É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 34, volume 1, março de 2025

ISSN 2526-8651

Editorial

Caros Leitores, eis-nos juntos na edição de março 2025 do nosso É Matemática, OXENTE!

A presente edição chega até vocês abordando temas interessantes e variados com ao menos dois objetivos: ajudar na preparação dos concorrentes às olimpíadas de matemática e oportunizar um mergulho multifacetado nessa área de conhecimento.

A seção *artigo* apresenta o trabalho *A matemática na natureza*, de autoria da professora Isis G. A. Quinteiro, da Universidade Federal do Agreste de Pernambuco. O artigo leva o leitor à descobertas de fenômenos naturais "misteriosamente" impregnados de matemática, trazendo a tona uma clássica pergunta: a matemática é descoberta ou inventada?

A seção *curiosidade*, em sintonia com a temática do artigo desta edição, aborda *Uma sequência pouco conhecida,mas bem poderosa!*, contribuição das autoras Christiana G. do Nascimento, estudante da licenciatura em matemática na UFRPE e Thamires S. Cruz, docente da mesma instituição.

A *indicação* chega com a proposta dos desafios aritméticos, lógicos e algébricos, no site *Racha cuca*, contribuição de Allana M. G. de Amorim, estudante do curso de licenciatura em matemática na Universidade Federal Rural de Pernambuco.

A seção *Quem pergunta, quer saber!* responde à dúvida de um professor, veiculada na Revista do Professor de Matemática (RPM, nº 28, p.59), a respeito de um problema que faz uso de artifícios algébricos na sua resolução.

Finalizamos a edição com soluções de problemas da OLIMPÍADA PERNAMBUCANA DE MATEMÁTICA - OPEMAT 2023 (segunda fase - nível 2) e proposta de novos problemas, bem como soluções daqueles propostos na edição 32.

Torcendo para que esta edição ajude a manter acesa a chama do interesse pela matemática, criando sempre mais uma cultura relativa a esse campo do saber, nos despedimos com muita gratidão por continuarem a prestigiar nosso projeto.

A Redação.

Sumário

1. Artigo

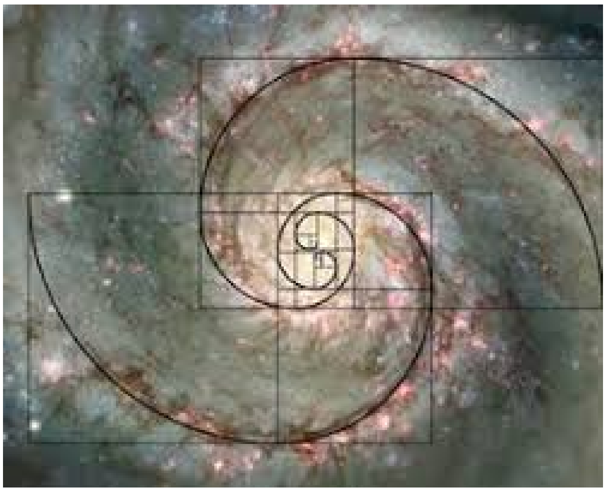
A matemática na natureza

Isis Gabriella de Arruda Quinteiro Silva
Universidade Federal do Agreste de Pernambuco
(Av. Bom Pastor s/n, Boa Vista) - Garanhuns-PE - Brasil
(55292-270)

Introdução

Recentemente um vídeo, mostrando duas baleias jubartes durante uma caça na Antártida, viralizou nas redes sociais quando observou-se que as baleias criaram uma espiral muito específica, conhecida como espiral de Fibonacci, na água (veja [1]). Mas, o que é uma espiral de Fibonacci? É um padrão matemático observado em todo o universo. É como se fosse uma espécie de assinatura do Criador. Este padrão pode ser visualizado, por exemplo, no giro de uma galáxia, no miolo de uma flor, na cauda de um camaleão, no chifre de um antílope (Antilopecervicapra) e ainda no nautilus marinho (Nautilus pompilius), conforme vemos nas imagens a seguir. Muitos fenômenos naturais parecem seguir esse padrão numérico não aleatório.

Figura 1.1: Giro de uma galáxia



Fonte: Sparrow, 2018.

Figura 1.2: Miolo de um girassol

Fonte: Mendes, 2007.

Figura 1.3: Exemplos da formação da espiral áurea no antílope, no camaleão e no nautilus

Fonte: Freitas, 2008.

A espiral de Fibonacci está diretamente ligada a uma sequência de números inteiros, chamada *Sequência de Fibonacci*, que definiremos posteriormente e cujos termos estão entre os números considerados os mais importantes da natureza. Veremos neste artigo que a sequência de Fibonacci também está ligada a um número que aparece com frequência na natureza e, por isso, é conhecido como número de ouro ou número de Deus. Este número, também conhecido como razão áurea ou proporção áurea, é um número irracional que vale aproximadamente $1,61803398875$. Representado pela letra grega φ (phi), ele possui propriedades matemáticas e estéticas que o tornam fascinante e amplamente reconhecido em diversas áreas do conhecimento, como matemática, arte, arquitetura e natureza. Tudo isso vem corroborar com o que já dizia Galileu Galilei: "A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo" e ainda Louis Pasteur: "Quanto mais eu estudo a natureza, mais me maravilho com a obra do Criador". Convido o leitor a embarcar nessa fascinante viagem pelo mundo da matemática presente na natureza, com foco na sequência de Fibonacci. Antes de iniciarmos essa deliciosa aventura, vamos conhecer um pouco sobre a história de Leonardo Fibonacci, que se destacou no estudo de tal sequência numérica.

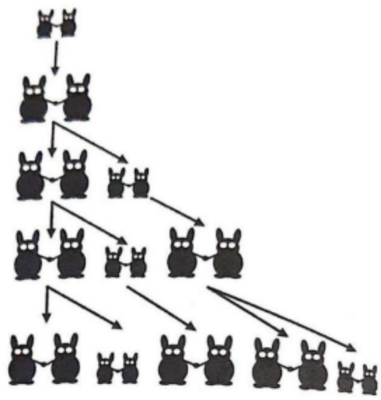
Leonardo Pisa, que futuramente seria chamado de Leonardo Fibonacci, nasceu por volta de 1170 na cidade de Pisa e era filho de um comerciante chamado Bonacci. Por isso, ficou conhecido como Leonardo Fibonacci. Quando criança, Fibonacci acompanhou o pai numa viagem de trabalho à Argélia, onde ele começou a aprender um pouco da matemática indiana, que seria de grande aplicação na contabilidade, uma ferramenta indispensável para os comerciantes. Naquela época, a Europa ainda utilizava o sistema de numeração romano que é bem difícil de ser usado para fazer contas. Você já tentou fazer contas usando numerais romanos?

Fibonacci conheceu o sistema de números indo-arábicos (esse que usamos até hoje) que facilita a realização de contas usando um sistema de posição. Além disso, Fibonacci foi apresentado ao número zero. Você já havia parado para pensar que não existe uma representação para o número zero em numerais romanos? Em suas viagens, Fibonacci conheceu muitos problemas da matemática indiana. Um deles, conhecido no Oriente vários séculos antes de Fibonacci, era calcular de quantas maneiras diferentes podemos organizar fonemas curtos e longos na poesia sânscrita (poesia escrita em sânscrito, idioma das escrituras clássicas das religiões indianas da época). A solução desse problema está na sequência que definiremos mais a frente como *sequência de Fibonacci.*

Ao retornar de viagem, Fibonacci reuniu todos os conhecimentos obtidos durante suas viagens com o pai e escreveu um livro chamado *Liber Abaci* no ano de 1202. Isso revolucionou a matemática européia, introduzindo o zero e os demais numerais indo-arábicos, que permitiram o desenvolvimento de toda a matemática dos séculos posteriores. Por isso, o "Liber Abaci" é considerado a obra matemática mais influente na Europa desde os "Elementos de Euclides", que foi escrito mais de mil anos antes. Para mais informações sobre a história de Leonardo Fibonacci, indicamos a leitura de [2] e [3]. Um dos capítulos do livro é baseado em pequenos problemas. Um dos problemas mais conhecidos trata de uma população de coelhos. O problema é o seguinte:

"Um homem coloca um casal de coelhos jovens em um cativeiro e investiga quantos pares de coelhos podem ser produzidos em um ano, a partir deste casal, supondo que a cada mês cada par adulto gera um novo par jovem e que jovens coelhos levam um mês para se tornarem adultos e começarem a se reproduzir, formando um novo par a cada mês"

Figura 1.4: Ilustração representativa da série de Fibonacci, demonstrando o crescimento populacional de coelhos



Fonte: Stewart, 2016.

A sequência de Fibonacci aparece naturalmente na análise deste problema que pode ser encontrado em várias fontes como, por exemplo, [18].

Um outro problema matematicamente idêntico e mais recente, trata da ancestralidade do cromossomo X no DNA dos seres humanos. Este problema também está ligado à sequência de Fibonacci e será explorado mais à frente.

O interesse dos matemáticos na sequência de Fibonacci não está no problema dos coelhos e nem no problema dos cromossomos. A sequência em questão é interessante, por si mesma, do ponto de vista matemático, uma vez que esconde muitas propriedades curiosas que veremos a seguir.

Propriedades interessantes da sequência de Fibonacci

Iniciamos esta seção definindo a sequência de Fibonacci como a sequência formada pelos números $\{F_1, F_2, ..., F_n, ...\}$ onde $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geq 3$. Assim, os primeiros termos da sequência de Fibonacci são $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 19, 32, 51, \ldots\}$. Conforme foi dito anteriormente, esta sequência possui algumas propriedades bastante interessantes que destacaremos a partir de agora.

Propriedade 1. $F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Começamos escrevendo a igualdade fundamental $F_{k+2} = F_k + F_{k+1}$. Daí segue que $F_k = F_{k+2} - F_{k+1}$. Agora, fazendo $k = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$ e somando termo a termo, obtemos

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_n = (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3)$$

$$+(F_5 - F_4) + \ldots + (F_{n+2} - F_{n+1})$$

$$= F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1.$$

Propriedade 2. $F_{m+n} = F_{m-1}.F_n + F_m.F_{n+1}$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Mostraremos essa igualdade usando o Princípio da Indução Finita sobre n. Para isso, fixemos m. Se $n = 1$, a identidade torna-se $F_{m+1} = F_{m-1}F_1 + F_mF_2 = F_{m-1}.1 + F_m.1 = F_{m-1} + F_m$, que é verdadeira, por ser a relação fundamental da sequência de Fibonacci. Suponha que a identidade acima seja verdadeira quando n é um dos inteiros $1, 2, 3, 4, \ldots, k$. Assim, temos:

$$F_{m+k} = F_{m-1}F_k + F_mF_{k+1}$$

e também

$$F_{m+(k-1)} = F_{m-1}F_{k-1} + F_mF_k.$$

Portanto:

$$F_{m+(k+1)} = F_{m+k} + F_{m+(k-1)}$$

$$= F_{m-1}(F_k + F_{k-1}) + F_m(F_k + F_{k+1}),$$

o que completa o resultado por indução sobre n.

Propriedade 3. F_m divide F_{mn}, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: A demonstração é por indução sobre n. Para $n = 1$, o resultado é verdadeiro, pois $F_{mn} = F_m$. Suponha que para $n = 1, 2, 3, \ldots, k$, F_{mn} seja divisível por F_m. O caso $(n + 1)$ é verificado usando a fórmula fundamental: $F_{m(k+1)} = F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1}$. Como, por hipótese de indução, F_m divide F_{mk} , o lado direito da expressão acima é divisível por F_m , e, portanto, $F_{m(k+1)}$ é divisível por F_m.

Propriedade 4. Relação entre três números de Fibonacci consecutivos:

$$(F_{n+1})^2 = F_n.F_{n+2} + (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Essa propriedade é conhecida como fórmula de Cassini e pode ser verificada utilizando-se indução sobre n como pode ser visto em [10].

Propriedade 5. Determinantes de ordem dois, com elementos da sequência de Fibonacci:
Vamos compor uma matriz quadrada de ordem dois de modo que o primeiro elemento da matriz, ou seja, o elemento que se encontra na primeira linha com a primeira coluna, a_{11}, seja qualquer um dos elementos da sequência de Fibonacci, o elemento seguinte da sequência de Fibonacci será o elemento a_{12} da matriz, o próximo número de Fibonacci será o elemento a_{21} e o termo seguinte será o elemento a_{22} da matriz. Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 13 & 21 \end{bmatrix}.$$

A propriedade em questão é que o determinante de qualquer matriz construída da forma anterior, só possui dois possíveis valores: 1 ou -1.
A demonstração dessa propriedade pode ser encontrada em [10].

Propriedade 6. Determinantes de ordem maior ou igual a três, com elementos da sequência de Fibonacci:

Se dispusermos os elementos da sequência de Fibonacci como elementos de uma matriz quadrada de ordem maior ou igual a três de acordo com o que foi feito na propriedade anterior, ou seja, os números de Fibonacci, devem obedecer a sequência, por linhas de cima para baixo, e em cada linha seguir no sentido da esquerda para a direita, sendo que o primeiro elemento da matriz pode ser qualquer dos números de Fibonacci. Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 34 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 13 \\ 21 & 34 & 55 \\ 89 & 144 & 233 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, o valor do determinante de qualquer uma dessas matrizes será sempre igual a zero. IGUAL A ZERO? Isso mesmo, acredite nisso verificando que, no caso da sequência de Fibonacci sendo disposta da forma citada anteriormente, existe uma relação entre as colunas dessas matrizes. Na realidade esse fato se relaciona com a própria definição da sequência de Fibonacci, pois como já vimos, a soma de dois termos consecutivos da sequência resulta no termo seguinte, no caso das matrizes citadas, vemos que a soma do primeiro com o segundo elemento de cada linha resultará no terceiro, ou seja, a primeira coluna somada com a segunda resultará na terceira coluna. Essa relação entre as colunas das matrizes, embora seja imediata e mais facilmente percebida, ela não é a única. Por exemplo: nos dois casos apresentados, vemos que cada elemento da terceira linha menos o elemento da primeira linha que se encontra na mesma coluna, resultará no elemento situado na segunda linha multiplicado por quatro.
Podemos notar que, se a ordem da matriz for maior que três, seguindo a distribuição mencionada anteriormente, o determinante também será igual a zero.

Em 1876, F. Edouard A. Lucas provou que o Máximo Divisor Comum de dois números de Fibonacci é um outro número de Fibonacci. Mais precisamente,temos:

Propriedade 7.

$$MDC(F_n, F_m) = F_{MDC(F_n, F_m)}.$$

Em particular, $MDC(F_n, F_{n-1}) = 1$, ou seja, quaisquer dois números de Fibonacci consecutivos são primos entre si.
A demonstração dessa propriedade pode ser encontrada em [9].

O próximo resultado é conhecido como *O Teorema de Zeckendorf*. Para a demonstração deste resultado, indicamos [9].

Propriedade 8. Todo número inteiro positivo pode ser escrito de maneira única como a soma de dois números de Fibonacci distintos.

Observando a sequência, encontramos um outro padrão interessante, a saber, cada terceiro número na sequência é um múltiplo de 2. Cada quarto número na sequência é um múltiplo de 3, cada quinto número na sequência é um múltiplo de 4 e assim sucessivamente. Temos então a seguinte propriedade, cuja demonstração pode ser construída com a ideia apresentada em [15]. .

Propriedade 9. $\frac{1}{3}$ dos números de Fibonacci é par, $\frac{1}{4}$ dos números de Fibonacci é mútiplo de 3, $\frac{1}{5}$ dos números de Fibonacci é mútiplo de 5. Mais geralmente, $\frac{1}{n}$ é o número de mútiplos de F_n dentro da sequência de Fibonacci.

A próxima propriedade relaciona os números de Fibonacci ao conhecido *Triângulo de Pascal*. O triângulo de Pascal é dividido por linhas e colunas, começando sempre da linha zero e da coluna zero. Ele é formado por combinações, ou seja, na linha 0 e coluna 0, teremos a combinação de 0 elemento tomado de 0 em 0, na linha 1 e coluna 1, teremos a combinação de 1 elemento tomado de 1 em 1, e assim por diante. Podemos construir quantas linhas forem necessárias seguindo essa mesma lógica.

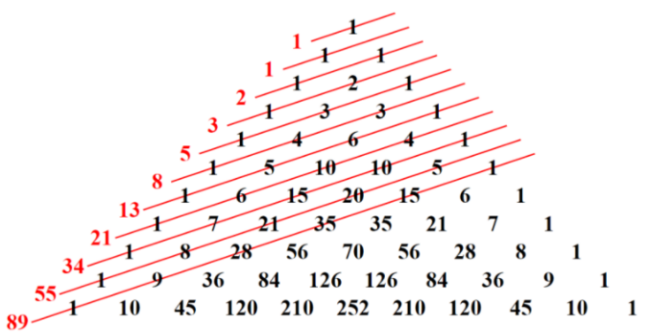
Figura 1.5: Triângulo de Pascal

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\[6pt]
\binom{1}{0} \ \binom{1}{1} \\[6pt]
\binom{2}{0} \ \binom{2}{1} \ \binom{2}{2} \\[6pt]
\binom{3}{0} \ \binom{3}{1} \ \binom{3}{2} \ \binom{3}{3} \\[6pt]
\binom{4}{0} \ \binom{4}{1} \ \binom{4}{2} \ \binom{4}{3} \ \binom{4}{4} \\[6pt]
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\[6pt]
\binom{n}{0} \ \binom{n}{1} \ \binom{n}{2} \ \binom{n}{3} \ \binom{n}{4} \cdots \binom{n}{n}
\end{array}
$$

Fonte: InfoEscola, 2025.

Propriedade 10. Os números de Fibonacci aparecem nas diagonais do triângulo de Pascal, pois a soma dos termos de uma diagonal rasa sempre é um número de Fibonacci.(Veja figura a seguir!)

Figura 1.6: Triângulo de Pascal: soma dos termos de cada diagonal rasa.



Fonte: Neurochispas.

A demonstração desta propriedade pode ser encontrada em [16].

A sequência de Fibonacci está intimamente ligada à razão áurea que também é conhecida como número de ouro. A razão áurea é definida pela seguinte relação: dois números estão na razão áurea se a razão entre o maior e o menor é igual a razão entre a soma deles e o maior. Matematicamente, se a e b são dois números tais que $a > b > 0$, eles estão na razão áurea se

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \varphi.$$

Essa equação resulta em um valor de φ que é solução da equação quadrática $x^2 - x - 1 = 0$, cujo resultado positivo é φ que, como foi dito no início deste trabalho é chamado *número de ouro* ou *número de Deus*.

Ao longo da história, a razão áurea tem sido utilizada como um princípio estético fundamental. Artistas e arquitetos antigos, como os gregos e os renascentistas, incorporaram a proporção áurea em suas obras para alcançar harmonia e beleza. Um exemplo famoso é o Partenon, em Atenas, onde se acredita que as proporções do edifício foram projetadas com base na razão áurea. Durante o Renascimento, Leonardo da Vinci estudou e aplicou a proporção áurea em suas obras, como na “Monalisa” e no “Homem Vitruviano”.

Outros artistas, como Salvador Dalí, também exploraram essa proporção em suas criações.

A razão áurea não está limitada apenas a criação humana. Ela também aparece frequentemente na natureza. Padrões de crescimento de plantas, a formação de conchas e até mesmo a disposição das pétalas de flores seguem a proporção áurea. Além de sua aplicação prática, o número de ouro é uma constante matemática de grande importância. Ela possui propriedades únicas, como a sua autossimilaridade: se subtrairmos uma unidade de φ, obtemos o seu inverso. Essa característica torna φ um objeto de estudo fascinante em diversas áreas da matemática, incluindo a teoria dos números e a geometria.

O número de ouro é um exemplo notável de como a matemática pode estar intrinsecamente ligada à estética e à natureza. Sua presença em obras de arte, arquitetura e na própria estrutura do mundo natural ilustra a profunda conexão entre a matemática

e o universo ao nosso redor. A razão áurea continua a inspirar e a fascinar matemáticos, artistas e cientistas, revelando a beleza que pode surgir quando números e proporções se encontram.
A relação entre a sequência de Fibonacci e o número de ouro é bastante estreita e será destacada a seguir através de algumas propriedades.

Propriedade 11. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$F_n = \frac{\varphi^n - [-\varphi]^{-n}}{\sqrt{5}},$$

onde φ é o número de ouro. (Apesar de não ser fácil visualizar, o número do lado direito da equação anterior, é um número inteiro!)

Antes de demonstrarmos a fórmula anterior, que é conhecida como Fórmula de Binet, vamos fazer algumas observações. A sequência de Fibonacci não é a única sequência que satisfaz a fórmula recursiva

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}. \tag{1}$$

De fato, a chamada sequência de Lucas: $\{1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots\}$ também satisfaz à relação 1. Na verdade, existe uma infinidade de sequências satisfazendo essa relação.
Demonstração: Voltando a demonstração da Fórmula de Binet, observe que , se φ é o número de ouro, por definição temos $\varphi^2 = \varphi + 1$. Assim, multiplicando cada lado por φ^n, obtemos $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\{\varphi, \varphi^2, \varphi^3, \ldots\}$ é uma sequência satisfazendo $(*)$. Seja $u = 1 - \varphi$ a outra solução da equação $x^2 = x + 1$. Logo, $\{u, u^2, u^3, \ldots\}$ é uma sequência que satisfaz $(*)$. Você pode verificar que a sequência $\{\varphi - u, \varphi^2 - u, \varphi^3 - u, \ldots\}$ satisfaz $(*)$. Mas os dois primeiros termos são iguais, pois φ e u são soluções de $x^2 = x + 1$. Portanto, a sequência $\frac{\varphi^n - u^n}{\varphi - u}$, para $n \in \mathbb{N}$, é a sequência de Fibonacci, isto é,

$$F_n = \frac{\varphi^n - u^n}{\varphi - u}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, é fácil verificarmos que

$$\frac{\varphi^n - u^n}{\varphi - u} = \frac{\varphi^n - [-\varphi]^{-n}}{\sqrt{5}},$$

o que demonstra o resultado. É interessante observar que a sequência de Fibonacci é extremamente fácil de definir recursivamente e, apesar disso, possui uma expressão complicada para cada termo.
De todas as propriedades da sequência de Fibonacci, a mais importante foi descoberta por Yohan Kepler (o mesmo da Astronomia). Ele começçu a calcular a razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci. Por exemplo, Kleper observou que

$$\frac{F_2}{F_1} = 1 \quad , \frac{F_3}{F_2} = 2 \quad \frac{F_4}{F_3} = 1,5 \quad \frac{F_5}{F_4} = 1,6666...$$

Kepler percebeu então que, conforme ele percorria a sequência de Fibonacci, tomando termos cada vez maiores, a razão $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ se aproximava cada vez mais do número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é o número de ouro. Podemos enunciar então a seguinte propriedade:

Propriedade 12. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que a razão $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ se aproxima de φ (o número de ouro), a medida que n se torna cada vez maior.

Demonstração: De fato, segue da Fórmula de Binet, que F_n é aproximadamente igual a $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$, quando n cresce. Assim,

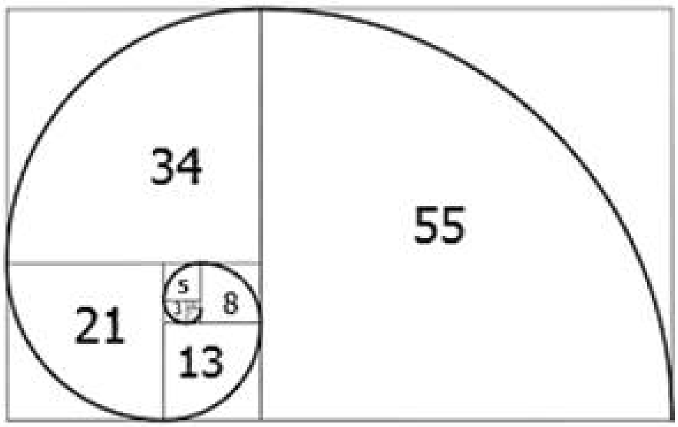
$$\left| F_n - \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \right| = \frac{|1 - \varphi^n|}{\sqrt{5}} \to 0,$$

porque $|1 - \varphi| < 1$. Sabemos muita coisa sobre a sequência de Fibonacci mas ainda há muitas coisas que não sabemos. Por exemplo, sabemos que diversos números de Fibonacci são primos, entre eles estão $2, 3, 5, 13, 89, 233, 1597, 28657, 514229$. Computadores potentes já encontraram números primos de Fibonacci com milhares de dígitos, mas ainda não foi possível concluir se existem ou não infinitos números primos na sequência de Fibonacci.
A seguinte propriedade relaciona a sequência de Fibonacci com a espiral de Fibonacci citada no início do texto.

Propriedade 13. O termos da sequência de Fibonacci possuem uma representação geométrica que forma uma espiral.(A espiral de Fibonacci citada no início deste texto.)

Para visualizar essa representação, construímos um quadrado de lado igual a 1. Em cima dele, colocamos outro quadrado idêntico. Aí, vamos adicionando quadrados cujos lados têm a mesma medida que a soma das medidas dos lados dos dois quadrados anteriores (conforme figura abaixo). Essa é a mesma regra de formação da sequência de Fibonacci. Portanto, os lados dos quadrados são exatamente os números de Fibonacci. Ligando os vértices desses quadrados como vemos a seguir, forma-se uma espiral conhecida como *Espiral de Fibonacci.*

Figura 1.7: Construção da espiral áurea a partir da utilização da sequência de Fibonacci como lados de quadrados

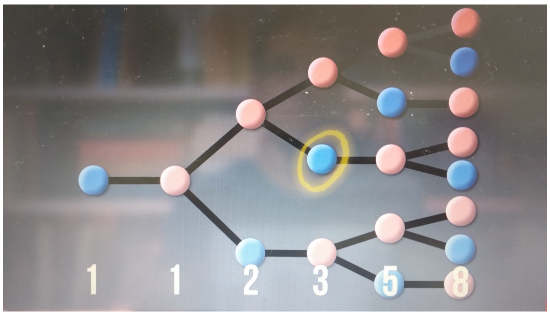


Fonte: Reis, 2019.

Essa espiral ficou muito popular por estar, supostamente, presente na natureza, na arte e na arquitetura conforme comentamos no início desse texto. Usamos o termo "supostamente" porque, em todas as situações citadas, a espiral de Fibonacci aparece de forma aproximada e, agora, apresentamos um contraponto ao ponto de vista apresentado até este momento. Por exemplo, é possível "encaixar" uma espiral de Fibonacci praticamente em qualquer imagem que encontrarmos como, por exemplo, no formato da orelha humana, nas proporcões do rosto da Monalisa, entre outros. Isso nos leva a pensar se, de fato, existe uma obsseção em encontrar este padrão na natureza ou se o padrão está realmente presente. Seja qual for a resposta, podemos exibir um exemplo natural em que, de fato, a sequência de Fibonacci aparece. Vejamos: "Começamos considerando um homem. Esse homem possui um cromossomo X herdado de sua mãe. A pergunta é: quantos antepassados deste homem transmitiram esse cromossomo, a cada geração, até chegar nele?"

Para responder essa questão, observe que, na primeira geração este homem é a origem do seu próprio cromossomo. Portanto, o primeiro termo da sequência é 1. Na segunda geração, a geração dos seus pais, esse cromossomo é herdado de sua mãe mas não do seu pai. Como o cromossomo só aparece em um membro dessa geração, o segundo termo da sequência também é 1. A mãe do homem recebeu o cromossomo X de sua mãe e um cromossomo X de seu pai, o avô materno do homem. Portanto, na terceira geração, temos 2 membros com aquele cromossomo X e o terceiro termo da sequência é 2. Assim, a cada vez que temos um homem, a geração de cima terá uma mulher com o cromossomo X. A cada vez que temos uma mulher, a geração de cima terá tanto um homem quanto uma mulher com o cromossomo X. Portanto como, para cada pessoa numa geração, existe uma mulher na geração de cima, o número de ancestrais com o cromossomo X do nosso homem original numa certa geração, é igual ao número de mulheres com esse cromossomo na geração de cima. Assim, basta entendermos como se comportam as mulheres e o que deduzirmos para elas, vai valer para o total de ancestrais (basta andar uma geração). Sabemos que as mulheres numa geração são as mulheres da geração anterior somadas com os homens e os homens são em mesma quantidade que as mulheres de uma geração abaixo. Portanto, o número de mulheres em uma geração é a soma do número de mulheres das duas gerações anteriores e essa é a mesma relação de Fibonacci. Logo, o número de ancestrais com o cromossomo X é dado exatamente pela sequência de Fibonacci.

Figura 1.8: Número de ancestrais com o cromossomo X de um determinado homem.



Fonte: Tem Ciência.

Será tudo isso apenas uma coincidência ou existe algo por trás de tudo isso? Como disse numa certa vez Albert Einstein, "só existem duas maneiras de se viver: a primeira é pensar que nada é um milagre e a segunda é pensar que tudo é um milagre", deixamos essa reflexão para o leitor.

Questões de Olimpíadas Resolvidas

Exemplo 1.1. (OBMEP- Banco de Questões 2016) A sequência de Fibonacci começa com $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, e, a partir do segundo termo, cada novo termo é obtido somando-se os dois anteriores, ou seja, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para $n \geq 0$. Assim, os primeiros termos da sequência de Fibonacci são $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8$.

1. Verifique que $F_{n+3} < 5F_n$, $\forall n \geq 3$.

Solução: Iniciaremos mostrando que a sequência de Fibonacci é crescente, isto é, $F_{n-1} < F_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 3$. Para isto, usaremos a Segunda Forma do Princípio da Indução Finita.
(i) Se $n = 3$, temos $F_2 = 1 < F_3 = 2$.
(ii) Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$ é verdade que $F_{k-1} < F_k$, para todo $k \leq n$. Assim, temos $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} < F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$, por hipótese de indução.
Como a sequência de Fibonacci é crescente, temos:

$$F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1} =$$

$$2F_{n+1} + F_n = 3F_n + 2F_{n-1} < 3F_n + 2F_n = 5F_n.$$

2. Seja n um inteiro positivo. Mostre que entre potências consecutivas de n existem no máximo n números de Fibonacci.

Solução: Sejam n^k e n^{k+1} as potências consecutivas de n. Supondo que o primeiro número de Fibonacci maior que n^k seja F_q, teremos $F_q, F_{q+1}, F_{q+2}, ..., F_{q+n-1}$, n números de Fibonacci consecutivos, todos maiores que n^k. Logo,

$$F_{q+2} = F_{q+1} + F_q > n^k + n^k = 2n^k$$

$$F_{q+3} = F_{q+2} + F_{q+1} > 2n^k + n^k = 3n^k$$

$$F_{q+4} = F_{q+3} + F_{q+2} > 3n^k + n^k = 4n^k$$

$$...$$

$$F_{q+n-1} > (n-1)n^k$$

$$F_{q+n} > n.n^k = n^{k+1}.$$

Se tivéssemos $n+1$ números de Fibonacci, o número F_{q+n} seria maior que n^{k+1}, logo teremos no máximo n números de Fibonacci entre duas potências consecutivas de n.

Exemplo 1.2. (Clubes de Matemática da OBMEP): Nos seis primeiros termos da sequência de Fibonacci aparecem cinco dos dez algarismos: $1, 2, 3, 5$ e 8 e, na medida que outros termos forem sendo definidos, todos os demais algarismos aparecerão. Qual dentre os algarismos $\{0, 4, 6, 7, 9\}$ será o último a aparecer como unidade de um termo da sequência de Fibonacci?

Solução: Para responder a essa questão, poderíamos calcular, simplesmente, os termos da sequência de Fibonacci até encontrar o último algarismo a aparecer na casa das unidades: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610,$ $987, 1597, 2854, 4181, 7035, 11216$. Assim concluiríamos que o último alagarismo a aparecer seria o 6. Por outro lado, faríamos contas mais simples, se trabalhássemos, diretamente, com as unidades dos termos da sequência de Fibonacci. Lembre-se de que cada termo dessa sequência, a partir do terceiro, é obtido somando-se os dois termos imediatamente anteriores a ele. Assim, o algarismo da unidade de um termo da sequência de Fibonacci, a partir do terceiro, é o algarismo da unidade da soma das respectivas unidades dos dois termos imediatamente anteriores ao termo em questão. Então, a sequência dos algarismos da casa da unidade de cada termo de Fibonacci é $1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, 7, 4, 1, 5, 6, \ldots$ já que $1 + 1 = 2$ e, portanto, o algarismo da unidade do terceiro termo da sequência de Fibonacci é 2, $1+2 = 3$. O algarismo da unidade do quarto termo da sequência de Fibonacci é 3, $2 + 3 = 5$ e, assim, o algarismo da unidade do quinto termo da sequência de Fibonacci é 5 e assim, sucessivamente, encontramos os algarismos das unidades de todos os termos até o vigésimo termo da sequência, que é 6. De qualquer forma, 6 é a resposta do problema proposto.

Exemplo 1.3. (III Olimpíada Brasileira de Matemática dos Institutos Federais - 2020) O número de ouro, representado pela letra φ, é um número irracional, muito estudado por alguns matemáticos e considerado, por algumas pessoas, como o número que aparece nas coisas mais belas da natureza. Também chamado de razão áurea ou de proporção divina, seu valor pode ser encontrado calculando-se a raiz positiva da equação quadrática $x^2 - x - 1 = 0$. O valor de φ^6, em função de φ, é:

1. $\varphi + 2$
2. $4\varphi + 2$
3. $6\varphi + 6$
4. $8\varphi + 5$
5. $12\varphi + 23$

Solução: Como φ é raiz positiva da equação quadrática fornecida, então $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ e, então, $\varphi^2 = \varphi + 1$. Elevando os dois membros desa última igualdade ao quadrado, temos:

$$\varphi^4 = \varphi^2 + 2\varphi + 1 = (\varphi + 1) + 2\varphi + 1 = 3\varphi + 2.$$

Multiplicando os dois membros desta última igualdade por φ^2 , obtemos $\varphi^6 = 8\varphi + 5$.

Exemplo 1.4. (Clubes de Matemática da OBMEP) Construção da Espiral Áurea, a partir da justaposição de quadrados.
Utilizando papel sulfite, construir sete quadrados de modo que as medidas dos lados correspondam aos sete primeiros números da sequência de Fibonacci. Ordene os quadrados construídos em ordem crescente dos tamanhos dos lados da seguinte maneira:

1. Coloque o quadrado cujo comprimento do lado é o segundo número da sequência de Fibonacci acima do primeiro;
2. Coloque o quadrado cujo comprimento do lado é o terceiro número da sequência de Fibonacci à direita dos anteriores;
3. Coloque o quadrado cujo comprimento do lado é o quarto número da sequência de Fibonacci abaixo dos anteriores;
4. Coloque o quadrado cujo comprimento do lado é o quinto número da sequência de Fibonacci à esquerda dos anteriores;
5. Coloque o quadrado cujo comprimento do lado é o sexto número da sequência de Fibonacci acima dos anteriores;
6. Coloque o quadrado cujo comprimento do lado é o sétimo número da sequência de Fibonacci à direita dos anteriores.

A construção deve ser feita dando a ideia de movimento em espiral, de acordo com a *Figura 7*. Terminada a construção coloca-se a ponta seca do compasso no vértice do lado direito comum aos dois quadrados menores, traçando um quarto de círculo em cada um desses quadrados. Dando continuidade, traçar um quarto de círculo nos demais quadrados para formar a Espiral Áurea.

Problemas Propostos

Problema 1.1. (Olimpíada Brasileira de Matemática - Nível 3 - 2003)
Na sequência de Fibonacci

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots\}$$

cada termo, a partir do terceiro, é igual a soma dos dois termos anteriores. Quanto vale a soma infinita

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\frac{5}{32}+\frac{8}{64}+\frac{13}{128}+\frac{21}{256}+\frac{34}{516}+\ldots$$

onde o n-ésimo termo é o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci dividido por 2^n?

Problema 1.2. Represente os números $50, 75, 100$ e 125 como soma de números de Fibonacci.

Problema 1.3. Mostre que a soma $F_n^2 + F_{n+1}^2$ é sempre um número de Fibonacci.

Problema 1.4. Mostre que $F_1F_2 + F_2F_3 + \ldots + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2$. Sugestão: Use o Princípio da Indução Finita. (vide [21])

Problema 1.5. (Clubes de matemática da OBMEP- Probleminha: A sequência de Fibonacci) Considerando que F_n é o termo de ordem n na sequência de Fibonacci:

1. Calcule F_9, F_{10}, F_{11} e F_{12}.
2. F_{2019} é par ou ímpar? Justifique.

Referências

[1] https://youtu.be/BQJdDZ9avFk?si=8yB5HAxqAzRd8_7f. Acesso em 13/10/2024.

[2] https://www.ebiografia.com/leonardo_fibonacci/. Acesso em 19/02/2025.

[3] https://www.matematica.br/historia/fibonacci.html. Acesso em 19/02/2025.

[4] https://youtu.be/6YIOTd2IKYs?si=9IHvC2ItkzKXOMB. Acesso em 19/06/2024.

[5] SPARROW, G., *50 ideias de Astronomia que você precisa conhecer.* São Paulo: Planeta, 2018.

[6] MENDES, F. M. P., *A Matemática na natureza* Dissertação (Mestrado) - Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, 2007. Disponível em: http://repositorio.utad.pt/bitstream-/10348/74/1/msc_fmpmendes.pdf. Acesso em: 17/02/2025.

[7] https://br.neurochispas.com/algebra/propriedades-do-triangulo-de-pascal/. Acesso em 17 fev. 2025.

[8] *Tem Ciência.* Disponível em https://youtu.be/YG_iQ8oigaw?si=xImOqT_eQKkYUIiL. Acesso em 17/02/2025.

[9] https://olimpiada.mat.ufrn.br/wp-content/uploads/2013/08/nota_aula_03.pdf. Acesso em 19/02/2025.

[10] *Propriedades e Generalizações dos números de Fibonaci* Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/-tede/7658/2/arquivototal.pdf. Acesso em: 17 fev. 2025.

[11] FREITAS, F. M. DE., *A proporção áurea e curiosidades históricas ligadas ao desenvolvimento da ciência.* Florianópolis: UFSC, 2008. Disponível em: http://www.africamae.com.br/wp-ontent/pdf/aurea.pdf. Acesso em: 17 fev. 2025.

[12] STEWART, IAN, *O fantástico mundo dos números: a Matemática do zero ao infinito.* Rio de Janeiro: Zahar, 2016.

[13] MARTINS, , TATIARA NAZARÉ COSTA; ET AL, *A sequência de Fibonacci e aplicações.* Revista Educação Pública, Rio de Janeiro, v. 24, nº 33, 10 de setembro de 2024. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/-24/33/a-sequencia-de-fibonacci-e-aplicacoes. Rio de Janeiro: Zahar, 2016. Acesso em 17/02/25.

[14] https://webpages.ciencias.ulisboa.pt-/~ommartins/seminario/fibonacci/cap3_3.htm. Acesso em 17 fev.2024.

[15] https://youtu.be/iLfb_gAIYvI?si=xtgTbDGdCeWOxb-D. Acesso em 20/02/2025.

[16] https://youtu.be/v4a-2JNr-YE?si=EW853L1TQMHp8lvb. Acesso em 20/02/2025.

[17] ABRAMO HEFEZ, *Iniciação Científica. OBMEP, 2006.*

[18] http://clubes.obmep.org.br/blog/atividade-a-razao-aurea-uma-construcao-da-espiral-aurea/. Acesso em 03/11/2024.

[19] http://www.ematematicaoxente.com.br/e-matematica-oxente-numero-9/. Acesso em 03/11/2024.

[20] http://www.ematematicaoxente.com.br/e-matematica-oxente-numero-10/. Acesso em 03/11/2024.

[21] http://www.ematematicaoxente.com.br/e-matematica-oxente-numero-20/. Acesso em 24/11/2024.

2. Curiosidades

Uma sequência pouco conhecida, mas bem poderosa!

Christiana Granja do Nascimento[1]
Thamires Santos Cruz [2]

Figura 2.1: Édouard Lucas

Fonte: Google Imagens

Quem aqui já não deve ter ouvido falar ou teve um breve contato com a famosa Sequência de Fibonacci? Pois bem, tal sequência teve sua origem a partir do Problema dos Coelhos [2], escrito no livro Liber Abbaci, ao qual ao adotar como valores iniciais $F_1 = F_2 = 1$, o termo conseguinte é obtido por intermédio da soma dos dois anteriores e, assim, sucessivamente. Em conexão com a sequência de Fibonacci, temos a sequência de Lucas[3], que trata-se de uma variação da sequência de Fibonacci, isto é, ela obedece a mesma relação de recorrência, entretanto Édouard Lucas decidiu tomar como seus valores iniciais $L_1 = 1$ e $L_2 = 3$.

E o que tem de "especial" nessa sequência de Lucas que não tem na de Fibonacci? Os números de Lucas possuem alguns resultados, os quais podem ser vistos em [3], como a Fórmula de Binet[4] e a Identidade de Cassini[5], sendo em parte relativamente mais simples do que os resultados para os números de Fibonacci (ver tabela comparativa a seguir), podendo então ocorrer uma melhor aplicabilidade de tal sequência no ensino básico, por exemplo. Sem falar ainda, que ambas as sequências possuem relações e identidades que as conectam, podendo uma ser escrita em função da outra, o que torna ainda mais interessante o trabalho e manejo de ambas em conjunto.

Sejam $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Então, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

Fórmula de Binet	Identidade de Cassini
$L_n = \alpha^n + \beta^n$ $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$	$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = -5(-1)^n$ $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$
Relações envolvendo F_n e L_n	
$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ $5F_n = L_{n+1} + L_{n-1}$ $L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$	

Além disso, você sabia que em ambas as sequên-

[1]Licencianda do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

[2]Profª Drª do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

[3]François Édouard Anatole Lucas (1842–1891) foi um matemático francês conhecido por seus trabalhos sobre teoria dos números e sequências recorrentes. Ele estudou extensivamente a sequência de Fibonacci e formulou o teste de primalidade de Lucas, além de introduzir os números de Lucas, uma variação da sequência de Fibonacci.

[4]Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856) foi um matemático, físico e astrônomo francês, conhecido por suas contribuições à álgebra e à teoria das matrizes. A identidade de Binet fornece uma expressão fechada para os números de Fibonacci.

[5]Giovanni Domenico Cassini (1625–1712) foi um astrônomo e matemático italiano, conhecido por suas observações planetárias e pela identidade de Cassini, uma propriedade notável da sequência de Fibonacci.

cias temos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{L_{n+1}}{L_n}=\alpha=1,6180...?$$

Isso mesmo! Como você pode notar o limite da razão dos termos sucessivos das duas sequências converge para o conhecido Número de Ouro. Este resultado também está conectado a geração da Espiral de Fibonacci, sendo ela presente em diversos elementos da natureza, arquitetura e até mesmo do corpo humano, o que causa até os dias atuais muitos questionamentos e curiosidades a despeito de seria este um "formato divino" ?

Por fim, mas não menos importante, é válido mencionar que por meio das relações entre os números de Lucas e de Fibonacci, é possível perceber uma relação com algumas identidades trigonométricas conhecidas, nas quais, a menos das constantes, os números de Lucas se relacionam com o cosseno e os números de Fibonacci com o seno, conforme pode ser visto na tabela a seguir.

Fórmula Trigonométrica	Relação com F_n e L_n
$\operatorname{sen}(2a)=2\operatorname{sen}(a)\cos(a)$	$F_{2n}=F_nL_n$
$\cos(2a)=\cos^2(a)-\operatorname{sen}^2(a)$	$L_{2n}=\frac{1}{2}(L_n^2+5F_n^2)$
$=2\cos^2(a)-1$	$=L_n^2-2(-1)^n$
$=1-2\operatorname{sen}^2(a)$	$=2(-1)^n+5F_n^2$
$\operatorname{sen}(-a)=-\operatorname{sen}(a)$	$F_{-n}=-(-1)^nF_n$
$\cos(-a)=\cos(a)$	$L_{-n}=(-1)^nL_n$

Esta é mais uma intrigante aplicabilidade de tais sequências em conjunto, cujas respectivas demonstrações podem ser encontradas em [1].

Referências

[1] METZLER, D., Fibonacci numbers and complex trigonometry, (parts 1-9), 2015. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=u_GICi_XK-0. Acesso em: 07 de março de 2023.

[2] SANTOS, H.P.S., ARAÚJO, Y. L. R. Recorrências Lineares. Jornal É Matemática, Oxente!, ed. 23, pág 4. Disponível em: https://ematematicaoxente.com.br/e-matematica-oxente-numero-23/. Acesso em 08/09/2023.

[3] SILVA, B. A., Números de Fibonacci e números de Lucas, Dissertação de Mestrado, Instituto de Ciências Matemáticas e Computação-ICMC, USP, 2017.

3. Indicação

Racha Cuca

Allana Mylena Gomes de Amorim[6]

Desde minha adolescência, me recordo de um site que acessava para me divertir e passar o tempo. Este é o Racha Cuca [1]. Criado em 2006, e mantido por Tiago Serafim e Vinicius Serafim, ambos bacharéis em Ciência da Computação pela Unicamp, conta com diversas seções principais, com jogos, passatempos, desafios, e até uma área com conteúdos educacionais.

Foi neste site que conheci os desafios lógicos, onde me desafiava a ver em quanto tempo eu conseguiria solucionar as diversas opções oferecidas pelo site, que eram organizados em níveis crescente de dificuldade. Mais especificamente, foi a partir dele que propus a seção "Curiosidades", da edição de número 29, intitulada "O Enigma de Einstein", deste jornal. [2]

O Racha Cuca é um site com uma interface fácil de entender, na página inicial são apresentados diversos jogos e desafios que podem ser acessados a um click. Além disso, acessando o menu na barra superior as demais seções são apresentadas. Dentre as quais, podemos citar *Lógica*, que conta com diversos problemas similares ao "Teste de Einstein", que vão do nível muito fácil ao muito difícil, o jogo sudoku e um jogo chamado "quase nada"; *Palavras*, contendo jogos de palavras como anagramas, caça palavra, criptogramas, entre outros, e desafios diários; *Raciocínio*, dispondo de jogos como 2048, quebra-cabeça, tangram, entre outros; *Paciência*, com jogos como Paciência Spider e variações.

Em seguida, apresenta uma seção de *Jogos online*, seguida da seção *Passatempos*, com jogos como

[6]Discente da Licenciatura em Matemática da UFRPE

dominó, jogo da memória, mahjong entre outros. Além das seções já citadas anteriormente, destacamos ainda as seções de *Trivias*, *Quiz* e *Educação*, que traz conteúdos de Ensino Médio das disciplinas de Biologia, Física, Geografia, História, Inglês, Química, Matemática e Português.

Como podemos perceber, o Racha Cuca é um site bem completo, que conta com diversas opções para aprender se divertindo, exercitando o raciocínio lógico. Sendo assim, é uma boa recomendação para alunos dos ensinos fundamental e médio, para aperfeiçoar a interpretação de textos e o raciocínio lógico, contribuindo também para o engajamento em desafios, e interação em grupos. Você pode acessá-lo pelo link: https://rachacuca.com.br . Divirtam-se!

Referências

[1] RACHACUCA. Rachacuca, 2006. Página inicial. Disponível em: https://rachacuca.com.br. Acesso em: 10, ago. de 2024.

[2] **É Matemática, Oxente!: O Jornal de Matemática Olímpica**. Disponível em: https://ematematicaoxente.com.br. Acesso em: 10, ago. de 2024.

4. Quem pergunta, quer saber!

Revista do Professor de Matemática (RPM, nº 28, p.59)

Severino Barros de Melo[7]

George Polya no livro A Arte de Resolver Problemas afirma que Isaac Newton em sua obra Arithmetica Universalis compara o ato de equacionar como se fosse traduzir de uma língua para outra; no caso do Inglês para a Matemática. Depois dessa "tradução" precisamos chegar à resolução, e, muitas vezes, se faz necessário lançar mão de alguns artifícios algébricos para a resolução de um problema. É o caso da pergunta em forma de problema, feita por um professor da cidade de Valença (RJ), à Revista do Professor de Matemática (RPM) (nº 28, p.59).

Pergunta: A população de Itapira era um quadrado perfeito. Depois, com um aumento de 100 habitantes, a população passou a ser uma unidade maior do que um quadrado perfeito. Depois, com outro aumento de 100 habitantes, a população voltou a ser um quadrado perfeito. Qual era a população original?

Resposta da RPM: Observe que o conjunto universo de problema é o conjunto dos números naturais não nulos, $\mathbb{N}^*$.

Se chamarmos de P a população original, as condições do problema podem ser descritas algebricamente por

$$\begin{cases} P = x^2,\ x \in \mathbb{N}^* & (1) \\ P + 100 = y^2 + 1,\ y \in \mathbb{N}^* & (2) \\ P + 200 = z^2,\ z \in \mathbb{N}^* & (3) \end{cases}$$

De (2) e (3), temos

$$z^2 - y^2 = 101 \text{ ou } (z+y)(z-y) = 101.$$

Como $z + y \in \mathbb{N}^*$ e $z - y \in \mathbb{N}^*$, e 101 é um número primo, temos:

$$z + y = 101 \text{ e } z - y = 1. \text{ Portanto, } z = 51 \text{ e } y = 50.$$

Donde concluímos que $P = 2401 = 49^2$, estando também satisfeita a equação (1).

5. Eventos

Fiquem Ligados!!!

- **XVI Seminário Nacional de História da Matemática - SNHM**
  - Local: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-Rio-Grandense - Pelotas - Rio Grande do Sul
  - Data: 13 a 16 de abril de 2025
  - Mais informações: https://eventos.ifsul.edu.br/snhm2025?even3_orig=online_category/

[7]Docente do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco

- **The Fourth International Conference on Creative Insubordination in Mathematics Education – ICOCIME 4**
  - Local: Universidade Estadual Paulista (UNESP) - Guaratinguetá - SP
  - Data: 23 a 26 de Abril de 2025
  - Mais informações: https://www.even3.com.br/icocime4/
- **XIV ENCONTRO PARAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA-EPAEM**
  - Local: Universidade do Estado do Pará (UEPA) - Belém - PA
  - Data: 06 a 08 de Maio 2025
  - Mais informações: https://www.even3.com.br/xiv_epaem?even3_orig=online_category/
- **I Encontro Nacional de Professores da Educação Básica que participam de Feiras Científicas**
  - Local: Instituto Federal Catarinense (IFC) - Rio do Sul - SC
  - Data: 19 e 20 de Maio de 2025
  - Mais informações: https://centraldeeventos.ifc.edu.br/i-encontro-de-professores-da-educacao-basica-que-participam-de-feiras-cientificas-a-escrita-de-praticas-i-epfec-509509/
- **II Simpósio Brasileiro de Educação Matemática com Pessoas Jovens, Adultas e Idosas - Novos Desafios em Tempos de Reconstrução Democrática**
  - Local: Escola de Formação Paulo Freire - Rio de Janeiro - RJ
  - Data: 23 e 24 de Maio de 2025
  - Mais informações: https://www.even3.com.br/ii-simposio-brasileiro-de-educacao-matematica-com-pessoas-jovens-adultas-e-idosas-novos-desafios-em-tempos-de-reconstrucao-democratica-521699?even3_orig=online_category/

6. Soluções de Olimpíadas

OPEMAT 2023 - Nível 2

Nesta edição apresentaremos a resolução das questões discursivas e de verdadeiro ou falso da prova da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2023 referentes ao nível 2.

Problema 6.1. Deseja-se construir um tanque para armazenar combustível, com formato de paralelepípedo retangular reto, com largura L, comprimento C e profundidade P. No projeto foi estabelecido que a soma $P + L + C$ deve ser igual a 113 metros e a profundidade P deve ser no mínimo 57 metros. Qual é o maior valor possível para o volume, em metros cúbicos, deste tanque de combustível?

Solução. Como 57 é maior que a metade de 113 temos que $P - 57 \geq 0$ e $C - 57 \leq 0$. Logo

$$(P - 57)(C - 57) \leq 0.$$

Desenvolvendo esse produto, temos que

$$PC \leq 57(P + C - 57).$$

Multiplicando a inequação acima por L, segue que

$$LPC \leq 57L(P + C - 57).$$

Utilizando a desigualdade MA-MG, obtemos

$$\begin{aligned} LPC &\leq 57L(P + C - 57) \\ &\leq 57\frac{(L + P + C - 57)^2}{4} \\ &= 57 \cdot 28^2. \end{aligned}$$

Precisamos mostrar que a cota é atingida. Para simplificar vamos procurar valores inteiros para P, L e C que atingem a cota.

Tem-se: $LPC \leq 57 \cdot 28^2$. Isto, junto com $P \geq 57$ e $2 \cdot 57 = 154 \geq 113 = P + L + C$, fornece $P = 57$. Assim, $L + C = 56$ e $LC \leq 28^2$. Na verdade, $LC = 28^2$, pois pela desigualdade MA-MG, temos

$$28 = \frac{L + C}{2} \leq \sqrt{LC} \leq 28$$

Agora, pode-se justificar $L = C = 28$ em dois passos:

1) Usando o TFA, na decomposição por primos de $LC = 2^4 \cdot 7^2$, uma solução é $L = C = 28$. Qualquer outra solução não fornece $L + C = 56$

2) Tem-se: $28^2 = LC = L(56 - L) = 56L - L^2 \Rightarrow L^2 - 2 \cdot 28L + 28^2 = 0 \Rightarrow L = 28$ e $C = 28$.

Desse modo, o maior volume do tanque ocorre quando $P = 57$, $L = 28$ e $C = 28$, o que nos dá $V = 44688\ m^3$.

□

Problema 6.2. Alan tem uma mania esquisita de formar sequências de números naturais. Para formar uma sequência, ele começa escolhendo o primeiro termo e o termo seguinte é obtido somando-se os dígitos do termo anterior. Por exemplo:

$$967988 \to 47 \to 11 \to 2$$

(A) Mostre que, não importa de qual número Alan comece, sua mania sempre o leva à um número de apenas um dígito.

(B) Encontre a quantidade de números entre 1 e 1.000.000 que chegam no número 1.

Solução. (A) Sejam x um número natural com $n + 1$ dígitos ($n \geq 2$) e S a soma dos dígitos de x, isto é,

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

e

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} x &= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 \\ &+ a_0 \\ &> 9 + 9 + 9 + 9 + ... + 9 \\ &\geq a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n = S. \end{aligned}$$

Portanto, $x > S$, o que mostra que cada passo o número sempre decresce. Logo, em algum momento será um número de um dígito.

(B) O critério de divisibilidade por 3 diz que se um número é divisível por 3 a soma dos seus dígitos também é, o mesmo critério também é verdade na divisão por 9. Uma versão ainda mais completa desses critérios diz mais do que isso: um número e a soma dos seus dígitos deixam o mesmo resto na divisão por 3 ou por 9. Uma prova rápida desse fato:

$$\begin{aligned} x - S &= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \\ &\cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \\ &- (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) \\ &= a_n \cdot (10^n - 1) \\ &+ a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + \\ &\cdots + a_1 \cdot (10 - 1) \end{aligned}$$

Como $9 \mid 10^n - 1$ para todo n natural, então $9 \mid x - S$ qualquer que seja o número x e sua soma dos dígitos S.

Usando esse fato, descobrimos que os números que chegam no 1 são exatamente os que deixam resto 1 na divisão por 9. Então para descobrir quantos números chegam no 1, precisamos descobrir quantos números entre 1 e 1000000 deixam resto 1 na divisão por 9. A quantidade é igual a

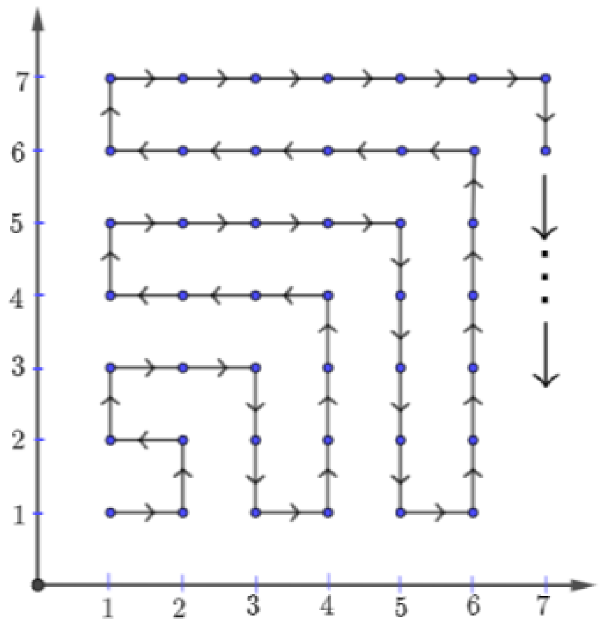
$$\frac{999999}{9} + 1 = 111112.$$

□

Problema 6.3. Vamos estabelecer uma sequência de pares ordenados da forma (n, m) onde n e m são números naturais. Esta sequência é construída marcando no primeiro quadrante do plano cartesiano os pontos da forma (n, m) onde $n, m \in \mathbb{N}$ (aqui vamos considerar que o "zero"não é um número natural). A sequência é construída "seguindo a seta"conforme a figura abaixo. Vamos indicar por P_n o n-ésimo ponto dessa sequência. Iniciamos esta sequência definindo $P_1 = (1, 1)$ e seguindo a seta conforme a figura abaixo, teremos:

$$\begin{aligned} P_2 &= (2,1), \quad P_3 = (2,2), \quad P_4 = (1,2), \\ P_5 &= (1,3), \quad P_6 = (2,3), \ \cdots \end{aligned}$$

e assim sucessivamente.



Responda os itens abaixo, considerando a sequência estabelecida:

(A) Determine P_7 a P_{12}.

(B) Determine os números naturais n e m tais que $P_n = (6,6)$ e $P_m = (100,100)$.

(C) Determine P_{2023}.

Solução. (a) Usando a definição da contagem, teremos:

$$\begin{aligned} P_7 &= (3,3),\ P_8 = (3,2),\ P_9 = (3,1), \\ P_{10} &= (4,1),\ P_{11} = (4,2),\ P_{12} = (4,3). \end{aligned}$$

(b) No quadrado $[0,6]\times[0,6]$ temos 6^2 pontos, sendo $P_{6^2} = (1,6)$ o último desses pontos segundo a contagem. Retrocedendo, segundo a seta, 5 lugares desses 6^2 pontos, obteremos $P_{6^2-5} = (6,6)$. Logo, o valor de n que satisfaz $P_n = (6,6)$, é $n = 6^2 - 5 = 31$.

O que acontece no quadrado $[0,6]\times[0,6]$ é um padrão para esta contagem, pois no quadrado $[0,2]\times[0,2]$ temos 4 pontos com $P_4 = P_{2^2} = (1,2)$ e $P_{2^2-1} = (2,2)$. No quadrado $[0,3]\times[0,3]$ temos 9 pontos com $P_9 = P_{3^2} = (3,1)$ e $P_{3^2-2} = (3,3)$. Portanto, em geral teremos $P_{n^2-(n-1)} = (n,n)$. Assim, o valor de n que satisfaz $P_n = (100,100)$ é $n = 100^2 - 99 = 9901$.

(c) Note que $2023 < 45^2 = 2025$. Logo, o ponto corresponde a P_{2023} está dentro do quadrado $[0,45]\times[0,45]$. Pela definição da contagem, temos $P_{2^2} = (1,2)$, $P_{3^2} = (3,1)$, $P_{4^2} = (1,4)$. Deduzimos aqui outro padrão para a contagem:

$$\begin{aligned} \text{se } n \text{ é par, } P_{n^2} &= (1,n) \\ \text{e se } n \text{ é ímpar, } P_{n^2} &= (n,1). \end{aligned}$$

Sendo $n = 45$ ímpar e $2023 = 45^2 - 2$, teremos $P_{45^2} = (45,1)$ e, contando dois lugares a menos "seguindo a seta", $P_{2023} = (45,3)$.

□

Problema 6.4. João e Pedro entram numa sala de aula e encontram o número 111 escrito na lousa. Então, eles decidem jogar um jogo onde cada um deles escreve, um após o outro, um número natural na lousa partindo do número 111 que já está escrito, de acordo com as seguintes regras: deve começar com o dígito que o anterior terminou, deve ser maior que o anterior, e deve ser menor que 1000.

Perde o jogo quem jogar um número depois do qual não é possível prosseguir.

Exemplo: Se num jogo os números jogados são 113 e 333, 356 e 672, então o segundo jogador perde o jogo, pois, não existe número menor que 1000 e maior que 672 que comece em 2.

Mostre que existe uma estratégia em que o primeiro jogador sempre vença.

Solução. Algumas informações que norteiam as jogadas:

1. O jogador que jogar 999 perde, uma vez que esse número encerra o jogo. Assim, uma estratégia seria forçar o outro jogador a jogar tal número;

2. Quem jogar 989 ganha, pois, o outro jogador teria que jogar um número de 3 dígitos que comece em 9 e que seja maior do que 989, ou seja, um dos números 990, 991, 992, 993,994, 995, 997,998 ou 999. Note que em qualquer um desses caso ele perde.

3. Se um jogador jogar um número que termine em 9, a não ser que o número seja 989, ele perde. Isso porque, nesse caso, ou ele encerra o jogo ou o outro pode jogar 989.

Portanto a estratégia para que o primeiro jogador vença é:

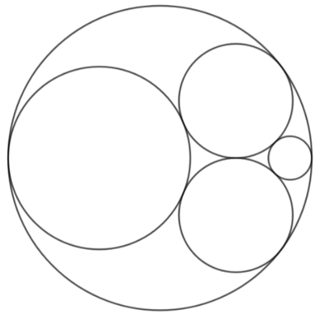
- O primeiro jogador começa jogando 191;
- Se o segundo jogador jogar um número que não termine em 9, então o primeiro jogador pode jogar um número da forma $n9n$ com $n > 1$. Do contrário ele joga 989.

De fato, essa estratégia leva a vitória, uma vez que se o número escrito no quadro é da forma $n9n$, o próximo tem que ser da forma $n9(n+i)$, onde $i > 0$. Desse modo, o primeiro jogador pode sempre jogar da forma descrita na estratégia e o segundo vai ter que jogar em algum momento um número que termine em 9 perdendo assim o jogo.

$\square$

Problema 6.5. Chico aprendeu com seu pai Renato, que a curvatura de uma circunferência é definida por $K = \frac{1}{R}$, onde R é o raio da circunferência e que por este motivo, não se percebe a curvatura da terra olhando para o horizonte em uma praia, pois seu raio é de aproximadamente 6371 km. Após uma aula sobre grandezas e medidas, Chico resolveu criar a unidade de medida "Pm" a partir da medida do pé de sua mãe Taciana. Esta pediu a Chico para pegar um par de argolas em seu porta joias que possui o formato de cilindro reto de base circular. Ao retirar a tampa do porta joias, Chico percebeu que em seu fundo tinha uma argola em formato de circunferência com raio $\frac{1}{5}Pm$, um par de argolas também em formato de circunferência com raio $\frac{1}{8}Pm$ e um anel, de forma que as argolas de raio $\frac{1}{8}Pm$ eram tangentes entre si e tangentes a argola de raio $\frac{1}{5}Pm$, o anel era tangente as duas argolas menores e a parede lateral do porta joias era tangente a todas as argolas e ao anel. Considerando que todas as argolas e o anel estão apoiados no mesmo plano, Chico então percebeu que apenas com estas informações, era possível determinar a curvatura da circunferência da base do cilindro e a curvatura do anel. Quais os valores encontrados por Chico?

Solução. A situação é representada pela figura abaixo.



Seja C_M a circunferência maior que define a base do porta joias, R seu raio e P o seu centro. Seja C_5 a circunferência que define a argola de raio $\frac{1}{5}$ com centro A, C_8^1 a circunferência localizada acima da reta AP com centro B, C_8^2 a circunferência localizada abaixo da reta AP e T o ponto de tangência entre C_8^1 e C_8^2. Agora observe que o triangulo PBT é retângulo. Logo, $PB = R - \frac{1}{8}$ e $BT = \frac{1}{8}$. Assim, pelo teorema de Pitágoras,

$$PT = \sqrt{\left(R - \frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R}{4}}.$$

Agora observe que o triangulo ABT também é retângulo. Logo como $AB = \frac{1}{5} + \frac{1}{8}$, $AT = AP + PT = R - \frac{1}{5} + \sqrt{R^2 - \frac{R}{4}}$ e $BT = \frac{1}{8}$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8}\right)^2 &= \left(\frac{1}{8}\right)^2 \\
&+ \left(R - \frac{1}{5} + \sqrt{R^2 - \frac{R}{4}}\right)^2 \\
&\Longrightarrow \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right) \\
&= \left(R - \frac{1}{5} + \sqrt{R^2 - \frac{R}{4}}\right)^2
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{9}{100} &= \left(R - \frac{1}{5} + \sqrt{R^2 - \frac{R}{4}}\right)^2 \Longrightarrow \\
\frac{3}{10} &= \left(R - \frac{1}{5} + \sqrt{R^2 - \frac{R}{4}}\right) \Longrightarrow \\
\frac{1}{2} - R &= \sqrt{R^2 - \frac{R}{4}} \Longrightarrow \\
\frac{1}{4} - R &= -\frac{R}{4} \Longrightarrow \\
R &= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

e consequentemente

$$PT=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{4}}=\sqrt{\frac{1}{36}}=\frac{1}{6}.$$

Agora seja C_m a circunferência que define o anel, G o seu centro e r o seu raio. Observe que o triângulo BTG também é retângulo, $BG=\frac{1}{8}+r$, $BT=\frac{1}{8}$ e $TG=\frac{1}{6}-r$, pois, $R=\frac{1}{3}$, $PT=\frac{1}{6}$ e $PT+TG+r=R$. Assim, novamente pelo teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{8}+r\right)^2 &= \left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{6}-r\right)^2\\ &\Longrightarrow \frac{r}{4}+\frac{r}{3}=\frac{1}{36}\\ &\Longrightarrow r=\frac{1}{21}.\end{aligned}$$

Desta forma, a curvatura de C_M é $k_M=3$ e a curvatura de C_m é $k_m=21$

□

7. Problemas

Convidamos o leitor a responder alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Enviem as soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, o envio do arquivo (.tex), no modelo disponível no site, deve ser realizado até **30/05/2025**.

Problema 1 (OBMEP - 2018)**.** Qual é o maior valor possível para o máximo divisor comum de dois números naturais cujo produto é 6000?

a) 10
b) 20
c) 30
d) 40
e) 60

Problema 2 (OMAPE-2024)**.** Determine todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfazem a equação funcional:

$$4f(x)f(y)=6f(x+y)+9xy.$$

Problema 3. (XXXVIII Olimpíada Cearense de Matemática) Seja ABC um triângulo equilátero com lados de comprimento igual a 3 e seja D o ponto sobre o lado BC tal que o comprimento do segmento CD vale 1. Sejam M o ponto médio do segmento AD e Γ o círculo de centro M e tangente ao segmento AC. Se E é o ponto sobre o segmento AB tal que DE tangencia Γ, calcule o comprimento de BE. Justifique sua resposta.

8. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n. 32, setembro de 2024**.

Problema 1. (Olimpíada Titãs da Matemática, 2023) Sejam $n,p,q\in\mathbb{N}$ com p e q primos. Quantas soluções tem a equação

$$n=\sqrt{4pq+1}\ ?$$

(a) 0
(b) 2
(c) 5
(d) 10
(e) ∞

Solução. [8] Vamos separar a demonstração em dois casos.

Caso 1: n é par.

Neste caso, podemos escrevê-lo da forma $n=2k$, com $k\in\mathbb{N}$.

Fazendo a substituição na equação $2k=\sqrt{4pq+1}$ e elevando ao quadrado, temos

$$4k^2=4pq+1\Leftrightarrow 4k^2-4pq=1,$$

chegando num absurdo, pois o lado esquerdo da equação acima é múltiplo de 4 e ao lado direito temos 1. Isso implicaria que $4\mid 1$ nos naturais.

Caso 2: n é ímpar.

Por hipótese, podemos escrevê-lo como $n=2k+1$, com $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Substituindo novamente na equação original:

$$2k+1=\sqrt{4pq+1}\Rightarrow 4k^2+4k+1=4pq+1.$$

Assim, podemos eliminar o 1 e dividir a equação por 4,

[8] As soluções dos problemas 1 e 3 foram enviadas pelo leitor Amaro J. O. Filho. Agradecemos pela interação, mas por questão de completeza optamos por apresentar a solução do Comitê Editorial.

obtendo:

$$k^2 + k = pq \Leftrightarrow k(k+1) = pq. \qquad (2)$$

Para continuar com a demonstração, precisamos utilizar um resultado de aritmética chamado Lema de Gauss:

Lema 8.1. *Sejam $a, b, p \in \mathbb{N}$, com p primo. Se $p \mid a \cdot b$ então $p \mid a$ ou $p \mid b$.*

Da equação (2) e do lema de Gauss temos que $p \mid k$ ou $p \mid k+1$.
Subcaso 1: $p \mid k$.

Da definição de divisão, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $k = p \cdot l$. Substituindo em (2):

$$pl(pl+1) = pq \Rightarrow l \cdot (pl+1) = q. \qquad (3)$$

Como q também é um primo, a única maneira de um primo ser escrito como produto de dois naturais é quando um deles é 1.

Vemos da equação (3) acima que podemos ter $l = 1$ e assim $p + 1 = q$, cuja única forma de dois primos ter como diferença 1, é se $q = 3$ e $p = 2$. Encontrando assim a primeira solução.

Se $pl + 1 = 1$, teríamos $l = 0$, o que implicaria em $q = 0$, gerando um absurdo.
Subcaso 2: $p \mid k+1$.

Logo, existe um $l \in \mathbb{N}$ tal que

$$k + 1 = pl \Leftrightarrow k = pl - 1.$$

Substituindo na equação (2) e fazendo as mesma simplificações do subcaso anterior, chegamos a

$$l \cdot (pl - 1) = q,$$

o que nos dá segunda solução, $q = 2$ e $p = 3$.

Portanto temos duas soluções e a resposta correta é o item (b). □

Problema 2 (XXXVII Olimpíada de Matemática da UNICAMP - 2021)**.** Uma jornalista encontrou documentos de uma empresa de produtos químicos com informações detalhadas sobre a aplicação de dois testes de contaminação feitos em todos seus funcionários, um para a Substância A e outro para a Substância B. Os documentos eram antigos e por isso pouca informação estava legível. O resultado de cada teste é dito *Falso Positivo* quando fornece o resultado positivo para a presença da substância, mas a substância não está de fato presente no corpo da pessoa testada, ou seja, é apenas um erro. Da mesma forma, o resultado do teste é dito *Falso Negativo* quando fornece o resultado negativo para a presença da substância, porém a substância estava presente no corpo da pessoa testada. A jornalista conseguiu também descobrir as seguintes informações:

- 70 funcionários receberam o resultado Falso Positivo para a substância A;
- 273 funcionários tiveram resultado Negativo para a substância A e de fato não estavam contaminados com esta substância;
- 5% de todos os testes que resultaram positivo para a Substância A eram, na verdade, Falsos Positivos (ou seja, 5% destes estavam errados);
- 176 funcionários tiveram resultado Falso Negativo para a substância B;
- 528 funcionários tiveram resultado Negativo para a substância B e de fato não estavam contaminados com esta substância;
- 5% de todos os testes que resultaram positivo para a Substância B eram, na verdade, Falsos Positivos (ou seja, 5% destes estavam errados);
- a porcentagem de Falsos Negativos nos resultados negativos da substância A era igual à porcentagem de Falsos Negativos nos resultados negativos da substância B.

Determine a quantidade de funcionários cujo resultado foi positivo para a presença da substância B mas que, na verdade não estavam contaminados por esta substância.

Solução. Queremos determinar o número de funcionários que tiveram o resultado *Falso Positivo* para a substância B.

Inicialmente, vamos descobrir a quantidade total de resultados positivos e negativos para a substância A.

Consideraremos que: Positivos de A = Falsos Positivos de A + Positivos Reais de A e Negativos de A = Falsos Negativos de A + Negativos Reais de A.

Sabemos que 70 resultados foram Falso Positivo para a substância A e que esta quantidade representa 5% dos resultados positivos para a substância A. Logo, se x for a quantidade total de resultados positivos de A,

$$\frac{5.x}{100} = 70 \Rightarrow x = 1400.$$

Sabemos também que a porcentagem de Falsos Negativos da substância B dentro dos resultados negativos é dada por:

$$\frac{\text{Falsos Negativos de B}}{\text{Resultados Negativos de B}} = \frac{\text{Falsos Negativos de B}}{\text{Negativos Reais de B+Falsos Negativos de B}}$$
$$= \frac{176}{528+176} = \frac{176}{704} = \frac{1}{4} = 25\%.$$

Só que esta porcentagem é a mesma para o caso da substância A, então 25% dos resultados negativos de A também são falsos negativos. Denotando por y a quantidade de resultados Falsos Negativos para a substância A, temos:

$$\frac{1}{4} = \frac{\text{Falsos Negativos de A}}{\text{Falsos Negativos de A+Negativos Reais de A}} = \frac{\text{y}}{\text{y+273}}$$
$$\Rightarrow 4y = y + 273 \Rightarrow y = 91.$$

Portanto, a quantidade de resultados Falsos Negativos para a substância A é 91. Com isso, concluímos que a quantidade de funcionários que tiveram o resultado negativo para a substância A é:

Falsos Negativos de A + Negativos Reais de A $= 91 + 273 = 364$ resultados negativos de A.

Além disso, temos: Total de funcionários = Resultados positivos de A + Resultados negativos de $A = 1400 + 364 = 1764$.

Dos 1764 funcionários, sabemos que $176+528 = 704$ tiveram resultado negativo para a substância B. Desse modo, $1764 - 704 = 1060$ é a quantidade de funcionários que tiveram o resultado positivo para a substância B. Como 5% desta quantidade é, na verdade, de Falsos Positivos, concluímos que

$$\frac{5}{100}.1060 = 53,$$

representa o número de Falsos Positivos para a substância B.

A quantidade cujo resultado foi positivo para a presença da substância B, mas na verdade não estavam contaminados por esta substância, isto é, eram Falsos Positivos, é de 53 funcionários.

□

Problema 3 (OBMEP 2022)**.** Ana, Cláudia, Joaquim, Pedro e Fabiana se esconderam durante uma brincadeira. Nessa brincadeira,

- havia exatamente duas crianças na casa da árvore;
- Pedro, que nasceu em São Paulo, se escondeu junto com Fabiana;
- uma menina se escondeu sozinha;
- Ana não estava sozinha em seu esconderijo;
- o menino pernambucano estava na casa da árvore.

Quem estava na casa da árvore?

a) Pedro e Fabiana;

b) Joaquim e Cláudia;

c) Ana e Joaquim;

d) Pedro e Ana;

e) Cláudia e Fabiana.

Solução. Temos três meninas: Ana, Cláudia e Fabiana, e dois meninos: Joaquim e Pedro e as condições:

I) havia exatamente duas crianças na casa da árvore;

II) Pedro, que nasceu em São Paulo, se escondeu junto com Fabiana;

III) uma menina se escondeu sozinha;

IV) Ana não estava sozinha em seu esconderijo;

V) o menino pernambucano estava na casa da árvore.

De acordo com a afirmação III), Pedro nasceu em São Paulo e, de acordo com a afirmação V), o menino pernambucano estava na casa da árvore. Portanto, Joaquim estava na casa da árvore.

Como Pedro e Fabiana se esconderam juntos, e como Joaquim estava na casa da árvore, Pedro e Fabiana não podiam estar na casa da árvore, pois, nesse caso, teríamos três crianças na casa da árvore, o que contraria a afirmação I). A outra criança na casa da árvore deve ser ou Ana ou Cláudia.

Como uma menina se escondeu sozinha (afirmação III) e Ana não estava sozinha (afirmação IV), Ana estava na casa da árvore e Cláudia, sozinha.

Concluímos que Ana e Joaquim estavam escondidos na casa da árvore, alternativa c). □