É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 35, volume 1, julho de 2025

ISSN 2526-8651

Editorial

Caros Leitores,

Temos a satisfação de compartilhar com vocês a edição número 35 do nosso jornal. Esta publicação chega até vocês como fruto de um trabalho coletivo, projeto impregnado de empenho e entusiasmo. É estimulante o incentivo que temos recebido daqueles que acessam nossas matérias. Mesmo em conversas informais fora do espaço virtual, frequentemente falamos do É Matemática, OXENTE! despertando a curiosidade dos nossos interlocutores.

Prestes ao lançamento desse número, no dia 17 de junho, fomos convidados para apresentar o jornal por ocasião da premiação aos medalhistas da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT), na Universidade Federal de Pernambuco. Para nós foi um sinal de reconhecimento do nosso trabalho em sintonia com os objetivos das olimpíadas.

No contexto dos *eventos* realizados, merece destaque a live do dia 24 de abril intitulada "Progressão Aritmética e Triângulo Aritmético de Números Ímpares". A palestra foi proferida por Pedro Henrique Sales Vital, baseada no artigo publicado em nossa 27ª edição.

O presente número apresenta na seção *artigo*, um trabalho intitulado *Qual a chance? Descubra a Probabilidade por trás dos Problemas Olímpicos*, elaborado por Roberta Elaine Domingos de Araújo, estudante do programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada-UFRPE (e monitora desse jornal) e Kleber Napoleão Nunes de Oliveira Barros, docente desse mesmo Programa. O artigo além de conectar o assunto com problemas oriundos das olimpíadas, propicia uma reflexão sobre esse ramo da matemática que até o século XVI praticamente inexistia.

Na seção *curiosidade*, Mariana Ferreira da Silva, estudante do curso de licenciatura em Matemática na Universidade Federal Rural de Pernambuco e monitora do nosso jornal, fornece informações a respeito do *Mathigon*, um enfoque da Matemática em Ferramentas Interativas, disponível gratuitamente na internet.

A seção *Quem pergunta, quer saber!* mata a curiosidade daqueles que já se indagaram acerca do que pode ser considerado até hoje, o primeiro livro de Matemática escrito.

A *indicação de leitura* contou com a colaboração do professor Marcelo Pedro dos Santos, do Departamento de Matemática na Universidade Federal Rural de Pernambuco. Ele propõe o livro intitulado *Teorema Vivo*, tradução da obra Théorème vivant, autobiografia do matemático francês Cédric Villani, vencedor da Medalha Fields 2010.

A parte dedicada à *resolução de problemas* apresenta soluções da Olimpíada Pernambucana de Matemática - 2023, (segunda fase, nível 3). Propomos também novos problemas e soluções daqueles propostos na edição 33, enviadas pelos leitores Amaro José de Oliveira Filho e Nélio Antônio da Conceição.

Desejamos uma excelente leitura.

Sumário

1. Artigo

Qual a chance? Descubra a Probabilidade por trás dos Problemas Olímpicos

Roberta Elaine Domingos de Araújo e Kleber Napoleão Nunes de Oliveira Barros

UFRPE - PPGBEA - Programa de Pós Graduação em Biometria e Estatística Aplicada
(52171-900) - Recife - Pernambuco - Brasil

Introdução

A Teoria das Probabilidades é o ramo da Matemática responsável por desenvolver e investigar modelos aplicáveis ao estudo de experimentos ou fenômenos aleatórios. Esses modelos são fundamentais para a compreensão e resolução de problemas propostos em Olimpíadas de Matemática.

O interesse dos matemáticos no estudo sistemático de probabilidades é relativamente recente (séc. XVII) se comparado à História da Matemática e tem suas raízes nos jogos de azar. Nesse contexto, normalmente ocorre a seguinte situação: todos os possíveis resultados têm a mesma chance de ocorrer.

Embora a complexidade dos modelos matemáticos utilizados para descrever fenômenos aleatórios varie conforme a natureza do fenômeno, todos compartilham elementos fundamentais. A seguir, analisaremos exemplos simples e representativos, com o objetivo de introduzir conceitos gerais e essenciais da teoria das probabilidades.

Este artigo tem como objetivo destacar aplicações da Teoria das Probabilidades no contexto das Olimpíadas de Matemática, incentivando o desenvolvimento de estratégias de resolução em problemas através da observação direta do fenômeno aleatório.

Conceitos e Exemplos

Definição 1.1. Qualquer experimento cujo resultado não se consegue prever é definido como um *experimento aleatório*. Nos experimentos aleatórios, mesmo que as condições iniciais sejam sempre as mesmas, os resultados finais de cada tentativa do experimento serão diferentes e não previsíveis.

Exemplo 1.1. [8]

a) lançamento de uma moeda honesta;

b) lançamento de um dado;

c) lançamento de duas moedas;

d) retirada de uma carta de um baralho completo de 52 cartas.

Definição 1.2. *Espaço amostral* é o conjunto formado por todos os possíveis resultados de um experimento ou fenômeno aleatório. Os elementos do espaço amostral serão chamados também de pontos amostrais. Representaremos o espaço amostral por Ω. Nos exemplos dados na definição anterior, os espaços amostrais são:

Exemplo 1.2. [8]

a) Ω=$\{cara(c), coroa(k)\}$;

b) Ω=$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

c) Ω=$\{(c, k), (c, c), (k, c), (k, k)\}$;

d) Ω=$\{Ao...Ko, Ap...Kp, Ae...Ke, Ac...Kc\}$.

Definição 1.3. *Evento aleatório* é um subconjunto qualquer do espaço amostral, que pode ser um único ponto amostral ou uma reunião deles.

Exemplo 1.3. [8] Lançam-se dois dados. Enumerar os seguintes eventos:

A: saída de faces iguais;

B: saída de faces cuja soma seja igual a 8;

C: saída de faces cuja soma seja menor que 2;

D: saída de faces cuja soma seja menor que 15;

E: saída de faces onde uma face é o dobro da outra.

Os eventos pedidos são:

A= $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$,

B= $\{(4, 4), (5, 3), (6, 2), (3, 5), (2, 6)\}$,

C= ϕ evento impossível,

D= Ω evento certo,

E= $\{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 6), (6, 3)\}$.

Definição 1.4. (Definição Clássica de Probabilidade). Suponha um experimento com um número finito de resultados igualmente prováveis. Nesse caso, a *definição clássica de probabilidade* de um evento A, representada por $\mathbf{P}(A)$, é definida por:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mid A \mid}{\mid \Omega \mid}$$

em que | | representa a cardinalidade de cada conjunto.

Suponha que o espaço amostral tem um número finito, n, de elementos, $\Omega = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$. Se para todo i, com $i = 1, 2, \cdots, n$,

$$P(s_i) = \frac{1}{n}$$

isto é, todos os elementos do espaço amostral tem mesma probabilidade, chamamos o espaço de equiprovável.

Exemplo 1.4. [8] Considere o lançamento de um par de dados de 4 faces. Admita que os dados são honestos e interprete essa suposição como cada um dos dezesseis resultados possíveis, isto é, o espaço amostral $\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4\}$. Perceba que para calcular a probabilidade de um evento, deve-se contar o número de elementos do evento e dividir por 16 (o número total de possíveis resultados). A seguir estão algumas probabilidades de eventos calculadas utilizando a definição clássica:

Solução.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big(\text{a soma das jogadas ser par}\big) &= \frac{8}{16} = \frac{1}{2},\\
\mathbf{P}\big(\text{a soma das jogadas ser ímpar}\big) &= \frac{8}{16} = \frac{1}{2},\\
\mathbf{P}\big(\text{o } 1^{\underline{o}} \text{ lançamento ser igual ao } 2^{\underline{o}}\big) &= \frac{4}{16} = \frac{1}{4},\\
\mathbf{P}\big(\text{o } 1^{\underline{o}} \text{ lançamento ser maior que o } 2^{\underline{o}}\big) &= \frac{6}{16} = \frac{3}{8},\\
\mathbf{P}\big(\text{soma} > 4\big) &= \frac{10}{16} = \frac{5}{8}.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 1.5. [3] Uma companhia de seguros analisou a freqüência com que 2.000 segurados (1.000 homens e 1.000 mulheres) usaram o hospital. Os resultados são apresentados na tabela:

Tabela 1: Frequência de uso do hospital por sexo

	Homens	Mulheres
Usaram o hospital	100	150
Não usaram o hospital	900	850
Total	1000	1000

a) Qual a probabilidade de que uma pessoa segurada use o hospital?

b) Qual a probabilidade de escolher ao acaso uma mulher que não usou o hospital?

Solução.

a) Temos que o total de segurados é 2000 e o total de segurados que usaram o hospital é $100 + 150 = 250$. Portanto:

$$P(\text{usar o hospital}) = \frac{250}{2000} = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

b) No total de 2000 pessoas onde 850 são mulheres que não usaram o hospital a

$$P(\text{mulher que não usou o hospital}) = \frac{850}{2000} = 0{,}425.$$

$\square$

A seguir apresentamos os três axiomas que constituem a base fundamental da teoria das probabilidades, a partir dos quais todos os resultados subsequentes os utilizam, direta ou indiretamente.

Definição 1.5. (Definição Axiomática de Kolmogorov[1]). Uma função de probabilidade, representada por $\mathbf{P}$, é uma função que associa a cada evento A um valor, denominado $\mathbf{P}(A)$, que representa a probabilidade de A. Essa função deve atender aos seguintes critérios:

1. $\mathbf{P}$ não é negativo, isto é, $\mathbf{P}(A) \geq 0$, para todo evento A.
2. A probabilidade de todo o espaço amostral Ω é igual a 1, ou seja, $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.
3. Se $A_1, A_2, \ldots$ é uma sequência infinita de eventos mutuamente exclusivos em Ω ($A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$), então

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

Pela definição, temos $0 \leq P(A) \leq 1$.

Definição 1.6. (Probabilidade Condicional). Se A e $B \subset \Omega$, definimos a probabilidade condicional de A, dado que B ocorreu, denotado por $\mathbf{P}(A|B)$, da seguinte forma:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\text{número de elementos de } A \cap B}{\text{número de elementos de } B}.$$

De forma generalizada,

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}, \qquad \mathbf{P}(B) > 0. \qquad (1)$$

A Probabilidade Condicional oferece uma forma de analisar o resultado de um experimento com base em informações limitadas. Alguns exemplos de situações em que essa abordagem é aplicada incluem:

a) Em um estudo sobre a satisfação de clientes, você é informado que um cliente fez uma reclamação sobre um produto. Qual é a probabilidade de que esse cliente tenha retornado o produto, considerando que ele já fez uma reclamação?

b) Durante um jogo de futebol, é informado que a equipe A marcou um gol nos primeiros 10 minutos de jogo. Qual é a probabilidade de que a equipe A vença a partida, dado que já fez um gol logo no início?

Exemplo 1.6. [5] Considere os seguintes cenários:

- "Uma pessoa tem dois filhos. Sabe-se que pelo menos um deles é menino".
- "Uma pessoa tem dois filhos. Sabe-se que o mais velho é um menino".

Calcule, em cada cenário, a probabilidade dessa pessoa ter dois meninos.

Solução. Para resolver essa questão vamos usar o conceito de probabilidade condicional e a probabilidade da união de eventos. Consideremos A o evento "o filho mais jovem é um menino" e B o evento "o filho mais velho é um menino". Observe que $P(A) = \frac{1}{2}$ e $P(B) = \frac{1}{2}$. Como os eventos A e B são independentes, temos:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Na primeira situação, estamos interessados em calcular a probabilidade do evento $A \cap B$ dado que ocorre o evento $A \cup B$. Assim,

$$\begin{aligned} P(A \cap B \mid A \cup B) &= \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

[1]Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987) foi um matemático russo considerado o fundador da moderna Teoria das Probabilidades, ao formalizá-la por meio de uma abordagem axiomática em 1933.

Na segunda situação estamos interessados em calcular a probabilidade do evento $A \cap B$ dado que ocorre o evento B. Assim,

$$\begin{aligned} P(A \cap B \mid B) &= \frac{P((A \cap B) \cap B))}{P(B)} \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.7. [8] Uma moeda honesta é lançada três vezes sucessivas. Desejamos encontrar a probabilidade condicional $\mathbf{P}(A|B)$ quando A e B são os eventos: A = aparecem mais caras do que coroas, B = o primeiro lançamento é uma cara. Sendo c : cara e k : coroa.

Solução. Temos que o espaço amostral consiste de oito elementos,

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccc} ccc, & cck, & ckc, & ckk, \\ kcc, & kck, & kkc, & kkk \end{array} \right\}$$

que supomos ser igualmente provável. O evento B consiste nos quatro elementos: ccc, cck, ckc, ckk, então sua probabilidade é:

$$\mathbf{P}(B) = \frac{4}{8}.$$

O evento $\mathbf{P}(A \cap B)$ consiste nos três elementos ccc, cct, ckc, logo sua probabilidade é:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{3}{8}.$$

Utilizando a fórmula da probabilidade condicional (1), temos que:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{3}{4}.$$

□

Problema de Monty Hall

O próximo exemplo traz o chamado *"Problema de Monty Hall"*, que é um exemplo "clássico" e amplamente reconhecido em competições de lógica e probabilidade, como olimpíadas escolares e universitárias. Embora sua forma clássica (três portas, prêmio, apresentador) seja rara nessas provas, os conceitos subjacentes, como escolha condicional e atualização de probabilidades, são frequentemente abordados. O site "Clubes OBMEP" é um exemplo de material educacional que adapta esse problema [4]. Ele é inspirado em um programa televisivo dos Estados Unidos chamado "Let's Make a Deal", exibido na década de 1970 e apresentado pelo Monty Hall. Adaptações também foram exibidas no Brasil por vários apresentadores desde a década de 80, por exemplo, a "Porta dos Desesperados" do programa do apresentador Sérgio Malandro.

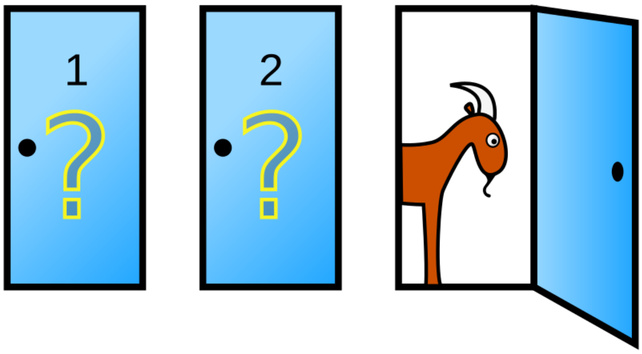
Exemplo 1.8. [3] Em certo programa de TV, o objetivo é ganhar um carro como prêmio. O apresentador do programa mostra a você três portas fechadas. Atrás de uma das portas há um carro e atrás de cada uma das outras duas há um bode, mas não é possível ver em qual até abrir as portas. Você participa do jogo e seu objetivo é ganhar o carro (mesmo não tendo nada contra bodes). Inicialmente, ele pede a você para escolher uma porta. Em seguida, o apresentador (que sabe onde o carro e os bodes estão) abre uma porta diferente da que você escolheu e (propositalmente) mostra que há um bode. Restaram, portanto, duas portas fechadas. Então o apresentador pergunta se você quer continuar com a porta escolhida inicialmente ou prefere trocar de porta. Qual a probabilidade de ganhar o carro em cada caso?

Figura 1.1: O problema de Monty Hall.

Fonte: Clube de matemática da OBMEP, 2025.

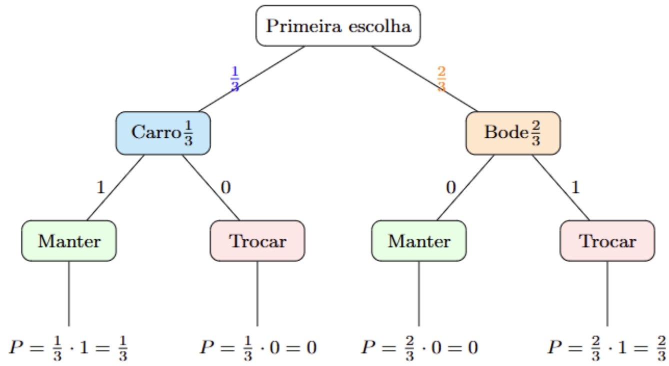
Solução. À primeira vista, pode parecer que restam duas portas e, por isso, a probabilidade de estar com a porta correta é $\frac{1}{2}$; sendo assim, trocando ou não de porta o participante teria a mesma chance de ganhar.

Figura 1.2: Escolha do apresentador.



Fonte: Wikipédia, 2025.

É importante observar que, nesse problema, a escolha do apresentador não é aleatória. Ele abre uma porta onde sabe que o carro não está. Agora, vamos analisar as duas estratégias. Estratégia em que você fica com a porta que escolheu inicialmente: a única forma de ganhar o carro é se ele estava atrás de sua porta desde o início do jogo. Como no início havia três portas e apenas uma delas com um carro atrás, essa probabilidade é igual a $\frac{1}{3}$. Veja que, independentemente de qual porta você escolheu, o apresentador sempre poderá abrir uma porta atrás da qual há um bode. Assim, isso não altera sua probabilidade inicial. Estratégia em que você troca de porta: neste caso, a probabilidade é o complementar da estratégia anterior, ou seja, Como manter dá $\frac{1}{3}$ de chance de ganhar, trocar dá $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. De fato, se, no início do jogo, você havia escolhido a porta onde está o carro, então, ao trocar de porta, você perderia o carro, com probabilidade $\frac{1}{3}$. Por outro lado, se no início do jogo você havia escolhido qualquer uma das duas portas com o bode, então, como o apresentador mostra qual a outra porta com o bode, ao trocar de porta você ganhará o carro. E isso acontece com probabilidade $\frac{2}{3}$.



□

Proposição 1.1. *(Regra do Produto). Assumindo que todos os eventos condicionantes*[2] *têm probabilidade positiva, temos que*

$$\boldsymbol{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \boldsymbol{P}(A_1)\ \boldsymbol{P}(A_2 \mid A_1) \times$$
$$\times\ \boldsymbol{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\ \cdots$$
$$\cdots\ \boldsymbol{P}\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

Demonstração. Iremos demonstrar por indução que, para quaisquer eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, temos:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \cdot P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Para $n = 2$, temos:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)$$

que é a definição básica de probabilidade condicional. Suponha que é válida para $n = k$, ou seja,

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdots P(A_k|A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}).$$

Queremos mostrar que vale para $n = k + 1$. Usando a definição de probabilidade condicional, temos:

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_{k+1}) = P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) \cdot P(A_{k+1}|A_1 \cap \cdots \cap A_k).$$

[2] Um evento condicionante é um evento cujo resultado já se conhece ou se assume como certo, e que influencia a probabilidade de outro evento ocorrer.

Substituindo a hipótese de indução:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \cdots \cap A_{k+1}) =& P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdots \\ & P(A_k|A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}) \\ & P(A_{k+1}|A_1 \cap \cdots \cap A_k). \end{aligned}$$

Logo, vale para $k+1$. Por indução matemática, a Regra do Produto vale para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

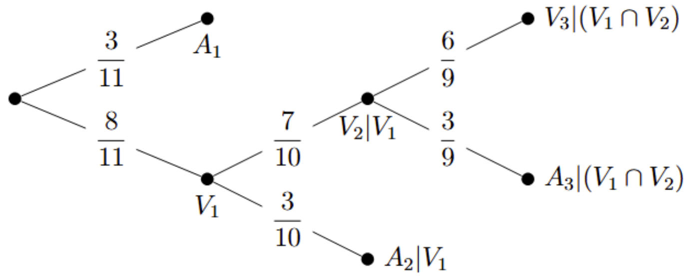
Muitos experimentos têm naturalmente um caráter sequencial, como por exemplo, observar o valor de uma ação em cinco dias. Uma descrição sequencial baseada em árvore é considerada útil para descrever o experimento e o espaço amostral associado. Um diagrama em árvore é formado por nós, caracterizado por pontos que representam eventos, e esses nós são unidos por segmentos de reta, chamados de ramos ou galhos, que indicam a ordem sequencial de ocorrência dos eventos. Podemos visualizar no exemplo a seguir:

Exemplo 1.9. Uma urna contém 3 bolas azuis e 8 bolas verdes. Suponha que são sorteadas três bolas sucessivamente e sem reposição. Qual a probabilidade de que sejam retiradas 3 bolas verdes?

Solução. Considerando os eventos: V_1 = a primeira bola sorteada é verde; V_2= a segunda bola sorteada é verde; V_3= a terceira bola sorteada é verde. Considere também os eventos A_1 = a primeira bola sorteada é azul; A_2 = a segunda bola é azul e A_3 = a terceira bola é azul.

A probabilidade de retirar a primeira bola e ela ser verde é $\frac{8}{11}$. Visto que o evento V_1 ocorreu, temos que a probabilidade da segunda bola ser sorteada e ser verde é $\frac{7}{10}$. Dado que os eventos V_1 e V_2 ocorreram, a probabilidade de V_3 acontecer é $\frac{6}{9}$.

O diagrama em árvore a seguir ilustra as possibilidades.



Portanto,

$$\mathbf{P}(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{56}{165} = 33\%.$$

$\square$

Definição 1.7. (Independência de dois eventos) Dois eventos A e B são considerados independentes se a ocorrência de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, ou seja,

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B). \tag{2}$$

Alternativamente, podemos aplicar a igualdade acima na fórmula da probabilidade condicional (1), para obter:

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A). \tag{3}$$

Definição 1.8. (Independência de vários eventos) Se $\{A_i, i = 1, 2, ..., n\}$ é uma sequência de eventos independentes, então

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} \mathbf{P}(A_i),$$

em que S é uma coleção discreta de índices, com i pertencente a S.

Exemplo 1.10. [5] A independência de pares não implica independência de vários eventos. Considere entre todos os eventos, dois lançamentos de moedas independentes e os seguintes eventos:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\textit{o primeiro lançamento é cara}\}, \\ H_2 &= \{\textit{o segundo lançamento é cara}\}, \\ D &= \{\textit{os dois lançamentos têm} \\ & \quad \textit{resultados diferentes}\}. \end{aligned}$$

Solução. Pela definição de independência de dois eventos, temos que os eventos H_1 e H_2 são independentes. Para ver que H_1 e D são independentes, nós temos que:

$$\mathbf{P}(D|H_1) = \frac{\mathbf{P}(H_1 \cap D)}{\mathbf{P}(H_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = \mathbf{P}(D).$$

Da mesma forma, H_2 e D são independentes. Por outro lado, temos:

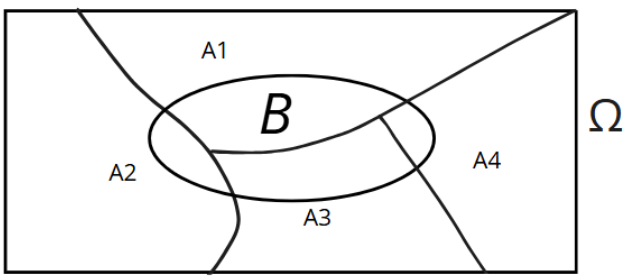
$$\mathbf{P}(H_1 \cap H_2 \cap D) = 0 \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{P}(H_1) \cdot \mathbf{P}(H_2) \cdot \mathbf{P}(D),$$

e esses três eventos não são independentes. $\square$

Teorema 1.2. *(Teorema da Probabilidade Total) Sejam A_1, ..., A_n eventos disjuntos que formam uma partição*[3] *do espaço amostral (cada resultado possível está incluído em um e apenas um dos eventos $A_1, ..., A_n$) e considere que $\boldsymbol{P}(A_i) > 0, \forall\ i = 1, ..., n$. Então, para qualquer evento B, temos*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(B) &= \boldsymbol{P}(A_1 \cap B) + \cdots + \boldsymbol{P}(A_n \cap B) \\ &= \boldsymbol{P}(A_1) \cdot \boldsymbol{P}(B|A_1) + \cdots + \boldsymbol{P}(A_n) \cdot \boldsymbol{P}(B|A_n). \end{aligned} \tag{4}$$

Figura 1.3: Representação gráfica do Teorema da Probabilidade Total



Fonte: Autoria Própria, 2025.

Demonstração. Pela definição de probabilidade condicional:

$$P(B \mid A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \Rightarrow$$
$$P(B \cap A_i) = P(B \mid A_i)P(A_i).$$

Como $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam uma partição de Ω, então os eventos $B \cap A_i$ também são mutuamente exclusivos e:

$$\bigcup_{i=1}^{n}(B \cap A_i) = B.$$

Pelo terceiro axioma de Kolmogorov (adição para eventos disjuntos):

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i).$$

Substituindo a expressão do passo 1:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i).$$

$\square$

Exemplo 1.11. [8] Em um torneio de xadrez a probabilidade de ganhar um jogo é 0,3 contra metade dos jogadores (chamaremos de tipo 1); 0,4 contra um quarto dos jogadores (chamaremos de tipo 2); e 0,5 contra o quarto restante dos jogadores (chamaremos de tipo 3). Considere que um oponente seja escolhido aleatoriamente. Qual é a probabilidade de ganhar desse adversário?

Solução. Seja A_i o evento de jogar com o oponente do tipo i. Temos que:

$$\mathbf{P}(A_1) = 0{,}5$$
$$\mathbf{P}(A_2) = 0{,}25$$
$$\mathbf{P}(A_3) = 0{,}25.$$

Seja B o evento para ganhar. Temos:

$$\mathbf{P}(B|A_1) = 0{,}3$$
$$\mathbf{P}(B|A_2) = 0{,}4$$
$$\mathbf{P}(B|A_3) = 0{,}5.$$

[3] Uma partição consiste na divisão do espaço amostral em eventos cuja interseção é vazia, isto é, eventos mutuamente exclusivos e em que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Utilizando o Teorema da Probabilidade Total (4), temos que a probabilidade de ganhar é:

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(B|A_1) + \mathbf{P}(A_2) \cdot \mathbf{P}(B|A_2) + \mathbf{P}(A_3) \cdot \mathbf{P}(B|A_3) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}25 \cdot 0{,}4 + 0{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}375.$$

□

Teorema 1.3. *(Teorema de Bayes) Sejam $A_1, ..., A_n$ eventos disjuntos que formam uma partição do espaço amostral, e suponha que $\boldsymbol{P}(A_i) > 0$, para todo i. Então, para qualquer evento B tal que $\boldsymbol{P}(B) > 0$, temos:*

$$\boldsymbol{P}(A_i|B) = \frac{\boldsymbol{P}(A_i)\ \boldsymbol{P}(B|A_i)}{\boldsymbol{P}(B)} = \frac{\boldsymbol{P}(A_i)\ \boldsymbol{P}(B|A_i)}{\boldsymbol{P}(A_1)\boldsymbol{P}(B|A_1) + ... + \boldsymbol{P}(A_n)\boldsymbol{P}(B|A_n)}.$$

Demonstração: Ver [6].

Exemplo 1.12. Considere novamente o Exemplo 11.

Solução. Usando o Teorema de Bayes (1.3), temos:

$$\mathbf{P}(A_1 \mid B) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}3}{0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}25 \cdot 0{,}4 + 0{,}25 \cdot 0{,}5} = 0{,}4.$$

□

Problemas Olímpicos

Os problemas apresentados a seguir foram retirados do acervo de provas anteriores da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), que podem ser consultadas em [11].

Problema 1.1. (OBMEP - 2019) Em uma caixa há cinco bolas idênticas, com as letras $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{P}$. Em uma segunda caixa há três bolas idênticas, com as letras $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{M}$. Uma bola é sorteada da primeira caixa e, a seguir, outra bola é sorteada da segunda caixa. Qual é a probabilidade de que essas bolas tenham a mesma letra?

Solução. Temos 5 possíveis escolhas de bolas na primeira caixa e 3 possíveis escolhas na segunda. Com isso, a quantidade total de possíveis retiradas de bolas das caixas é de $5 \cdot 3 = 15$. Note que, como a segunda caixa só possui bolas $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{M}$, na primeira caixa precisamos tirar uma bola com uma dessas letras e, portanto, temos 3 possibilidades favoráveis para a retirada da bola da primeira caixa. Assim, a bola que devemos retirar da segunda caixa já fica determinada, já que deve ser a bola de mesma letra da que já retiramos. Logo, a quantidade de casos favoráveis é de $3 \cdot 1 = 3$. Portanto, a probabilidade pedida é de $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$. □

Problema 1.2. (OBMEP - 2009) Luciana tem três canetas pretas e três vermelhas. Ontem ela pegou, ao acaso, uma dessas canetas e colocou-a na bolsa. Hoje ela colocou uma caneta preta na bolsa. Se ela retirar uma dessas duas canetas da bolsa, sem olhar, qual a probabilidade de essa caneta ser preta?

Solução. Vamos denotar por P e V canetas pretas e vermelhas, respectivamente. Como o número de P e V que Juliana tem são iguais, as probabilidades de ela escolher uma P ou uma V ao acaso são ambas iguais a $\frac{1}{2}$. A probabilidade dela pegar uma caneta preta no primeiro dia é de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, visto que há 3 canetas pretas em meio a 6 canetas totais e, dado que isso ocorre, então as duas canetas que estarão na bolsa no segundo dia serão pretas (P, P), onde a probabilidade de retirar uma caneta preta é igual a 1. Já se Luciana retira uma caneta vermelha no primeiro dia (Com probabilidade também $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ disso ocorrer), então no segundo dia ela terá (P, V), onde a probabilidade de ela retirar uma caneta preta será $\frac{1}{2}$, já que estarão lá uma caneta vermelha e uma preta. Como os eventos (P, P) e (P, V) são disjuntos (ou ocorreu o caso 1, ou o caso 2), usamos a regra da probabilidade total:

$$\text{Probabilidade total} = P(\text{caso } 1) \cdot P(\text{preta} \mid \text{caso } 1) + P(\text{caso } 2) \cdot P(\text{preta} \mid \text{caso } 2)$$

Temos que a probabilidade de Juliana tirar uma caneta preta da bolsa é: $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. □

Problema 1.3. (OBMEP - 2011) Três amigas possuem, cada uma, três blusas: uma amarela, uma branca e uma preta. Se cada amiga escolher ao acaso uma de suas blusas, qual é a probabilidade de que as cores das blusas escolhidas sejam todas diferentes?

Solução. A primeira amiga possui 3 possibilidades de escolher a cor de sua blusa. Após isso, a segunda delas só pode escolher uma das duas cores restantes e a terceira deve ficar com a última cor. Sendo assim, há $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ casos favoráveis, enquanto que nos casos totais, cada uma três possibilidades de escolha, resultando em $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ casos totais. Portanto, a probabilidade pedida é de $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$. □

Problema 1.4. (OBMEP - 2015) Para a primeira fase de um torneio internacional de futebol foram classificadas 3 equipes espanholas, 2 francesas, 1 alemã, 1 portuguesa e 1 italiana. Nessa fase, serão realizadas quatro partidas, com os confrontos definidos por sorteio. Em seguida, duas semifinais serã realizadas com as quatro equipes vencedoras da primeira fase, também com os confrontos definidos por sorteio. As duas equipes vencedoras jogarão a partida final.

a) Qual é a probabilidade de que, na primeira fase, as duas equipes francesas se enfrentem?

b) Qual é a probabilidade de ocorrer, na primeira fase, um confronto entre duas equipes espanholas?

c) Admitindo que em cada confronto do torneio as equipes têm, todas, iguais probabilidades de ganhar, qual é a probabilidade de que a final seja realizada entre duas equipes de um mesmo país?

Solução.

a) Fixada uma equipe, todas as demais 7 equipes têm a mesma probabilidade, igual a $\frac{1}{7}$, de ser sua adversária na próxima fase. Logo, a probabilidade de que uma equipe francesa enfrente a outra na primeira fase é $\frac{1}{7}$.

b) Há três confrontos possíveis entre equipes espanholas. A probabilidade de cada confronto na primeira fase é $\frac{1}{7}$. Como esses confrontos são mutuamente excludentes (isto é, no máximo um dos confrontos pode ocorrer), a probabilidade de que duas equipes espanholas se enfrentem na primeira fase é $\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$.

c) Como todas as equipes possuem a mesma probabilidade de chegar à fase final, basta que analisemos quantos são os possíveis confrontos de duas equipes de mesma nacionalidade. Para isso, como existem três equipes espanholas, existem 3 casos em que duas equipes espanholas se enfrentam, e como existem 2 equipes francesas, há 1 caso em que duas equipes francesas se enfrentam. Sendo assim, existem no total $3 + 1 = 4$ casos em que duas equipes de mesma nacionalidade se enfrentam, enquanto há 28 maneiras de escolher 2 equipes entre 8, sem considerar a ordem, ou seja, o número de possíveis confrontos entre duplas de equipes.

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 1 \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = \frac{56}{2} = 28.$$

Assim, a probabilidade é de $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$. □

Problema 1.5. (OBMEP - 2018) Tomás tem duas caixas, cada uma com cinco bolas numeradas de 1 a 5. As dez bolas são idênticas, exceto pelo seu número. Ele sorteia uma bola da primeira caixa e a colcoca na segunda. Em seguida, ele sorteia duas bolas da segunda caixa. Qual é a probabilidade de que a soma dos números das duas bolas sorteadas da segunda caixa seja igual a 6?

Solução. Perceba que com números inteiros de 1 a 5, podemos ter uma soma 6 com dois números apenas nos casos $1+5$, $2+4$ e $3+3$, a menos da ordem das parcelas. Assim, para que Tomás retire duas bolas com soma 6, é necessário que o par de bolas retiradas por ele seja um dos três pares citados. Agora, veja que independente de qual a bola que ele retire da primeira caixa para colocar na segunda, a quantidade de pares favoráveis de bolas

ISSN 2526-8651

que ele poderá retirar da segunda caixa será 3, como mostrado:

Se Tomás retira uma bola de número 1, 2, 4 ou 5 da primeira caixa, então na segunda caixa ele terá os 3 pares favoráveis sendo (1,4) e (2,5), com repetição de um deles pois uma das 4 bolas estará repetida.

Se Tomás retira a bola de número 3 da primeira caixa, então na segunda os pares favoráveis que ele poderá retirar serão exatamente (1,4), (2,5) e (3,3), visto que haverão duas bolas com o número 3.

Assim, sabendo que na segunda caixa ficarão 6 bolas e que, portanto, a quantidade total possível de pares de bolas que Tomás pode retirar dela é de $\binom{6}{2} = 15$, concluímos que a probabilidade pedida é $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$, uma vez que sempre há 3 pares favoráveis em meio a 15 pares possíveis.

□

Problema 1.6. (OBMEP - 2010) Carolina tem três cartões brancos numerados de 1 a 3 e três cartões pretos, também numerados de 1 a 3. Ela escolheu, ao acaso, um cartão branco e um preto. Qual é a probabilidade de a soma dos números dos cartões escolhidos ser par?

Solução. Perceba que há dois casos favoráveis: (1) Os números de ambos os cartões preto e branco sorteados são pares ou (2) Os números em ambos os cartões são ímpares. Como de 1 a 3 há dois números ímpares e apenas um par, a probabilidade de que saia um número ímpar em alguma cor de cartão é $\frac{2}{3}$ e a probabilidade de sair um par é $\frac{1}{3}$. Portanto, o caso (1) possui probabilidade $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ de ocorrer e o caso (2) tem probabilidade $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, concluindo então que a probabilidade total pedida é de $\frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

□

Problema 1.7. (OBMEP - 2008) Em um jogo, Pedro lança uma moeda para decidir quantas casas avançar. Quando sai cara, ele avança uma casa; quando sai coroa, ele avança duas casas. O jogo acaba quando Pedro alcança ou ultrapassa a última casa. Faltam três casas para Pedro terminar o jogo. Qual é a probabilidade de que ele tire coroa em sua última jogada?

Solução. Defina $\boldsymbol{c}$ como sendo “cara” e $\boldsymbol{k}$ “coroa”. Pedro pode terminar o jogo de cinco maneiras diferentes: $c \to k$, $c \to c \to k$, $k \to k$, $c \to c \to c$, $k \to c$. Veja que analisamos os casos em que Pedro tira inicialmente cara e quando tira inicialmente coroa e daí vimos quais as possíveis continuações do sorteio de moedas. Então, vemos que Pedro pode tirar coroa na última moeda nas sequências $c \to k$, $c \to c \to k$, $k \to k$. Como cada um dentre $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{k}$ tem probabilidade $\frac{1}{2}$ de ser obtida, o que nos leva à conclusão de que a primeira e a terceira sequências citadas possuem probabilidade $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ de ocorrer, cada uma, e a segunda sequência possui probabilidade $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Portanto, a probabilidade de que o enunciado se cumpra é de $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$. □

Problema 1.8. (OBMEP - 2012) Em uma caixa há 9 bolas amarelas numeradas de 1 a 9 e, em uma segunda caixa, há 9 bolas brancas, também numeradas de 1 a 9. Todas as bolas são idênticas, exceto por sua cor e seu número. Uma bola amarela é sorteada e colocada na segunda caixa; a seguir, uma bola é sorteada da segunda caixa.

a) Qual é a probabilidade de que a bola sorteada da segunda caixa seja amarela?

b) Qual é a probabilidade de que as duas bolas sorteadas tenham o mesmo número?

c) Qual é a probabilidade de que a bola sorteada da segunda caixa tenha o número 1?

Solução.

a) Como inicialmente havia nove bolas na segunda caixa, após a adição da bola amarela haverá um total de dez bolas, sendo que somente uma delas é amarela. Portanto, a probabilidade de se retirar uma bola amarela da segunda caixa é de $\frac{1}{10}$.

b) Para que isso aconteça, veja que, como há bolas com os mesmos números nas duas caixas, ao colocarmos uma bola amarela na caixa de bolas brancas haverá duas bolas de mesmo número na caixa, em meio a dez bolas totais. Sendo assim, a probabilidade pedida é de $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

c) Caso a bola sorteada na primeira caixa possua o número 1 $\left(\text{probabilidade } \frac{1}{9}\right.$ disso ocorrer, visto que há somente uma bola de número 1 em meio a 9 bolas totais), então haverá duas bolas de número 1 na segunda caixa, com dez bolas totais, tendo então que a probabilidade de sair uma bola 1 da segunda caixa, após ter saído uma bola 1 da primeira é de $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Portanto, a probabilidade de sair uma bola 1 da segunda caixa, dado que saiu bola 1 na primeira, é de $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{45}$. Agora, se a bola retirada da primeira caixa não foi 1 $\left(\text{probabilidade } \frac{8}{9}\right)$, então a probabilidade de sair 1 na segunda caixa é de $\frac{1}{10}$. Logo, a probabilidade de sair bola 1, dado que não saiu 1 da primeira caixa é $\frac{8}{9} \cdot \frac{1}{10} = \frac{8}{90}$. Concluímos então que a probabilidade total de sair bola 1 da segunda caixa é de $\frac{1}{45} + \frac{8}{90} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$. $\square$

Problemas Propostos

Nesta seção, propomos alguns problemas ao leitor. Outros problemas igualmente interessantes podem ser encontrados em [11].

Problema 1.9. (OBMEP - 2009) Quatro times, entre os quais o Quixajuba, disputam um torneio de vôlei em que:

- cada time joga contra cada um dos outros uma única vez;
- qualquer partida termina com a vitória de um dos times;
- em qualquer partida os times têm a mesma probabilidade de ganhar;
- ao final do torneio, os times são classificados em ordem pelo número de vitórias.

a) É possível que, ao final do torneio, todos os times tenham o mesmo número de vitórias? Por quê?

b) Qual é a probabilidade de que as duas bolas sorteadas tenham o mesmo número?

c) Qual é a probabilidade de que o torneio termine com três times empatados em primeiro lugar?

Problema 1.10. (OBMEP - 2010) André, Bianca, Carlos e Dalva querem sortear um livro entre eles. Para isso, colocaram três bolas brancas e uma preta em uma caixa e combinaram que, em ordem alfabética de seus nomes, cada um tiraria uma bola, sem devolvê-la à caixa. Aquele que tirasse a bola preta ganharia o livro.

a) Qual é a probabilidade de André ganhar o livro?

b) Qual é a probabilidade de Dalva ganhar o livro?

Para sortear outro livro, André sugeriu usar duas bolas pretas e seis brancas. Como antes, o primeiro que tirasse uma bola preta ganharia o livro; se as primeiras quatro bolas fossem brancas, eles continuariam a retirar bolas, na mesma ordem. Nesse novo sorteio:

c) Qual é a probabilidade de André ganhar o livro?

d) Qual é a probabilidade de Dalva ganhar o livro?

Problema 1.11. (OBMEP - 2017) Uma caixa contém nove bolas idênticas numeradas de 1 a 9. Uma primeira bola é sorteada, seu número é anotado e a bola é devolvida à caixa. Repete-se esse procedimento mais duas vezes, anotando-se também os números da segunda e terceira bolas sorteadas. Qual é a probabilidade de que a soma dos números nas duas primeiras bolas sorteadas não seja um múltiplo de 3 e a soma dos números nas três bolas sorteadas seja um múltiplo de 3?

Problema 1.12. (OBMEP - 2012) Pedro vai participar de um programa de prêmios em que há uma urna contendo quatro bolas com valores diferentes e desconhecidos por ele, que serão sorteadas uma a uma até que ele decida ficar com uma delas. Ele observa o valor das duas primeiras bolas sorteadas e as descarta. Se o valor da terceira bola sorteada for maior que os das duas primeiras, ele ficará com ela e, caso contrário, ficará com a bola que restou. Qual é a probabilidade de Pedro ficar com a bola de maior valor?

Referências

[1] ARAUJO, Roberta Elaine de. & BARROS, Kléber Napoleão Nunes de Oliveira. A Técnica de Simulação de Monte Carlo Aplicada ao Cálculo de Áreas no Ensino Médio. 2025. 37 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2025.

[2] BARRY, James R. Probabilidade: um curso em nível intermediário. 2ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[3] BUSSAB, Wilton de Oliveira; MORETTIN, Pedro Alberto. Estatística Básica. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

[4] Clubes de Matemática da OBMEP. Disponível em: https://clubes.obmep.org.br/blog/probabilidades-o-problema-de-monty-hal/. Acesso em: 15/04/25.

[5] Clubes de Matemática da OBMEP. Disponível em: https://clubes.obmep.org.br/blog/problemao-meninos/. Acesso em: 01/06/25.

[6] IMPA. OBMEP. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas.htm. Acesso em 04/04/2025.

[7] MAGALHÃES, Marcos Nascimento. Probabilidade e variáveis aleatórias. São Paulo: Edusp, 2006.

[8] MORETTIN, Luiz Gonzaga. Estatística básica: probabilidade e inferência. 1. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

[9] MORGADO, Augusto Cezar de Oliveira; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. Análise Combinatória e Probabilidade. 11ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2020. 292 p. ISBN 978-65-990395-3-9.

[10] OBMEP Apostilas Métodos de Contagem e Probabilidade. Disponível em: http://www.obmep.org.br/apostilas.htm. Acesso em: 12/04/25.

[11] OBMEP Provas e Soluções. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas.htm. Acesso em: 12/04/25.

[12] PORTAL DA MATEMÁTICA OBMEP, Módulo Tópicos Adicionais - Introdução à Probabilidade, Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=46. Acesso em 04/04/2025.

[13] PORTAL DA MATEMÁTICA OBMEP, Módulo Tópicos Adicionais - Probabilidade Condicional, Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=47. Acesso em 04/04/2025.

[14] SOUZA, Laura Celeste Melo de. & BARROS, Kléber Napoleão Nunes de Oliveira. Generalização do Problema Probabilístico de Travesseiro de Lewis Carroll. 2023. 51 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2023.

[15] TRIOLA, Mario F. Introdução à Estatística. 14. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2024. 768 p. ISBN 978-85-216-3877-3.

2. Curiosidade

Mathigon: A Matemática em Ferramentas Interativas

Mariana Ferreira da Silva[4]

A aprendizagem da Matemática, por vezes, é tida como um desafio por parte dos estudantes. Isso decorre, principalmente, da dificuldade em compreender conceitos e operações matemáticas no ensino básico. As capacidades de abstração e de apresentar soluções a problemas lógico-matemáticos propostos nem sempre são simples de construir e, por isso, a

[4]Graduanda em Licenciatura em Matemática na UFRPE e monitora voluntária do Jornal É Matemática, Oxente!

tarefa pedagógica deve abranger metodologias que sejam eficientes neste sentido.

A partir deste contexto, apresentamos o Mathigon, uma plataforma online e interativa para o ensino dinâmico da Matemática, que foi criado em 2016 pelo engenheiro e matemático Philipp Legner, em uma iniciativa pessoal durante seu tempo como voluntário em um programa de divulgação matemática em Cambridge. A motivação por trás do projeto desenvolvido é tornar a matemática mais envolvente e acessível.

A plataforma é gratuita e concentra-se na linguagem atual de storytelling[5], na intuição visual e na resolução de problemas com prática ativa. No lugar de vídeos tradicionais ou textos estáticos, o Mathigon oferece conteúdo dinâmico, no qual os alunos interagem diretamente com os conceitos. Os principais recursos oferecidos pela plataforma são: o Polypad, um espaço virtual que oferece peças como números, frações, blocos de álgebra, formas e sólidos geométricos, gráficos e planos cartesianos, entre outros; os Cursos Interativos, que funcionam como livros didáticos e abordam temas como Álgebra, Geometria, Probabilidade, Teoria dos Grafos, Fractais, Criptografia, e outros; os Desafios Diários e Quebra-Cabeças, que promovem o pensamento matemático com problemas desafiadores e curtos; e as Ferramentas para Professores, no qual professores podem criar e compartilhar atividades personalizadas com o Polypad, além de atribuir tarefas e coletar trabalhos dos alunos (inclusive com integração ao Google Classroom).

A plataforma é baseada na filosofia construtivista da aprendizagem, em que os alunos constroem ativamente o conhecimento, designado a partir da ênfase na descoberta e exploração, em vez de memorização. Ademais, as ferramentas disponibilizadas em diversos idiomas são acessíveis, gratuitas, não precisam de downloads e podem ser aliadas no desafio do ensino da Matemática no contexto atual. Vale a pena conferir!

Referências

[1] https://mathigon.org. Acesso em 26/05/2025.

[2] https://mathigon.org/about. Acesso em 26/05/2025.

[3] https://aperiodical.com/2019/05/mathigon/. Acesso em 26/05/2025.

3. Indicação de Leitura

Birth of a Theorem - A Mathematical Adventure

Marcelo Pedro dos Santos[6]

O livro **Birth of a Theorem: A Mathematical Adventure** (do original em francês *Théorème vivant*) é um livro escrito pelo matemático francês Cédric Villani(1973-). Uma versão em português, **Teorema Vivo**, foi publicada pela Editora da Sociedade Brasileira de Matemática em 2019.

Cédric Villani figura entre os matemáticos mais prestigiados da atualidade. Em 2010, ele ganhou a medalha Fields, que é o principal prêmio da matemática. Inclusive, sua genealogia acadêmico-matemática mostra o destaque dos trabalhos com os quais ele se envolve, pois tanto seu orientador, Pierre-Louis Lions, quanto seu aluno, Alessio Figalli, também foram laureados com a Fields (em 1994 e 2018, respectivamente).

O livro conta sua vida durante o estágio em que ele chega em um de seus mais importantes resultados sobre o tema *Landau Damping* (um fenômeno físico relacionado ao amortecimento de ondas) junto com seu aluno Clément Mouhot. O livro, inclusive, reproduz trechos de e-mails trocados por ele e Mouhot durante o desenvolvimento do trabalho.

[5]É uma técnica de comunicação que utiliza narrativas para transmitir informações, mensagens ou ideias de forma envolvente e memorável.

[6]Docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco

Ao invés de fazer incursões profundas na parte técnica, o livro traz o aspecto humano que permeia a vida do cientista e como isso afeta/incentiva/envolve o trabalho. Certamente um contraponto à visão tecnicicista que se tem do matemático.

O livro conta partes da vida em que Villani passa por instituições de renome. Com destaque para sua passagem pelo Instituto de Altos Estudos em Princeton. O próprio Villani fala: “Medalhistas Fields são nada fora do normal em Princeton - você às vezes se encontra sentado perto de três ou quatro deles no almoço.”

A obra detalha experiências pessoais, como a dificuldade de voltar de carona de um concerto, o gosto por música, a vida em uma terra estrangeira na qual se tem que habituar-se a uma nova culinária.

Entre os destaques da obra estão os encontros de Villani com outros matemáticos de renome, em que se veem diálogos com vários matemáticos de elite. A versão em inglês do livro até mesmo traz uma caricatura de cada um desses matemáticos. O livro também mostra como Villani tem um alto apreço por seus heróis matemáticos. Por exemplo, seu encontro por acaso com Nash em Princeton e sua timidez em falar com seu ídolo.

Ainda para mencionar duas curiosidades sobre Villani que não aparecem na obra, ele é politicamente ativo, tendo se tornado deputado em 2017 na França e por seu estilo de vestimenta bem peculiar (sempre com enorme broche de aranha) ele ganhou o apelido de Lady Gaga da Matemática.

Para complementar a leitura, há uma palestra de Villani com o mesmo nome do livro disponível no YouTube. A narrativa da obra, aliás, culmina com os eventos de sua própria nomeação à Medalha Fields, fechando um ciclo notável em sua carreira.

Referências

[1] VILLANI, Cedric. Birth of a Theorem: A Mathematical Adventure. New York: Farrar, Straus and Giroux 2012.

[2] VILLANI, Cédric. Teorema Vivo. SBM. 2019.

[3] Birth of a Theorem - with Cédric Villani. Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=yYwydG_aHPE. Acesso em 02 de Junho de 2025.

4. Quem pergunta, quer saber!

Qual foi o primeiro livro de Matemática?

Severino Barros de Melo[7]

Nessa edição voltamos a apresentar perguntas feitas pelos visitantes do Mathematikum, um museu interativo de Matemática na cidade de Giessen (Alemanha), bem como as respostas elaboradas pelo matemático Albrecht Beutelspacher, na ocasião diretor do museu. Para os leitores interessados em outras perguntas, sugerimos consultar edições anteriores do nosso jornal.

Pergunta: Qual foi o primeiro livro de Matemática?

Resposta:

Cerca de 300 anos antes de Cristo, um homem escreveu um livro que está entre as obras mais influentes da história. Certamente não causou nenhuma revolução política, social ou religiosa, como a Bíblia, o Alcorão ou o Capital, porém alcançou uma repercussão quase inconcebível no desenvolvimento da ciência. Sem essa obra a história da matemática teria feito um percurso completamente diferente. É, sem dúvida, o livro de matemática mais importante (e certamente também o mais exitoso) de todos os tempos. Esse homem se chamava Euclides e o livro que escreveu se intitula *Os Elementos*.

Sobre a pessoa de Euclides não sabemos quase nada. Acredita-se que desenvolveu suas atividades entre os anos 320 e 260 a.C. em Alexandria, que naquela época era o centro científico do mundo, e é considerado o fundador da escola matemática de Alexandria. Escreveu muitos livros, dentre os quais seis foram dedicados à Matemática.

[7]Docente do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco

A obra mais conhecida de Euclides é sem dúvida *Os Elementos*, que é composto por treze livros. Os livros de I a IV tratam de geometria plana; o livro V sobre o tema proporções; o livro VI descreve as semelhanças das figuras geométricas; os livros VII a IX a teoria dos números; o livro X as diferentes linhas retas e os livros XI a XIII abordam a geometria espacial.

Quando se abre o livro, somos impactados pela sua austeridade. Não começa com um prólogo programático, nem com uma alusão a seus antecessores, nem com agradecimentos. Não começa dessa maneira, começa com definições, axiomas e postulados numas poucas páginas, e em seguida proposições, exercícios e construções.

Acredita-se que nos *Elementos* não há nenhuma proposição demonstrada pela primeira vez por Euclides. Sua intenção não era essa. O objetivo dos *Elementos* era reunir de forma sistemática todo conhecimento matemático da época. Um mero resumo já representaria um êxito admirável e que garantiria a Euclides a imortalidade.

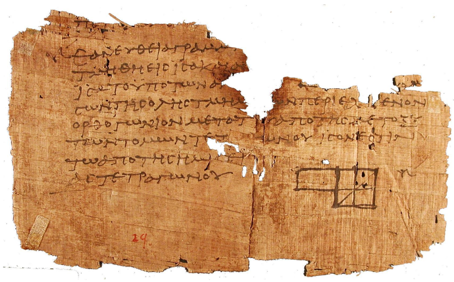
Porém esta obra não é uma enciclopédia, nem uma compilação de dados onde tudo aparece junto às demais partes com a mesma relevância. O mérito de Euclides reside no fato de dar forma a tudo isso. Uma forma matemática. Isso significa que uma coisa decorre de outra, e ainda mais, deve decorrer da outra. Segue uma estrutura lógica, de modo que todas as proposições são demonstradas, e para demonstrá-las somente são admitidas conclusões lógicas que utilizem proposições que já tenham sido demonstradas. Ou seja, para a proposição número 29 só podem ser usadas na demonstração as proposições 1 a 28. Evidentemente isto não pode ser feito *ad infinitum*, temos que partir de certas afirmações: são os postulados que hoje denominamos axiomas. Um típico postulado seria: dois pontos quaisquer determinam uma linha reta. Desse modo a regra consiste no fato de na demonstração da proposição 29 somente deve se usar as proposições 1 a 28 e os postulados.

Os *Elementos* é uma obra que foi um marco quanto ao estilo e ilustra de maneira exemplar a construção de uma ciência. Uma obra informativa e normativa!

Euclides conseguiu criar um padrão que *de fato* caracterizou e definiu as matemáticas ao longo de 2300 anos, e continuará a fazê-lo enquanto a matemática existir.

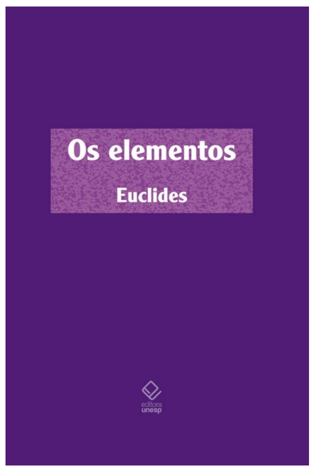
Nota da Redação: como ilustração seguem duas fotos relativas aos Elementos com materiais de "edições" anteriores.

Figura 4.1: Fragmento em papiro da obra *Os Elementos*



Fonte: World History Encyclopedia, 2013.[8]

Figura 4.2: Edição da obra *Os Elementos* publicada recentemente no Brasil



Fonte: Editora UNESP, 2009.[9]

[8]Disponível em: <https://www.worldhistory.org/image/1280/fragment-of-euclids-elements/>. Acesso em 14 de maio, 2025.

[9]Disponível em: <https://editoraunesp.com.br/catalogo/9788571399358,os-elementos>. Acesso em 14 de maio, 2025.

5. Eventos

Fiquem Ligados!!!

- **X CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**
  - Local: Universidad de Guadalajara - México
  - Data: 07 a 12 de Julho de 2025
  - Mais informações: https://www.cibem2025.com/
- **III Semana de Matemática do IFRN São Paulo do Potengi**
  - Local: Instituto Federal Rio Grande do Norte (IFRN) - São Paulo do Potengi
  - Data: 15 a 17 de Julho de 2025
  - Mais informações: https://www.even3.com.br/iii-semana-de-matematica-do-ifrn-sao-paulo-do-potengi-547643?even3_orig=online_category
- **XV Encontro Nacional de Educação Matemática**
  - Local: Universidade Federal do Amazonas - Manaus - Amazonas
  - Data: 28 de Julho a 01 de Agosto de 2025
  - Mais informações: https://www.even3.com.br/enem2025?even3_orig=online_category/
- **XXI Encontro Baiano de Educação Matemática**
  - Local: Universidade Federal do Oeste da Bahia - Bahia
  - Data: 13 a 16 de agosto de 2025
  - Mais informações: https://www.even3.com.br/xxi-ebem?even3_orig=category_highlight
- **III Workshop Online do Profmat**
  - Formato: Virtual
  - Data: 29 a 31 de agosto de 2025
  - Mais informações: https://sites.google.com/view/iii-workshop-do-profmat/home?authuser=0
- **VII Seminário de Escritas e Leituras em Educação Matemática**
  - Local: Universidade Federal de Minas Gerais - Belo Horizonte - Minas Gerais
  - Data: 04 a 06 de setembro de 2025
  - Mais informações: https://www.even3.com.br/vii-seminario-de-escritas-e-leituras-em-educacao-matematica-513425?even3_orig=online_category
- **Brazil-Mexico Joint Mathematical Meeting**
  - Local: Universidade Federal do Ceará - Fortaleza - Ceará
  - Data: 08 a 12 de Setembro de 2025
  - Mais informações: https://sbm.org.br/jointmeeting-mexico/
- **3º Encontro Mentalidades Matemáticas**
  - Local: Colégio Pedro II & Escola Eleva - Rio de Janeiro
  - Data: 19 a 21 de Setembro de 2025
  - Mais informações: https://www.even3.com.br/3-encontro-mentalidades-matematicas?even3_orig=online_category
- **8º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática**
  - Local: Universidade de Brasília (UnB) - Brasília - Distrito Federal
  - Data: 25 a 28 de Setembro de 2025
  - Mais informações: https://anpmat.org.br/simposio-nacional-8/

6. Soluções de Olimpíadas

OPEMAT 2023 - Nível 3

Nesta edição apresentaremos a resolução das questões discursivas e de verdadeiro ou falso da prova da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2023 referentes ao nível 3.

Problema 6.1. Sete dos amigos do π-raia, $N_1, N_2, \ldots, N_7$ decidem participar de um torneio local de futebol. O torneio é composto de 3 partidas de 90 minutos cada. Suponha que, em qualquer momento da partida, um e apenas um dos amigos do π-raia pode entrar em campo, e que o tempo total (que é medido em minutos) em campo para cada um dos amigos N_1, N_2, N_3 e N_4 é divisível por 7 e o tempo total para cada um dos amigos N_5, N_6 e N_7 é divisível por 13. Se não houver restrição sobre o número de substituições que podem ser realizadas durante cada partida, de quantos modos podemos distribuir o tempo total da partida entre os amigos do π-raia, de modo que cada amigo jogue pelo menos um minuto?

Solução. Seja x_i $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ é o tempo em minutos do i-ésimo amigo do π-raia em campo. Então, o problema se resume a encontrar as soluções inteiras positivas de

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 270 \tag{5}$$

satisfazendo $7|x_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ e $13|x_j$ $(j = 5, 6, 7)$. Suponha que $x_1+x_2+x_3+x_4 = 7m$ e $x_5+x_6+x_7 = 13n$. Resulta que

$$7m + 13n = 270,$$

com $m, n \in \mathbb{N}_+$, $m \geq 4$ e $n \geq 3$. As soluções (m, n) da equação linear diofantina acima que atendem as condições acima são $(33, 3)$, $(20, 10)$ e $(7, 17)$.

Quando $(m, n) = (33, 3)$, temos que $x_5 = x_6 = x_7 = 13$. Pondo $x_i = 7y_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, obtemos

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 33.$$

Note que existe uma correspondência biunívoca entre as soluções inteiras positivas da equação acima e as permutações de um anagrama composto por 3 sinais de '$+$' e 29 sinais de '*'. Portanto, existem $C^3_{32} = 4960$ quádruplas (y_1, y_2, y_3, y_4) que atendem as condições acima e portanto $1 \times 4960 = 4960$ soluções para a equação (5).

Se $(m, n) = (20, 10)$, pondo $x_i = 7y_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ e $x_j = 13y_j$ $(j = 5, 6, 7)$, temos que

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 20 \quad \text{e} \quad y_5 + y_6 + y_7 = 10.$$

De forma análoga ao caso anterior, temos $C^3_{19} \times C^2_9 = 34884$ soluções para (5).

Por fim, o caso em que $(m, n) = (7, 17)$ produz as equações (utilizando a mesma mudança de variável acima)

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7 \quad \text{e} \quad y_5 + y_6 + y_7 = 17.$$

Neste caso, temos $C^3_6 \times C^2_{16} = 2400$ soluções para (5). Consequentemente, para (5) existem

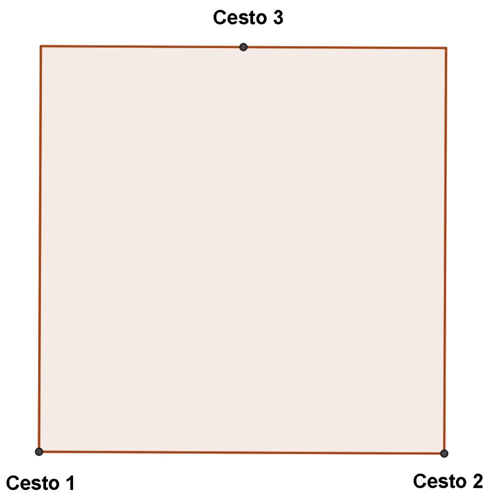
$$4960 + 34884 + 2400 = 42244$$

soluções satisfazendo as condições acima. □

Problema 6.2. Três irmãos, Amanda, Alice e Arthur, estavam brincando juntos em um quarto retangular com $36m^2$ de área e espalharam brinquedos por todo o ambiente. No momento de arrumar a bagunça, a mãe deles posicionou três cestos idênticos da seguinte forma: dois nos cantos adjacentes a um dos lados do quarto e o terceiro no ponto médio do lado oposto, como exemplificado na figura abaixo. Para arrumar a bagunça de uma maneira geometricamente interessante, os irmãos resolveram dividir a área interna do quarto em três regiões (planas) otimizadas, de modo que:

- Cada uma das regiões contém exatamente um dos cestos;
- O interior de cada uma das regiões é formado por todos os pontos do interior do quarto cujo cesto mais próximo é aquele contido nesta região;

Os brinquedos contidos em cada região, devem ser guardados no cesto mais próximo. Após a divisão, eles verificaram que nenhum brinquedo estava sobre as fronteiras entre as regiões.



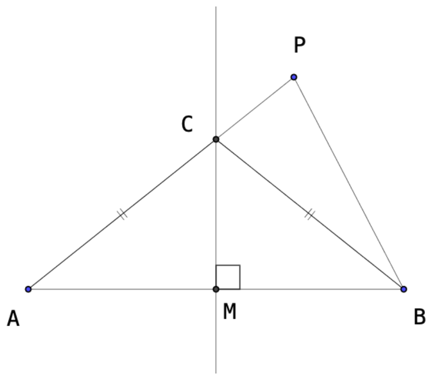
(A) Esboce cada uma das possíveis configurações (formas das regiões) para a divisão do quarto considerando a variação das suas dimensões. Justifique a sua resposta.

(B) Determine as medidas das áreas, em m^2, das três regiões.

Solução. Fatos que ajudam:

Sabemos que reta perpendicular a um segmento AB dado passando pelo seu ponto médio é a mediatriz de AB e consiste do lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de A e B.

Afirmação 1: *O semiplano determinado pela mediatriz de AB e contendo o ponto B é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $PB \leq PA$. A igualdade ocorre se, e só se, P está na mediatriz de AB.*



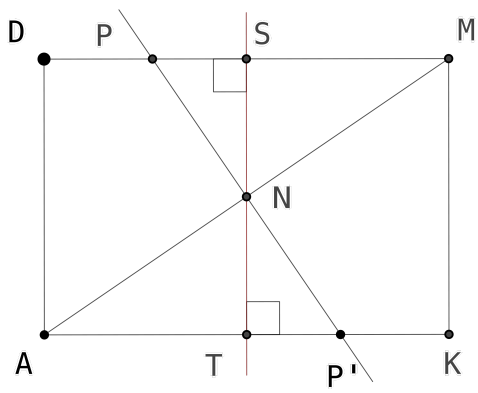
De fato, considere um ponto P do semiplano contendo A determinado pela mediatriz de AB fora da mediatriz e fora da reta AB. Seja C o ponto que em que a reta PB corta a mediatriz de AB. Então $CA = CB$. Pela desigualdade triangular,

$$PB < PC + CB = PC + CA = PA.$$

Afirmação 2: *Uma reta qualquer que passa pelo centro de um retângulo (ponto de encontro de suas diagonais) corta os lados opostos dos retângulo em pontos simétricos em relação ao centro. Além disso, divide o retângulo em dois polígonos congruentes e, consequentemente, de mesma área.*

Com efeito, suponha que uma reta passando pelo centro N de um retângulo corta um dos seus lados em um ponto P. Se P coincide com o ponto médio deste lado, o resultado é imediato, pois a reta cortará também o ponto médio do lado oposto (por Tales) e determinará dois retângulos congruentes.

Suponha que a reta corta um lado do retângulo, mas não em seu ponto médio. Para exemplificar o raciocínio, considere o retângulo $AKMD$ e uma reta passando por N cortando o lado DM em P em um ponto distinto do seu ponto médio S. Então, a reta NP corta a reta AK (paralela a DM) no ponto $'P$. A reta perpendicular ao lado DM passando por S contém N e corta o lado oposto AK em seu ponto médio T.



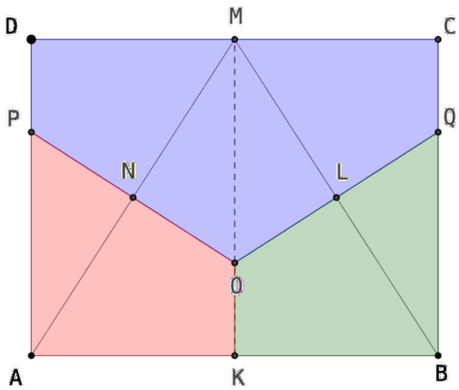
Desta forma, os triângulos PSN e $P'TN$ são congruentes (assim como os triângulos PMN e $P'AN$). Daí, os pontos P e P' são simétricos em relação ao ponto N. Além disso, as figuras $PDAP'$ e $P'KMP$ (com eventualmente $P = D$ e $P' = K$) são congruentes e temos as seguintes relações de áreas:

$$\begin{aligned} [PDAP'] &= [ATSD] + [P'TN] - [PSN] \\ &= [ATSD] = [TKMS] \\ &= [P'KMP] \\ &= \frac{1}{2}[AKMD]. \end{aligned}$$

(A) Agora, considere um retângulo $ABCD$ (representando o quarto) com A, B e M pontos correspondendo aos cestos 1, 2 e 3, respectivamente. Sejam K ponto médio do lado AB, N ponto médio do lado AM, L ponto médio do lado BM e O circuncentro de ABM.

De acordo com as considerações feitas anteriormente, as regiões desejadas são obtidas pelas interseções dos semiplanos determinados pelas mediatrizes OK, OL e ON, dos lados do triângulo ABM, restritas ao interior retângulo $ABCD$.

Uma das possíveis configurações está representada pela figura a seguir.



Note que M pertence a mediatriz OK que divide o retângulo $ABCD$ em dois retângulos congruentes (KM eixo de simetria). Portanto, para obtermos as possíveis configurações das regiões, basta analisarmos o retângulo $AKMD$.

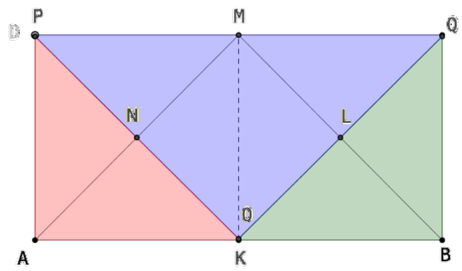
Considere o ponto P de interseção da mediatriz ON com a parte do retângulo $AKMD$ que está no mesmo semiplano determinado pela reta AM que contém o ponto D. Sejam $x = AK = 1/2AB$ e $y = AD$ as dimensões do quadrilátero $AKMD$. Daí, $x \cdot y = 18$.

Dependendo das dimensões do retângulo ou, equivalentemente, dependendo da natureza do triângulo ABM quanto aos ângulos, P pode ser um ponto do interior do lado AD ou coincidente com o ponto D ou um ponto do interior do lado DM, como veremos a seguir:

1ª Configuração: Se o triângulo ABM é retângulo em M ou, equivalentemente, se $AB = 6\sqrt{2}$ (ou $AD = 3\sqrt{2}$), então as três regiões são triangulares.

De fato, ABM é retângulo em M se, e somente se, K coincide com o circuncentro O de ABM. Pela afirmação 2, a reta KN corta AD no ponto D, simétrico de $K \equiv O$ em relação ao ponto N. Logo o retângulo $AKMD$ é um quadrado, pois suas diagonais são congruentes e perpendiculares. Isto ocorre se:

$$x = y \;\Rightarrow\; x^2 = 18 \;\Rightarrow\; x = y = 3\sqrt{2}.$$

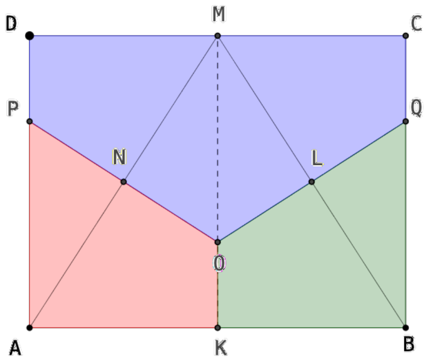


2ª Configuração: Se ABM é um triângulo acutângulo ou, equivalentemente, se $AB < 6\sqrt{2}$ (ou $AD > 3\sqrt{2}$), então as regiões são formadas por dois trapézios retângulos e um pentágono.

Note que o triângulo isósceles ABM é acutângulo se, e somente se, o circuncentro O pertence ao interior do triângulo ou, equivalentemente se $A\hat{M}B < 90°$. Como o circuncentro O pertence ao segmento KM, então o ponto P (simétrico de O) pertence ao lado AD. De outro modo,

$$\begin{aligned} A\hat{M}K &< 45° \Rightarrow A\hat{M}K < M\hat{A}K \\ &\Rightarrow x = AK < KM = y \\ &\Rightarrow x < 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ou seja, $AB < 6\sqrt{2}$ (ou $AD > 3\sqrt{2}$).

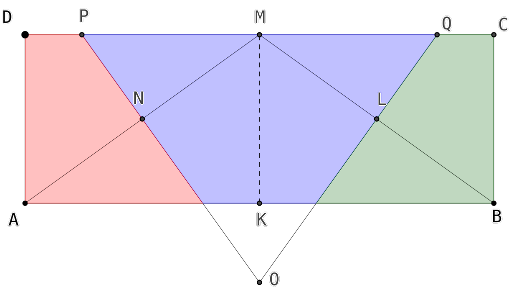


3ª Configuração: Se ABM é um triângulo obtusângulo ou, equivalentemente, se $AB > 6\sqrt{2}$ (ou $AD < 3\sqrt{2}$), então três regiões são formadas por trapézios, dois retângulos e um isósceles.

Finalmente, o triângulo ABM é obtusângulo se, e somente se, o circuncentro O pertence ao exterior do triângulo ou, equivalentemente se $A\hat{M}B > 90°$. Neste caso, a mediatriz de AM corta os lados AK e DM. Por outra análise, análoga ao caso anterior, temos

$$\begin{aligned} 90° &< A\hat{M}B < 180° \Rightarrow 45° < A\hat{M}K < 90° \\ &\Rightarrow M\hat{A}K < A\hat{M}K \\ &\Rightarrow y = MK < AM = x \Rightarrow x > 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ou seja, $AB > 6\sqrt{2}$ (ou $AD < 3\sqrt{2}$).



(B) Com os argumentos de congruência e simetria estabelecidos na afirmação 2, podemos concluir que, independentemente da configuração, o retângulo $ABCD$ fica dividido em quatro partes de mesma área (figuras congruentes), de modo que as regiões dos cestos 1 e 2 correspondem a uma dessas partes cada e a região do cesto 3, fica ocupada por duas dessas partes. Logo, as áreas das regiões dos cestos 1, 2 e 3 são, respectivamente, 9m^2, 9m^2 e 18m^2. □

Problema 6.3. Encontre todos os polinômios $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ de uma variável com coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n$ inteiros para os quais a equação polinomial

$$P(x) = z$$

tem pelo menos uma solução inteira qualquer que seja $z \in \mathbb{Z}$.

Solução. Seja P um polinômio de grau n com coeficientes inteiros, digamos

$$\begin{aligned} P(x) &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots \\ &+ a_2x^2 + a_1x + a_0, \\ &\quad \text{onde } a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Considere o polinômio

$$\begin{aligned} Q(x) &= P(x) - P(0) \\ &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots \\ &+ a_2x^2 + a_1x. \end{aligned}$$

Note que: α é solução inteira de $P(x) = z$ se, e somente se, α é solução inteira de $Q(x) = z + P(0)$.

Assim, procurar soluções inteiras de $P(x) = z$ é equivalente a procurar soluções inteiras de $Q(x) = z + P(0)$. Portanto, as hipóteses para P são transferidas para Q. Agora, observe que

$$Q(x) = x\left(a_nx^{n-1} + a_{-2}x^{n-2} + ... + a_2x + a_1\right) \quad (6)$$

Por hipótese, a equação $Q(x) = 1$ tem solução inteiras. Logo, de (6), a solução dessa equação deve ser $x = \pm 1$. De maneira análoga, a equação $Q(x) = -1$ deve ter solução inteira e novamente de (6) essa solução deve ser $x = \pm 1$. Logo,

$$Q(\pm 1) = \pm 1. \quad (7)$$

Considere agora um número primo y. A equação $Q(x) = y$ tem solução inteira e da equação (6), a solução deve ser $x = \pm y$ ou $x = \pm 1$. Segue de (7), que $x = \pm y$. Portanto, um dos conjuntos abaixo é infinito:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{y \in \mathbb{N} : y \text{ é primo e } Q(y) = y\} \quad \text{ou} \\ A_2 &= \{y \in \mathbb{N} : y \text{ é primo e } Q(-y) = y\}. \end{aligned}$$

Assim, $Q(x) - x$ ou $Q(-x) - x$ tem infinitas raízes e portanto são identicamente nulos. Logo:

$$Q(x) \equiv x \quad \text{ou} \quad Q(-x) \equiv x.$$

Repare que a condição de que $Q(-x) \equiv x$, equivale a:

$$Q(x) \equiv -x.$$

Portanto, um polinômio P satisfaz as condições do enunciado se, e só se, $P(x) = -x+c$ ou $P(x) = x+c$ para alguma constante $c \in \mathbb{Z}$.

Note por fim que se $P(x) = X + c$, onde $c \in \mathbb{Z}$, então as condições do enunciado são satisfeitas. $\square$

Problema 6.4. Encontre todos os pares de inteiros (m, n) tais que $\sqrt{n + \sqrt{2^5 \cdot 2023}} + \sqrt{m - \sqrt{2^5 \cdot 2023}} \in \mathbb{Z}$.

Solução. Temos que

$$\sqrt{n + \sqrt{2^5 \cdot 2023}} + \sqrt{m - \sqrt{2^5 \cdot 2023}} = a \in \mathbb{Z}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} m &+ n + 2\sqrt{(n + \sqrt{2^5 \cdot 2023})(m - \sqrt{2^5 \cdot 2023})} \\ &= a^2 \end{aligned}$$

é um número inteiro.

Portanto, concluímos que

$$2 \cdot (n + \sqrt{2^5 \cdot 2023})(m - \sqrt{2^5 \cdot 2023}) \in \mathbb{Z}.$$

Desenvolvendo o produto notável obtemos

$$4 \cdot (mn - 2^5 \cdot 2023 + (m-n)\sqrt{2^5 \cdot 2023}) \in \mathbb{Z}.$$

Isso só é possível quando $m = n$. Daí,

$$2m + 2\sqrt{m^2 - 2^5 \cdot 2023} = a^2 \in \mathbb{Z}.$$

Logo,

$$m^2 - 2^5 \cdot 2023 = q^2, q \in \mathbb{N}.$$

Note que

$$2m + 2q = a^2 \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$a^2 > 2m > 2\sqrt{2023} > 89.$$

Note ainda que:

$$2 \cdot 2^5 \cdot 2023 = 2(m^2 - q^2) = a^2(m - q),$$

o que implica em

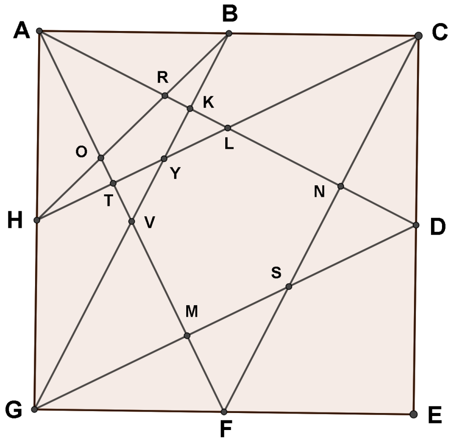
$$a^2 | 2 \cdot 2^5 \cdot 7 \cdot 17^2.$$

Como a é par, temos 3 possibilidades para $a^2 > 89$

- $a^2 = 2^2 \cdot 17^2$: Assim $m + q = 2 \cdot 17^2$, $m - q = 16 \cdot 7$, o que nos dá $m = 345$ e $a = 34$.
- $a^2 = 2^4 \cdot 17^2$: Assim $m + q = 2^3 \cdot 17^2$, $m - q = 2^2 \cdot 7$, o que nos dá $m = 1170$ e $a = 68$.
- $a^2 = 2^6 \cdot 17^2$: Assim $m+q = 2^5 \cdot 17^2$, $m-q = 7$, o que nos dá $m = \frac{9255}{2}$, Como m não é inteiro, descartamos esse caso.

Assim as soluções são $(m, n) = (345, 345)$ e $(m, n) = (1170, 1170)$. $\square$

Problema 6.5. Um experimento para verificar a potência de um laser de precisão foi organizado da seguinte forma: São posicionados espelhos planos nos pontos A, B, C, D, E, F, G e H, sobre os lados de um quadrado, de forma que um laser emitido a partir do ponto A descreveu a linha poligonal fechada $AFCHBGDA$ conforme a figura. Verificou-se então a formação de duas regiões sendo uma com forma hexagonal $SNLYVM$ e uma pentagonal $YKROT$. Sabendo que as distâncias entre dois espelhos consecutivos na direção horizontal e vertical medem l unidades de comprimento, determine as áreas das regiões pentagonal e hexagonal descritas acima, em termos de l.



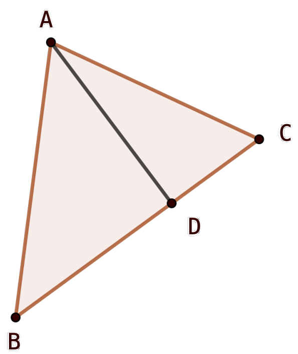
Solução. Observação: $[A_1A_2...A_n]$ denota a área do polígono $A_1A_2...A_n$.

Fatos que ajudam:

Razão na qual uma ceviana divide a área de triângulo:

Se AD é uma ceviana do triângulo ABC, então:

$$\frac{[ABD]}{[ABC]} = \frac{BD}{BC} \quad \text{e} \quad \frac{[ADB]}{[ADC]} = \frac{DB}{DC}.$$

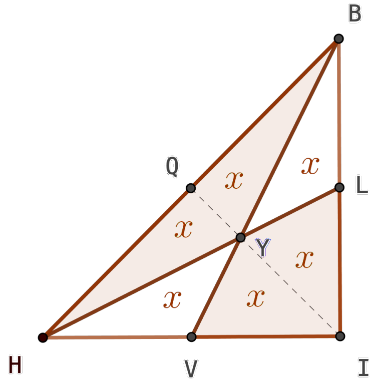


Em particular, se Y é o baricentro de um triângulo IBH, então:

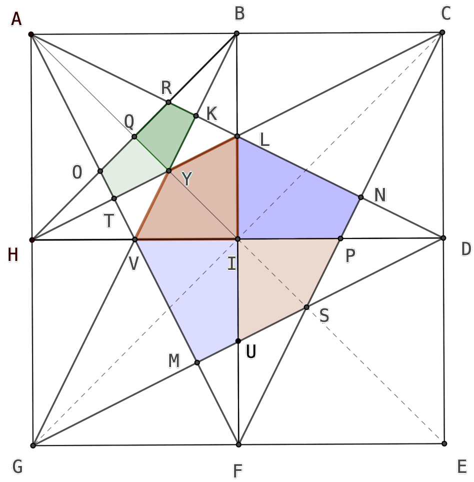
(i) Y divide cada uma das medianas IQ, BV e HL na razão 2:1.

(ii) $[QYB] = x = \frac{1}{6}[IBH]$

(iii) $[VILY] = 2x = \frac{1}{3}[IBH]$



Usando a simetria do problema, considere a figura:



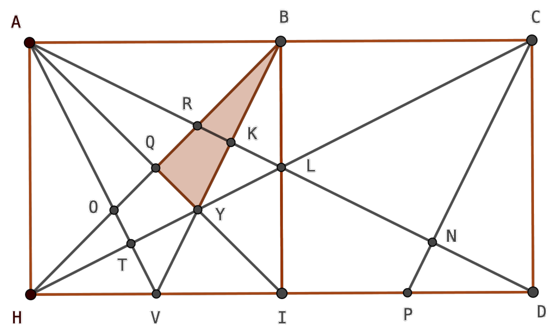
Podemos calcular as áreas desejadas da seguinte forma:

(1) $[YKROT] = 2 \cdot [QYKR]$.

(2) $[SNLYVM] = 2 \cdot [VPNLY] = 2 \cdot ([ILYV] + [IPNL])$.

($[ILYV] = [IUSP]$ e $[IPNL] = [IVMU]$ por simetria).

1. Área do pentágono:



Note que

$$[VBH] = \frac{1}{2}[IBH] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}l^2 = \frac{1}{4}l^2.$$

E, por (ii), temos

$$[QYB] = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}l^2 = \frac{1}{12}l^2.$$

Por outro lado, considerando as semelhanças de triângulos e as observações sobre cevianas, segue-se:

$$\begin{aligned} ABR \sim DHR \quad &\Rightarrow \quad \frac{RB}{RH} = \frac{AB}{DH} = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \quad RB = \frac{1}{2}RH = \frac{1}{3}HB \\ &\Rightarrow \quad [VBR] = \frac{1}{3}[VBH] = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}l^2 \\ &\Rightarrow \quad [VBR] = \frac{1}{12}l^2 \end{aligned}$$

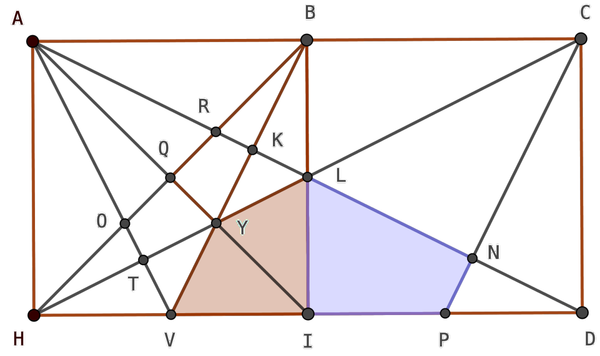
e

$$\begin{aligned} ABK \sim DVK \quad &\Rightarrow \quad \frac{KB}{KV} = \frac{AB}{DV} = \frac{l}{3\cdot l/2} = \frac{2}{3} \\ &\Rightarrow \quad \frac{KB}{KB+KV} = \frac{2}{2+3} \\ &\Rightarrow \quad \frac{KB}{BV} = \frac{2}{5} \\ &\Rightarrow \quad [RKB] = \frac{2}{5}[VBR] = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{12}l^2 \\ &\Rightarrow \quad [RKB] = \frac{l^2}{30}. \end{aligned}$$

Logo, de (1)

$$\begin{aligned} [OTYKR] &= 2\cdot[QYKR] = 2\cdot([QYB]-[RKB]) \\ &= 2\cdot\left(\frac{l^2}{12}-\frac{l^2}{30}\right) \\ &= \left(\frac{l^2}{6}-\frac{l^2}{15}\right) \\ &= \frac{5l^2-2l^2}{30} = \frac{l^2}{10}. \end{aligned}$$

2. Área do hexágono:



Por (iii), temos

$$[VILY] = \frac{1}{3}[IBH] = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}l^2 = \frac{1}{6}l^2.$$

Por outro lado,

$$[IDL] = [PDC] = \frac{1}{4}l^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned} DNP \sim ANC \quad &\Rightarrow \quad \frac{NP}{NC} = \frac{PD}{CA} = \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow \quad NP = \frac{1}{5}PC \\ &\Rightarrow \quad [PDN] = \frac{1}{5}[PDC] \\ &\qquad\qquad = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}l^2 = \frac{1}{20}l^2 \\ &\Rightarrow \quad [IPNL] = [IDL]-[PDN] \\ &\qquad\qquad = \frac{1}{4}l^2 - \frac{1}{20}l^2 = \frac{1}{5}l^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} [SNLYVM] &= 2\cdot[VPNLY] \\ &= 2.([VILY]+[IPNL]) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [SNLYVM] = 2.\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\right)l^2 = \frac{11}{15}l^2.$$

$\square$

7. Problemas

Convidamos o leitor a responder alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Enviem as soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, o envio do arquivo (.tex), no modelo disponível no site, deve ser realizado até **01/09/2025**.

Problema 1 (OBM 2020)**.** Seja ABC um triângulo acutângulo, e D um ponto sobre BC tal que AD é perpendicular a BC. A bissetriz do ângulo $\angle DAC$ intersecta o segmento DC em E. Seja F o ponto sobre a reta AE tal que BF é perpendicular a AE. Se $\angle BAE = 45°$, calcule a medida do ângulo $\angle BFC$.

Problema 2 (OBMEP - 2017)**.** (OBMEP - 2017) Somando 1 a um certo número natural, obtemos um múltiplo de 11. Subtraindo 1 desse mesmo número, obtemos um múltiplo de 8. Qual é o resto da divisão do quadrado desse número por 88?

a) 0 c) 8 e) 80

b) 1 d) 10

Problema 3 (OBMEP - 2018)**.** Observe que na igualdade $360 = 90+120+150$ as parcelas são proporcionais a 3, 4 e 5. De quantas maneiras podemos escrever 360 como a soma de três parcelas inteiras, em ordem crescente, e proporcionais a três números inteiros positivos consecutivos?

a) 12 c) 20 e) 120

b) 15 d) 60

8. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n. 33, março de 2025**. [10]

Problema 1. (30ª OMRN - 2019). Dada uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz às seguintes condições:

- $f(1000) = 999$;
- $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

O valor de $f(500)$ é:

a) 1 c) $\frac{1}{999}$ e) $\frac{1}{100}$

b) $\frac{1}{500}$ d) -1

Solução. Se $y = f(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}$, tem-se que $y \in \text{Im}(f)$. Nesse caso,

$$f(x) \cdot f(f(x)) = 1 \Rightarrow y \cdot f(y) = 1 \Rightarrow f(y) = \frac{1}{y},$$

para todo $y \in \text{Im}(f)$.

Isso significa que para cada $y \in \text{Im}(f)$, a função f associa o valor $\frac{1}{y}$. Ora, como $999 \in \text{Im}(f)$, pois $999 = f(1000)$, segue que $f(999) = \frac{1}{999}$. Assim, $\frac{1}{999} \in \text{Im}(f)$.

Como $\frac{1}{999}$ e 999 são valores da imagem de f, $\frac{1}{999} < 500 < 999$ e f é contínua, segue, pelo **Teorema do Valor Intermediário**, que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) = 500$, ou seja, $500 \in \text{Im}(f)$. Como f associa para cada valor $y \in \text{Im}(f)$ o valor $\frac{1}{y}$, segue que:

$$f(500) = \frac{1}{500}.$$

Portanto, a alternativa correta é o item b). □

Problema 2. (OBMEP - 2010). Duas folhas de papel, uma retangular e outra quadrada, foram cortadas em quadradinhos de 1 cm de lado. Nos dois casos obteve-se o mesmo número de quadradinhos. O lado da folha quadrada media 5 cm a menos que um dos lados da folha retangular. Qual era o perímetro da folha retangular?

a) 48 c) 72 e) 100

b) 68 d) 82

Solução. Vamos resolver o problema passo a passo.

Informações fornecidas:

[10] A seguir apresentamos as soluções enviadas pelo leitor Amaro José de Oliveira Filho dos 3 problemas da edição 33 e também apresentamos a solução de Nélio A. Conceição - discente do PROFMAT-UFAL, para o problema 3.

- Uma folha retangular e uma folha quadrada foram cortadas em quadradinhos de 1 cm^2.

- O número de quadradinhos obtido de ambas as folhas é o mesmo.

- O lado da folha quadrada é 5 cm menor que um dos lados da folha retangular.

Vamos definir as variáveis:

- Seja x o lado da folha quadrada (em cm).

- Sejam a e b os lados da folha retangular, com a sendo a altura e b a base (em cm).

Sabemos que o número de quadradinhos obtidos a partir de cada folha é igual, ou seja: $x^2 = ab$.

Além disso, é dito que o lado da folha quadrada é 5 cm menor que um dos lados da folha retangular. Então, temos a relação: $x = a - 5$.

Agora, substituímos x por $a - 5$ na equação $x^2 = ab$ e temos

$$(a-5)^2 = ab.$$

Expandimos o quadrado à esquerda:

$$a^2 - 10a + 25 = ab.$$

Agora, a questão nos pede o perímetro da folha retangular, que é dado por:

$$P = 2a + 2b.$$

Para encontrar b, vamos rearranjar a equação $a^2 - 10a + 25 = ab$:

$$b = \frac{a^2 - 10a + 25}{a} = a - 10 + \frac{25}{a}.$$

Agora, o próximo passo seria testar valores de a que tornem b um número inteiro positivo. Como a é denominador de 25, basta verificar os valores de a que sejam divisores de 25.

Se $a = 1$, então $x = 1 - 5 = -4$ (não vale, pois $a > 0$.).

Se $a = 5$, então $x = a - 5 = 5 - 5 = 0$ (não vale, pois $a > 0$.).

Se $a = 25$, então $x = a - 5 = 25 - 5 = 20$.

Substituindo $a = 25$ na equação $x^2 = ab$, temos

$$20^2 = 25b \implies b = \frac{400}{25} = 16.$$

Concluímos que o perímetro do retângulo é

$$p = 2 \cdot 25 + 2 \cdot 16 = 82.$$

Portanto, a alternativa correta é o item d). ☐

Problema 3. (O. M. do Grande ABC - 2011). O último algarismo do número $3^{2011} + 4^{2011}$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Solução 1. Para encontrar o último algarismo de $3^{2011} + 4^{2011}$, basta calcular os últimos algarismos de 3^{2011} e 4^{2011} separadamente, e então somá-los. Esse tipo de problema é resolvido observando o padrão dos últimos algarismos das potências de 3 e 4.

Potências de 3:

Os últimos algarismos das potências de 3 seguem um ciclo de 4 elementos: $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$ (último algarismo 7), e $3^4 = 81$ (último algarismo 1). O ciclo se repete: 3, 9, 7, 1. Para encontrar o último algarismo de 3^{2011}, basta calcular o resto da divisão de 2011 por 4, já que o ciclo tem comprimento 4 :

$$2011 \div 4 = 502 \text{ resto } 3.$$

Portanto, o último algarismo de 3^{2011} é o mesmo de 3^3, que é 7.

Potências de 4:

Os últimos algarismos das potências de 4 seguem um ciclo de 2 elementos: $4^1 = 4$ e $4^2 = 16$ (último algarismo 6). O ciclo se repete: 4, 6.

Para encontrar o último algarismo de 4^{2011}, basta calcular o resto da divisão de 2011 por 2, já que o ciclo tem comprimento 2 :

$$2011 \div 2 = 1005 \text{ resto } 1.$$

Portanto, o último algarismo de 4^{2011} é o mesmo de 4^1, que é 4.

Agora, somamos os últimos algarismos de 3^{2011} e 4^{2011} :

$7 + 4 = 11$. O último algarismo de 11 é 1.

Portanto, o último algarismo de $3^{2011} + 4^{2011}$ é 1 e a alternativa correta é o item (a).

□

Solução 2. O último dígito de um número pode ser encontrado calculando o número módulo 10. Assim, queremos calcular:

$$3^{2011} + 4^{2011} \pmod{10}.$$

Cálculo de $3^{2011} \pmod{10}$

Precisamos notar que as potências de 3 módulo 10 formam um ciclo repetitivo. Nesse caso calculamos as primeiras potências:

$$3^1 \equiv 3 \pmod{10},$$

$$3^2 = 9 \equiv 9 \pmod{10},$$

$$3^3 = 27 \equiv 7 \pmod{10},$$

$$3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}.$$

Perceba que o ciclo dos restos é $3, 9, 7, 1$, e ele se repete a cada 4 potências.

Agora, calculamos o expoente $2011 \mod 4$:

$$2011 \div 4 = 502\,(\text{quociente}),\ \text{resto}\,3.$$

Portanto:

$$2011 \equiv 3 \pmod{4}.$$

Desse ciclo, sabemos que:

$$3^{2011} \equiv 3^3 \pmod{10}.$$

E como $3^3 = 27 \equiv 7 \pmod{10}$, temos:

$$3^{2011} \equiv 7 \pmod{10}.$$

Cálculo de $4^{2011} \pmod{10}$

Precisamos notar que as potências de 4 módulo 10 também formam um ciclo repetitivo. Calculamos as primeiras potências:

$$4^1 \equiv 4 \pmod{10},$$

$$4^2 = 16 \equiv 6 \pmod{10}.$$

Note que o ciclo desses restos é $4, 6$, e ele se repete a cada 2 potências.

Agora, calculamos o expoente $2011 \mod 2$:

$$2011 \div 2 = 1005\,(\text{quociente}),\ \text{resto}\,1.$$

Portanto:

$$2011 \equiv 1 \pmod{2}.$$

Do ciclo, sabemos que:

$$4^{2011} \equiv 4^1 \pmod{10}.$$

E como $4^1 = 4 \pmod{10}$, temos:

$$4^{2011} \equiv 4 \pmod{10}.$$

Conclusão

Agora somamos os restos módulo 10:

$$3^{2011} + 4^{2011} \equiv 7 + 4 \pmod{10}.$$

Note que:

$$7 + 4 = 11 \implies 11 \pmod{10} = 1.$$

Isso garante que:

$$3^{2011} + 4^{2011} \equiv 11 \pmod{10}.$$

$$\implies 3^{2011} + 4^{2011} \equiv 1 \pmod{10}.$$

Portanto o último dígito de $3^{2011} + 4^{2011}$ é 1. E a alternativa correta é o item (a). □