua teoria sobre morfogênese.



Fonte: NAGAO; VARELA (2016).

É comum sermos fascinados pelas manchas que recobrem os leopardos e pelas listras que singularizam as zebras. No entanto, raramente nos detemos a refletir se existe uma lógica subjacente a essa aparente aleatoriedade da natureza, e menos ainda recorreremos à matemática na tentativa de desvendá-la.

Entretanto, houve quem transformasse esse fascínio em teoria, dando uma contribuição inovadora para a compreensão deste fenômeno bastante complexo e fundamental para o conhecimento do mundo biológico. Trata-se de Alan Turing, pioneiro da informática e matemático notável, célebre por decifrar

o código Enigma durante a Segunda Guerra Mundial e por estabelecer os fundamentos da computação moderna.

Em uma mudança significativa de perspectiva, Turing voltou-se também às matemáticas ocultas da natureza, revelando padrões que se escondem sob sua aparente aleatoriedade. Em Manchester, onde trabalhava desde 1948, Turing percorria o interior de Cheshire em busca de indícios matemáticos na natureza. Nas margaridas, por exemplo, identificou números característicos da sequência de Fibonacci, (34, 55 ou 89 pétalas), revelando a harmonia oculta em suas formas simétricas.

Turing intuiu que os organismos biológicos obedeciam a uma lógica interna e que fenômenos como o mosaico da pele das girafas ou a disposição espiralada das folhas poderiam ser explicados matematicamente. O desafio, porém, estava em desvendar o ponto de partida desse mistério.

Nas fases iniciais do desenvolvimento, a maioria dos seres vivos, vegetais, animais ou humanos, apresenta embriões muito semelhantes, esferas uniformes compostas por células idênticas. Em determinado momento, porém, essa massa celular dá origem a organismos distintos: de uma palmeira a uma estrela-do-mar, ou mesmo a um ser humano.

Intrigado com esse fenômeno, Turing raciocinou que se tratava do mesmo princípio que explicava os padrões de coloração nos animais, as formas das plantas e até a formação dos dedos. Foi a partir dessa intuição que passou a elaborar equações, estruturando pouco a pouco a sua teoria.

Em 1952, Alan Turing divulgou aquele que seria seu último artigo científico, intitulado “The Chemical Basis of Morphogenesis”, publicado pouco antes do seu falecimento aos 41 anos. Nesse estudo, ele elaborou um modelo matemático para compreender como surgem os padrões observados em organismos vegetais e animais. Foi nesse contexto que introduziu o termo morfógeno, derivado do grego *morphé* (forma) e *gen* (gerar), para nomear os agentes que dão origem a formação dessas estruturas. O con-

¹Discente da UFRPE e colaboradora deste jornal

ceito de morfogênese, portanto, pode ser entendido como o processo de geração de formas.

Turing defendia que os padrões observados nos organismos não surgiam de forma aleatória, mas resultavam da interação de certas substâncias químicas que se espalhavam entre células iguais. Esses compostos poderiam ser hormônios ou genes, embora sua composição química ainda não fosse conhecida na década de 1950. A ideia central é que esses morfógenos se propagam e reagem entre si, fenômeno que hoje é descrito como processo de reação-difusão.

Em nível molecular, um morfógeno pode iniciar reações químicas enquanto se distribui por um conjunto de células, enquanto outro morfógeno atua para restringir sua propagação. Essas interações provocam a diferenciação celular, dando origem aos padrões visíveis nos organismos, desde a formação dos dedos até as marcas na pele de animais, como as manchas de um leopardo. Por exemplo, em uma zebra, um morfógeno pode escurecer certas células da pele, enquanto outro interrompe sua ação, resultando nas clássicas listras pretas e brancas.

Embora o artigo de Turing fosse apenas uma abordagem teórica que discutia principalmente os fundamentos matemáticos da criação de padrões e estruturas, foi uma base importante para futuras pesquisas nessa área. A visão de Turing mostrou que a matemática não é apenas uma linguagem abstrata, mas uma chave capaz de desvendar os segredos da vida.

Referências.

- [1] BATTERSBY, M. The maths behind a leopard's spots. BBC Earth, 2019. Disponível em: <https://www.bbcearth.com/news/the-maths-behind-a-leopards-spots>. Acesso em: 31 ago. 2025.
- [2] BBC NEWS BRASIL. Como fascínio do matemático Alan Turing por manchas de leopardos o fez resolver um enigma. BBC News Brasil, 12 abr. 2025. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/articles/c1wdpe0vd08o>.

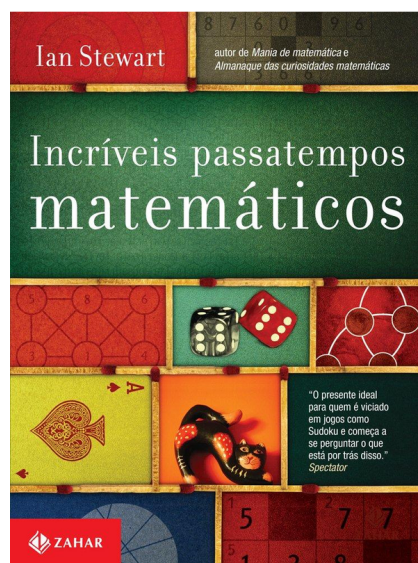
[com/portuguese/articles/c1wdpe0vd08o](https://www.bbc.com/portuguese/articles/c1wdpe0vd08o). Acesso em: 31 ago. 2025.

- [3] INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA (IMPA). Como os animais adquiriram manchas e listras?, 01 abr. 2019. Disponível em: <https://impa.br/notices/como-os-animais-adquiriram-manchas-e-listras/>. Acesso em: 31 ago. 2025.
- [4] LOURENÇO, C. Turing e a morfogênese. Lisboa: Departamento de Informática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa; Instituto de Telecomunicações, Security and Quantum Information Group, 2021.
- [5] NAGAO, R.; VARELA, H. Padrões de Turing em sistemas químicos. Química Nova, São Paulo, v. 39, n. 2, p. 139-148, 2016.
- [6] TURING, A. M. The chemical basis of morphogenesis. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences, v. 237, n. 641, p. 37-72, 1952.

3. Indicação de Leitura

Incríveis passatempos matemáticos

Filipe Andrade da Costa²



Fonte: Google

²Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco

O livro “Incríveis passatempos matemáticos” foi escrito pelo matemático Ian Stewart, professor emérito da Universidade de Warwick, Inglaterra, que é conhecido também pela coluna que assina mensalmente na *Scientific American* e por seus artigos nas revistas *Nature* e *New Scientist*. Foi vencedor do prêmio Michael Faraday³, por seu trabalho em divulgar ideias matemáticas ao público geral e este livro é uma de suas grandes contribuições. Além disso, deu contribuições na teoria da bifurcação, formação de padrões e biomatemática, e na teoria das catástrofes.

Neste livro, o autor trata de variados temas envolvendo diversas áreas da matemática como aritmética, grafos, topologia, história e geometria. O livro tem uma linguagem simples e direta e apresenta curiosidades e desafios com diversos níveis de dificuldade, alguns que são simples cálculos para nos mostrar alguns padrões interessantes, e que a partir dos quais podemos nos perguntar se tais situações não podem acontecer com outras configurações. Além disso, nos traz situações envolvendo criptografia abordando como em certas situações a compreensão da frequência típica das letras em um dado idioma podem ajudar a desvendar mensagens cifradas e além disso, como as ferramentas matemáticas são utilizadas para manter nossos dados seguros.

Podemos encontrar no livro curiosidades sobre a matemática de civilizações antigas, suas escritas, formas de tentar resolver problemas práticos, assim como alguns problemas clássicos e interessantes como o do quadrado mágico e suas generalizações, o dilema do joalheiro, as interessantes matemáticas, inclusive situações envolvendo problemas matemáticos mais modernos como algumas conjecturas com formulações simples e que podem nos deixar intrigados, como por exemplo a Conjectura de Collatz-

Syracuse-Ulam⁴. Essas são apenas algumas das coisas que podemos encontrar nessa obra.

Se você gosta de curiosidades matemáticas esse livro será um ótimo passatempo e que vale uma leitura sem pressa, aproveitando cada um dos tópicos que ele possui, assim como um bom tempo pensando em alguns dos desafios propostos. Mas não apenas para este público, o livro também pode servir como uma interessante porta de entrada para aqueles que no geral acham a matemática sem graça, e através de alguns desses tópicos despertar talvez uma visão diferente da matemática.

[1] Professor Ian Stewart FRS;
<https://royalsociety.org/people/ian-stewart-12339/> acessado em: 09 de Agosto de 2025.

[2] STEWART, Ian. Incríveis passatempos matemáticos. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2010.

4. Quem pergunta, quer saber!

O que são os problemas de Hilbert?

Severino Barros de Melo⁵

Na seção *Quem pergunta, quer saber!* da edição número 11 do nosso jornal apresentamos brevemente o *Mathematikum*, um museu interativo de Matemática criado em 2002 em Giessen (Alemanha). Os visitantes poderiam tirar dúvidas e o então diretor do museu, o matemático Albrecht Beutelspascher respondeu a várias dessas perguntas sistematizadas no livro (traduzido do alemão para o espanhol) intitulado *Matemáticas: 101 preguntas fundamentales* (Alianza Editorial: Madri, 2015). Eis uma dessas questões em tradução livre:

Pergunta: O que são os problemas de Hilbert?

³É um prêmio oferecido pela Royal Society, o qual é concedido anualmente ao cientista ou engenheiro por “excelência na comunicação de ciências ao público do Reino Unido”.

⁴Seja x_0 um número natural qualquer, e formemos uma sequência de números seguindo o seguinte processo: Se x_0 é par tomemos $x_1 = \frac{x_0}{2}$; caso seja ímpar tome $x_1 = 3x_0 + 1$. E repetimos o processo com os números assim obtidos. A conjectura de Collatz nos diz que ao repetirmos suficiente vezes tal processo, chegaremos ao número 1, independente de quem seja x_0 . Por exemplo, se começamos com $x_0 = 3$, temos a seguinte sequência formada 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

⁵Docente do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco

Resposta:

Quando David Hilbert teve que apresentar uma conferência durante o Congresso Internacional de Matemática que aconteceu em Paris no ano de 1900, paralelamente à Exposição Universal, todos esperavam que o matemático de maior destaque daquele momento celebrasse na ocasião os maiores êxitos matemáticos conseguidos no século XIX.

Porém Hilbert fez algo muito diferente, algo que nunca havia feito anteriormente e para isso precisava de coragem e autoconfiança coisas que sem dúvida possuía: olhar para o futuro. E não somente no sentido de prever o que ocorreria, quais os teoremas da Matemática seriam demonstrados. O que Hilbert fez foi algo muito específico, algo que só poderia ser feito por alguém com um profundo conhecimento de quase todos os ramos da Matemática: identificou os problemas fundamentais com tendência de serem abordados pelos matemáticos no século XX. Como um visionário fez uma lista dos problemas sobre os quais os matemáticos do século vindouro morreriam de trabalhar. Como introdução disse:

“Quem de nós não gostaria de descerrar o véu por trás do qual se oculta o futuro para dar uma olhada nos iminentes avanços de nossa ciência e dos mistérios de sua evolução nos séculos vindouros?”

Quais os objetivos concretos que os mais eminentes gênios matemáticos da geração futura irão perseguir?

Quais os novos métodos e realidades serão descobertas nos novos séculos no amplo e rico campo do pensamento matemático?

Durante sua conferência apresentou 23 problemas de todas as áreas da Matemática: geometria, teoria dos números, lógica, topologia, aritmética e álgebra.

O que surpreende é que Hilbert tinha razão. Os problemas por ele mencionados exerceram uma enorme influência nas Matemáticas do século XX. São os problemas que de certo modo definem como *leitmotiv* as Matemáticas do século XX. Com cer-

teza, a celebridade de Hilbert contribuiu muito para isso: qualquer um que resolvesse alguns daqueles problemas teria garantido fama e reconhecimento.

A solução de alguns problemas aconteceu rapidamente (o terceiro foi resolvido por Max Dehn naquele mesmo ano); alguns precisaram de várias décadas (como o décimo, que foi resolvido em 1970); outros teriam uma solução que o próprio Hilbert já suspeitava (como o sétimo, que tem relação com números transcendentais); alguns tinham uma solução que entrava em contradição com as ideias de Hilbert acerca da Matemática (o primeiro problema, sobre a hipótese do contínuo); e no caso de alguns problemas foi demonstrado a impossibilidade de solução (por exemplo, o segundo, por meio do teorema da incompletude de Godel); e vários ainda estão atualmente sem solução (o oitavo, o da conjectura de Riemann).

Jamais, nem antes nem depois, uma só conferência condicionou durante tanto tempo as Matemáticas em toda sua extensão com os 23 problemas expostos por Hilbert no ano de 1900 em Paris.

5. Eventos

Fiquem Ligados!!!

- **II Congresso Internacional GeoGebra**
 - Local: Universidade de Coimbra- Portugal
 - Data: 23 a 25 de outubro de 2025
 - Mais informações: <https://congresso.geogebra.org/index.php/pt/pagina-inicial/>
- **II Workshop da SBM de Mulheres na Matemática 2025**
 - Local: Instituto de Matemática IM-UFAL - Maceió/AL
 - Data: 29 a 31 de outubro de 2025

- Mais informações: <https://sites.google.com/view/iiww-sbm/home>
- **IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe (IV CEMACYC)**
 - Local: Santo Domingo - República Dominicana
 - Data: 02 a 07 de novembro de 2025
 - Mais informações: <https://iv.cemacyc.org/>
- **I Seminário Nacional do Grupo de Pesquisa em Didática da Matemática**
 - Local: Universidade Estadual da Paraíba - Campina Grande/Paraíba
 - Data: 05 a 07 de novembro de 2025
 - Mais informações: <https://www.eventos3.com.br/iseminariogpdm/>
- **XVIII Enama - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
 - Local: Instituto de Matemática - Universidade Federal da Bahia
 - Data: 05 a 07 de novembro de 2025
 - Mais informações: <https://www.eventos3.com.br/enama2025/>
- **XVI Semana de Matemática da UFRPE - SEMAT**
 - Local: Universidade Federal Rural de Pernambuco
 - Data: 10 a 14 de novembro de 2025
 - Mais informações: <https://bio.site/semat.ufrpe>
- **XIII Semana de Matemática da UFCG - SEMAT**
 - Local: Universidade Federal de Campina Grande
 - Data: 11 a 14 de novembro de 2025
- Mais informações: <https://mat.ufcg.edu.br/semanamat2025/>
- **1º Encontro Nacional em Popularização da Matemática**
 - Local: UNICAMP - Campinas/SP
 - Data: 03 a 05 de dezembro de 2025
 - Mais informações: <https://sbm.org.br/popmat/>
- **V Seminário Nacional de Linguagem e Educação Matemática (SENALEM)**
 - Local: PUC-SP - Campus Consolação
 - Data: 03 a 05 de dezembro de 2025
 - Mais informações: <https://eventos.pucsp.br/5-senalem/>

6. Soluções de Olimpíadas

OPEMAT 2024 - 2ª Fase Nível 1

Nesta edição apresentaremos a resolução das questões discursivas e de verdadeiro ou falso da prova da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2024 referentes ao nível 1.

Problema 6.1. Os 15 membros da comissão de provas da OPEMAT estavam sentados em torno de uma mesa redonda quando, de repente, o coordenador da OPEMAT entra na sala, esbaforido, gritando:

– “Pessoal, é urgente! Temos uma demanda enorme e pouca gente para ajudar. O que faremos agora?” – Após uma longa discussão, ele decide escolher aleatoriamente três membros da comissão de provas para auxiliá-lo nas tarefas pendentes. De quantas maneiras ele pode escolher estes três membros de forma que pelo menos dois destes estejam sentados um ao lado do outro?

Solução. Podemos separar em dois casos, à saber: o caso em que os três membros escolhidos estão juntos e o caso em que dois deles estão juntos e outro está afastado desses dois.

No primeiro caso, basta escolher um deles. Depois, escolhemos os dois mais próximos no sentido anti horário. Podemos fazer isso de 15 maneiras.

No segundo caso, os dois que ficarão juntos escolhendo primeiro um deles e depois o outro que fica mais próximo no sentido anti horário. Isso pode ser feito de 15 maneiras. Depois, escolhemos o que fica afastado. Ele não pode estar junto dos outros dois e daí teríamos $15 - 4 = 11$ maneiras de escolhê-lo. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $15 \cdot 11 = 165$ maneiras de fazer a escolha no segundo caso.

Como o caso 1 não pode acontecer simultaneamente com o caso 2, e eles esgotam todas as possibilidades, pelo princípio aditivo, teremos $15 + 165 = 180$ possibilidades no total. $\square$

Problema 6.2. Gaucledes trabalha na π -loto transportes como motorista e fará apenas 100 viagens pela empresa. No aplicativo da π -loto após cada viagem o motorista recebe uma nota que pode ser 1, 2, 3, 4 ou 5. Curiosamente, Gaucledes recebeu até agora apenas notas 1 e notas 5 (as vezes ele vai reto nas curvas ou faz curva nas retas) e sua média no aplicativo é 3,9. Quais as possibilidades para o número de viagens que Gaucledes fez pela π -loto até agora?

Solução. Vamos dizer que x seja o número de viagens em que Gaucledes ficou com nota 1 e y o número de viagens em que Gaucledes ficou com nota 5. O número total de viagens feitas por ele é $x + y$. Daí:

$$\frac{x + 5y}{x + y} = 3,9 = \frac{39}{10}$$

e daí:

$$10x + 50y = 39x + 39y.$$

Logo:

$$29x = 11y.$$

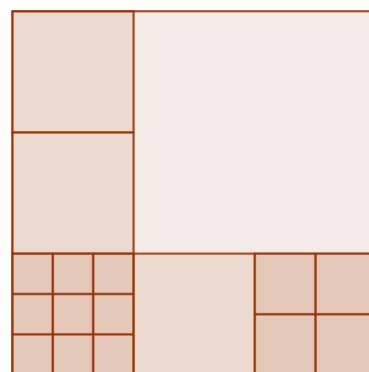
Assim,

$$x = \frac{11y}{29}.$$

De onde vem que 29 é um divisor de y já que 11 é primo. Os primeiros pares que satisfazem a equação são $x = 11, y = 29$ que resulta em um total de 40 viagens e $x = 22, y = 58$ que resulta em um total de 80 viagens.

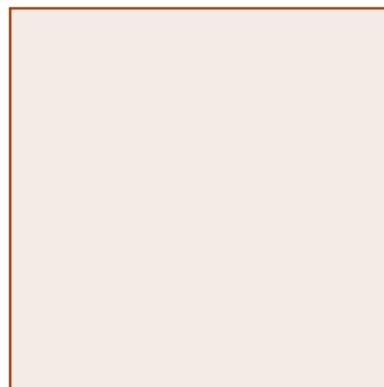
Essas são as únicas soluções para as quais tem-se $x + y \leq 100$. $\square$

Problema 6.3. Márcia desenvolveu uma técnica para recortar cerâmicas quadradas em pedaços quadrados menores, sem deixar sobras. Na figura abaixo, temos uma representação de um dos seus recortes, que resulta em 17 quadrados menores de quatro tamanhos diferentes.

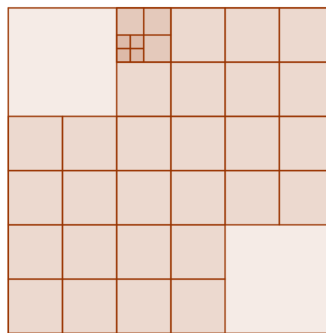


Como podem ser outros recortes de Márcia que resultem em:

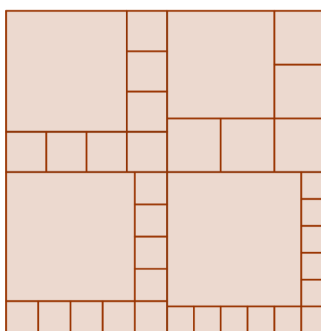
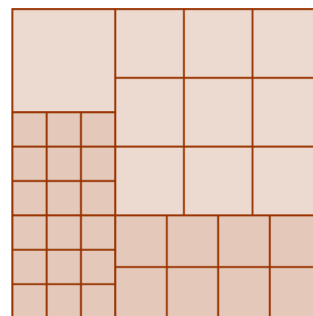
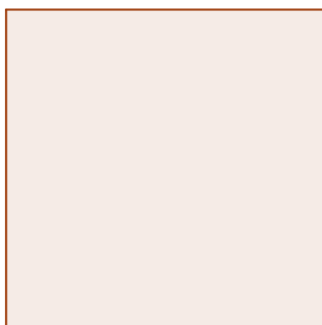
(A) 22 quadrados menores, com no mínimo quatro deles de tamanhos diferentes, sem deixar sobras?



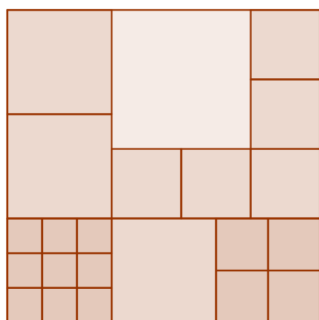
(B) 24 quadrados menores, com no mínimo quatro deles de tamanhos diferentes, sem deixar sobras?



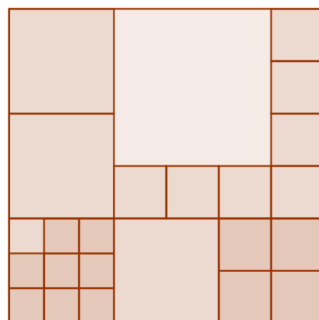
(C) 36 quadrados menores, com no mínimo quatro deles de tamanhos diferentes, sem deixar sobras?



Solução. (A):



(B):



(C):

Três tipos de recorte/solução:

□

Problema 6.4. Seja x o menor número inteiro positivo que satisfaz simultaneamente as seguintes condições: $2x$ é o quadrado de um número inteiro positivo, $3x$ é o cubo de um número inteiro positivo e $5x$ é a quinta potência de um número inteiro positivo. Determine a decomposição em fatores primos de x .

Solução. Do enunciado, podemos escrever

$$2x = a^2, \quad 3x = b^3, \quad 5x = c^5, \quad (5)$$

em que a, b, c são inteiros positivos. Daí podemos concluir que x possui fatores primos 2, 3 e 5. Ou seja, a fatoração em primos pode ser escrita como $x = 2^p 3^q 5^r m$, em que m é o produto de primos maiores que 5. Em virtude de (5), m deve ser um quadrado, um cubo e uma quinta potência perfeita.

Como queremos o menor x possível, devemos tomar $m = 1$. Em geral, a fatoração em primos de uma potência n^k pode ser obtida a partir da fatoração em primos de n multiplicando cada expoente de seus fatores primos por k . Daí os expoentes da fatoração em primos de um quadrado perfeito são todos pares, os de um cubo perfeito são todos múltiplos de 3 e os de uma quinta potência são todos múltiplos de 5. Portanto, a equação (5) nos diz que

- (i) $p + 1, q$ e r são múltiplos de 2;
- (ii) $p, q + 1$ e r são múltiplos de 3;
- (iii) p, q e $r + 1$ são múltiplos de 5.

De (ii) e (iii), o menor valor possível para p é $3 \cdot 5 = 15$. Veja que este valor satisfaz (i). De (i) e (iii), os valores possíveis para q são 10, 20, 30, ... O primeiro deles não satisfaz (ii) e assim o menor valor possível de q é 20. Finalmente, de (i) e (ii), os valores possíveis de r são 6, 12, 18, 24, ... Dessa lista, o menor que satisfaz a condição (iii) é o valor 24. Portanto, o menor valor de x é $2^{15}3^{20}5^{24}$. $\square$

Problema 6.5. Considere o tabuleiro a seguir

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Uma operação permitida é escolher uma linha ou coluna e somar 1 aos três números ou subtrair 1 de todos eles. Determine se é possível, mediante uma sequência de operações permitidas, obter o tabuleiro

9	8	7
6	5	4
3	2	1

Solução. Sim, é possível. Somando 1 oito vezes na primeira linha, obtemos:

9	10	11
4	5	6
7	8	9

Agora somando 1 duas vezes na linha do meio:

9	10	11
6	7	8
7	8	9

Subtraindo 1 quatro vezes da terceira linha, temos:

9	10	11
6	7	8
3	4	5

Escolhendo agora subtrair 1 duas vezes da segunda coluna:

9	8	11
6	5	8
3	2	5

Finalmente, escolhendo 4 vezes a terceira coluna para subtrair 1, obtemos:

9	8	7
4	5	4
3	2	1

$\square$

7. Problemas

Convidamos o leitor a responder alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Envie as soluções dos problemas propostos para o e-mail: ematematicaoxente@gmail.com

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, o envio do arquivo (.tex), no modelo disponível no site, deve ser realizado até **22/12/2025**.

Problema 1. No último aniversário de Carol, enquanto colocávamos as velas com os dois dígitos da idade dela, percebemos algo curioso: os mesmos números podiam ser usados como base e expoente de uma potência — e o resultado era exatamente a idade dela! Consegue descobrir quantos anos ela fez?

Problema 2 (Banco de Questões OBMEP - 2013). O personagem histórico mexicano Benito Juárez nasceu na primeira metade do século XIX (o século XIX vai do ano 1801 ao ano 1900). Sabendo que Benito Juárez completou x anos no ano x^2 , qual foi o ano do seu nascimento?

Problema 3 (OBMEP 2015). Uma sequência de números naturais é definida por:

$$a_{n+1} = a_n + a_n^2$$

para todo número natural $n \geq 1$. E $a_1 = 3$. Por exemplo: $a_2 = a_1 + a_1^2 = 3 + 3^2 = 12$. Qual é o algarismo das unidades de a_{2015} ?

- a) 2 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

8. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n. 34, março de 2025**.⁶

Problema 1. (OBMEP - 2018) Qual é o maior valor possível para o máximo divisor comum de dois números naturais cujo produto é 6000?

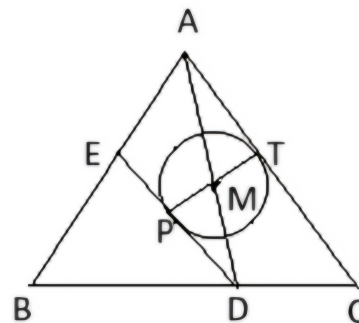
- a) 10 c) 30 e) 60
b) 20 d) 40

Solução. Vamos supor que os números naturais sejam x e y , daí $xy = 6000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3$. Como o MDC é produto dos fatores comuns com os menores expoentes, isto significa que o número 3 não é fator do MDC, pois ele é fator de apenas um número, mas como o MDC tem que ser máximo então para a potência 2^4 , devemos incluir no MDC a potência 2^2 e para a potência 5^3 devemos incluir a potência 5^1 . Logo, o MDC = $2^2 \cdot 5 = 20$ e a resposta é o item b.

Como exemplo poderíamos ter os números $x = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300$ e $y = 2^2 \cdot 5 = 20$. $\square$

Problema 2. (XXXVIII Olimpíada Cearense de Matemática) Seja ABC um triângulo equilátero

com lados de comprimento igual a 3 e seja D o ponto sobre o lado BC tal que o comprimento do segmento CD vale 1. Sejam M o ponto médio do segmento AD e Γ o círculo de centro M e tangente ao segmento AC . Se E é o ponto sobre o segmento AB tal que DE tangencia Γ , calcule o comprimento de BE . Justifique sua resposta.



Solução. Os pontos P e T são pontos de tangência, daí $PM = MT = \text{raio}$. Além disso, $AM = MD$ (pois M é ponto médio de AD).

Os triângulos AMT e DMP são retângulos e congruentes, logo

$$\hat{MAT} = \hat{MDP}.$$

Por outro lado, o ângulo $\hat{ADB}$ é o ângulo externo do triângulo ACD , assim

$$\hat{ADB} = \hat{MAT} + 60^\circ.$$

Mas, no triângulo ADB , temos

$$\hat{ADB} = \hat{MDP} + \hat{BDE} = \hat{MAT} + 60^\circ.$$

Como $\hat{MAT} = \hat{MDP}$, segue que

$$\angle BDE = 60^\circ.$$

Portanto, o triângulo BDE é equilátero. Logo,

$$BE = BD = BC - DC = 3 - 1 = 2.$$

$\square$

Problema 3 (OMAPE-2024). Determine todas as

⁶As soluções dos Problemas 1 e 2 foram enviadas pelo Leitor Amaro José de Oliveira Filho.

funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem a equação funcional:

$$4f(x)f(y) = 6f(x+y) + 9xy.$$

Solução. Queremos determinar todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem a equação funcional:

$$4f(x)f(y) = 6f(x+y) + 9xy.$$

Passo 1: Substituir $y = 0$

Substituímos $y = 0$ na equação:

$$4f(x)f(0) = 6f(x+0) + 9x \cdot 0 \Leftrightarrow$$

$$4f(x)f(0) = 6f(x).$$

Analisamos os casos:

- Caso $f(0) = 0$: Temos que $6f(x) = 0$, logo $f(x) = 0$, observe que a solução identicamente nula não satisfaz a equação funcional. Logo podemos descartar a solução $f(x) = 0$.
- Caso $f(x) \neq 0$: Dividimos por $f(x)$, e encontramos $f(0) = \frac{3}{2}$.

Passo 2: Substituir $y = -x$

Substituímos $y = -x$ na equação funcional:

$$4f(x)f(-x) = 6f(x+(-x)) + 9x(-x) \Leftrightarrow$$

$$4f(x)f(-x) = 6f(0) - 9x^2.$$

Sabemos que $f(0) = \frac{3}{2}$, então:

$$4f(x)f(-x) = 9 - 9x^2 \Leftrightarrow f(x)f(-x) = \frac{9 - 9x^2}{4}.$$

Passo 3: Substituir $x = 1$ na expressão

Substituímos $x = 1$ na expressão:

$$f(1)f(-1) = \frac{9 - 9 \cdot 1^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$f(1)f(-1) = \frac{9 - 9}{4} = 0.$$

Logo, $f(1) = 0$ ou $f(-1) = 0$.

Passo 4: Substituir $y = 1$ na equação

Substituímos $y = 1$ na equação funcional:

$$4f(x)f(1) = 6f(x+1) + 9x.$$

Se $f(1) = 0$, o lado esquerdo se torna:

$$0 = 6f(x+1) + 9x \Rightarrow f(x+1) = -\frac{3x}{2}.$$

Passo 5: Substituir $x = z - 1$

Substituímos $x = z - 1$ na expressão:

$$f(x+1) = -\frac{3x}{2} \Leftrightarrow f((z-1)+1) = -\frac{3(z-1)}{2}.$$

E temos a solução

$$f(z) = -\frac{3z}{2} + \frac{3}{2}.$$

Passo 6: Substituir $y = -1$

Fazendo $y = -1$ na equação funcional:

$$4f(x)f(-1) = 6f(x-1) - 9x.$$

Se $f(-1) = 0$, o lado esquerdo se torna:

$$0 = 6f(x-1) - 9x \Leftrightarrow f(x-1) = \frac{3x}{2}.$$

Passo 7: Substituir $x = z + 1$

Substituímos $x = z + 1$ na expressão:

$$f(x-1) = \frac{3x}{2} \Leftrightarrow f((z+1)-1) = \frac{3(z+1)}{2}.$$

Logo,

$$f(z) = \frac{3z}{2} + \frac{3}{2}.$$

Encontrando assim as duas únicas soluções possíveis para a equação funcional, que são:

$$f(x) = \frac{3(1+x)}{2} \text{ e } f(x) = \frac{3(1-x)}{2}.$$

□