
É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 32, volume 1, setembro de 2024

ISSN 2526-8651

Editorial

Caros Leitores,

Eis-nos novamente juntos mediados pelo lançamento da terceira edição do nosso jornal no ano de 2024. É gratificante constatar que a cada edição somos estimulados pela acolhida crescente do nosso trabalho por um público bem variado: estudantes que participam de olimpíadas, alunos dos cursos de licenciatura, professores ou simplesmente gente que curte a matemática. De fato, nossa apresentação em formato digital permite atingir um público diversificado por toda parte. Além disso, diversos tópicos abordados pelo jornal têm servido de material utilizado em disciplinas do curso de licenciatura em Matemática.

A presente edição traz na seção *artigo* um trabalho intitulado *O Teorema de Tales: uma poderosa ferramenta Matemática (II)*. Os autores, Eudes Mendes Barboza, Pedro Victor Souza Freitas e Allana Mylena Gomes de Amorim dão continuidade ao assunto iniciado na edição de número 30, revelando a abrangência, a profundidade e a atualidade da produção desse matemático grego que capitaneava a Escola Jônica.

A seção *curiosidade* traz a contribuição da professora Maria Ângela Caldas Didier, do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, abordando Modelagem Matemática e Python, linguagem de programação muito usada em diversos contextos da tecnologia da Informação.

O livro *A História da Quebra dos Códigos Secretos* é a indicação de leitura de Roberta Elaine Domingos de Araújo, aluna do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco e monitora voluntária do Jornal. É um tema sempre atual e envolve situações bizarras, como a acusação dos franceses terem pacto com o demônio, pelo fato de decifrarem códigos secretos dos espanhóis, numa guerra entre os dois países, pela habilidade de Francois Viete (1540-1603) um dos criadores da álgebra simbólica.

A seção *Quem pergunta, quer saber!* responde à pergunta: quantos e quais os números primos que podem ser escritos como um produto de números complexos conjugados?

Finalizamos a edição com *Problemas Propostos e soluções de questões relativas* à edição de número 30 e outras oriundas da Olimpíada Pernambucana de Matemática 2022 (segunda fase, nível 3). Há também informes sobre eventos.

No contexto da experiência do Jornal, estamos na medida do possível apresentando uma live entre uma edição e outra. Dia 5 de setembro foi a vez do professor Leon Denis da Silva, da Universidade Federal Rural de Pernambuco, abordar o tema: “Consequências da desigualdade de Cauchy Schwarz”, do seu artigo publicado em nossa 16^a edição.

Um agradecimento a cada leitor por prestigiar nosso trabalho desejando um proveitoso encontro com nosso jornal.

A Redação.

Sumário

1 Artigo	2
O Teorema de Tales: uma poderosa ferramenta matemática (II)	2
2 Curiosidades	14
Modelagem Matemática e Python	14
3 Indicação de Livro	16
A História da Quebra dos Códigos Secretos	16
4 Quem pergunta, quer saber!	17
Revista do Professor de Matemática (RPM, n ^o 44, p.57)	17
5 Eventos	17
6 Soluções de Olimpíadas	18
OPEMAT 2022 - Nível 3	18
7 Problemas	24
8 Soluções dos Problemas	25

1. Artigo

O Teorema de Tales: uma poderosa ferramenta matemática (II)

Pedro Victor Souza Freitas¹ & Eudes Mendes Barboza² & Allana Mylena Gomes de Amorim³

Introdução

Tales de Mileto, nascido por volta de 624 a.C, foi um filósofo, engenheiro, astrônomo e matemático da Grécia Antiga. Além de suas contribuições gerais à ciência, muitas propriedades geométricas, resoluções de problemas e teoremas são atribuídos a ele, incluindo um dos teoremas mais significativos

¹Licenciado em Matemática pela UFRPE

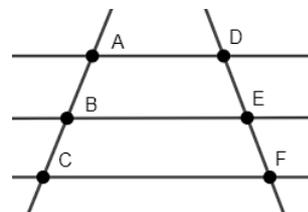
²Professor do Departamento de Matemática da UFRPE

³Licencianda em Matemática pela UFRPE e monitora do Jornal É Matemática, Oxente!

e conhecidos da Geometria Euclidiana que leva o seu nome, o qual será o foco deste estudo.

Considere um feixe de retas paralelas atravessado por duas transversais, como ilustrado na Figura 1.1, a seguir.

Figura 1.1: Feixe de paralelas e duas transversais.



Fonte: Autoria própria.

Temos o seguinte enunciado para o Teorema de Tales:

Teorema 1.1. (Teorema de Tales) Os segmentos determinados por um feixe de retas paralelas sobre duas transversais são diretamente proporcionais (ver Figura 1.1). Em outros termos, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

Na edição número 30 do *É Matemática, Oxente* de abril de 2024, trouxemos o artigo intitulado *O Teorema de Tales: uma poderosa ferramenta matemática (I)*, [6]. Nele, usando argumentos presentes na Educação Básica, exibimos uma série de suas aplicações, além de apresentar uma demonstração para este célebre teorema, evidenciando-o como uma poderosa ferramenta para mostrar outros resultados matemáticos.

Aqui, nos propomos a apresentar algumas aplicações adicionais com o intuito de verificar a versatilidade do Teorema de Tales. Nesse sentido, complementamos os artigos [6, 11] de diferentes maneiras. Em relação ao artigo [6], apresentamos outras aplicações do Teorema de Tales, como o Teorema de Menelau e o Teorema de Pascal, que são resultados mais elaborados do que os abordados no primeiro artigo. Quanto ao artigo [11], apesar de também tratarmos dos teoremas apresentados lá, fornecemos demonstrações baseadas no Teorema de Tales e

apresentamos aplicações em questões olímpicas distintas das presentes no referido artigo.

Teorema de Menelaus

Nessa seção, vamos demonstrar o Teorema de Menelaus e usá-lo como ferramenta para demonstrar o Teorema de Pascal, além de mostrar uma aplicação desse resultado através da resolução de uma questão olímpica. Primeiramente, vamos demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 1.2. *Sejam A , B e C pontos colineares. É única a posição em que C divide o segmento AB numa razão k .*

Demonstração. Existem dois casos em que C divide o segmento AB , pois ele pode ser interior a AB ou exterior.

Caso 1: C é ponto interior de AB .

Seja o segmento AB e considere C e C' pontos distintos no interior de AB que dividem AB na mesma razão k , conforme Figura 1.2 abaixo.

Figura 1.2: Figura suporte para demonstração da Proposição 1.2 (caso interno).



Fonte: Autoria própria.

Como C e C' dividem AB na mesma razão, temos que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} = k.$$

Organizando os termos, ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} &\Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} + \frac{\overline{BC'}}{\overline{BC'}} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC'} + \overline{BC'}}{\overline{BC'}} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC'}}. \end{aligned}$$

Como $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC'}}$, temos que

$$\overline{BC} = \overline{BC'} \Rightarrow C = C'.$$

Absurdo, pois consideramos C e C' distintos. Portanto, existe um único ponto no interior de AB que divide AB a uma razão k .

Caso 2: C é ponto exterior de AB .

Considere o segmento AB , considere C e C' pontos distintos no exterior de AB que dividem AB na mesma razão k . Conforme Figura 1.3.

Figura 1.3: Figura suporte para demonstração da Proposição 1.2 (caso externo).



Fonte: Autoria própria.

De forma bem semelhante ao caso 1, como C e C' dividem AB na mesma razão k , temos

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} = k.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} &\Leftrightarrow 1 - \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 1 - \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{BC}} - \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{BC'}} - \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{BC} - \overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC'} - \overline{AC'}}{\overline{BC'}} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC'}}. \end{aligned}$$

Como $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC'}}$, podemos concluir que

$$\overline{BC} = \overline{BC'} \Rightarrow C = C'.$$

Absurdo, pois consideramos que C e C' são distintos. Portanto, existe um único ponto no exterior de AB que divide AB a uma razão k . \square

Agora apresentaremos um teorema que costuma ser uma ferramenta para solucionar questões olímpicas.

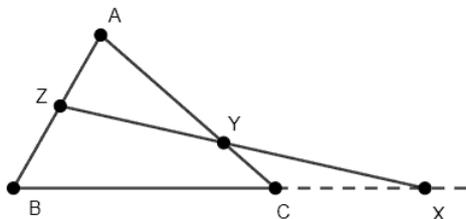
O Teorema de Menelaus pode ser demonstrado de várias maneiras: por semelhança de triângulos, via relação entre áreas, via triângulos retângulos ou via Teorema de Tales [12], [11]. Iremos demonstrar via Teorema de Tales.

Teorema 1.3. (Teorema de Menelaus) Dado um triângulo qualquer $\triangle ABC$, sejam X , Y e Z pontos nos lados (ou prolongamento dos lados), BC , AC e AB , respectivamente. Os pontos X , Y e Z são colineares, se, e somente se,

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1,$$

(ver Figura 1.4).

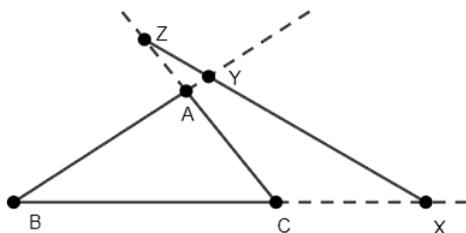
Figura 1.4: Figura suporte para o Teorema 1.3.



Fonte: Autoria própria.

Observação 1.1. O Teorema de Menelaus possui um caso particular em que todos os pontos X , Y e Z estão nos prolongamentos dos lados [7].

Figura 1.5: Figura suporte para visualização do caso particular do Teorema 1.3.

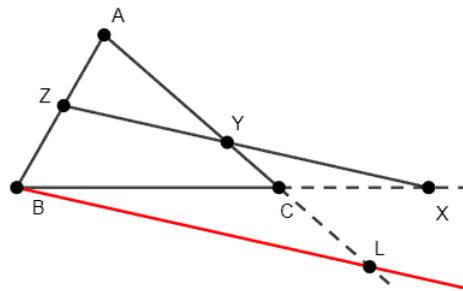


Fonte: Autoria própria.

Demonstração usando o Teorema de Tales:

Demonstração. Considere X , Y e Z pontos colineares. Sendo assim, é possível traçar um segmento BL paralelo ao segmento ZX , em que BL intercepta o prolongamento do lado AC (ver Figura 1.6).

Figura 1.6: Figura suporte para visualização do caso particular do Teorema 1.3.



Fonte: Autoria própria.

Como os segmentos BL e ZX são paralelos e temos que AB e AL são retas transversais a esse feixe de segmentos paralelos. Então podemos usar o Teorema de Tales 1.1. Dessa maneira, obtemos que

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{YA}}{\overline{YL}}. \quad (1)$$

Por (1), temos

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{YL}}{\overline{YA}} = 1. \quad (2)$$

De forma análoga, considerando as mesmas retas paralelas com as retas transversais BX e YL , obtemos

$$\frac{\overline{LC}}{\overline{YC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{XC}}. \quad (3)$$

Com isso, somando 1 em ambos os lados de (3), temos

$$\frac{\overline{LC}}{\overline{YC}} + 1 = \frac{\overline{BC}}{\overline{XC}} + 1.$$

Daí,

$$\frac{\overline{LC} + \overline{YC}}{\overline{YC}} = \frac{\overline{BC} + \overline{XC}}{\overline{XC}}.$$

Porém, sabemos que $LC + YC = YL$ e que $BC + XC = XB$, então

$$\frac{\overline{YL}}{\overline{YC}} = \frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}. \quad (4)$$

Por (4), temos

$$\frac{\overline{YC}}{\overline{YL}} \cdot \frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} = 1. \quad (5)$$

Por fim, se multiplicarmos (2) por (5)

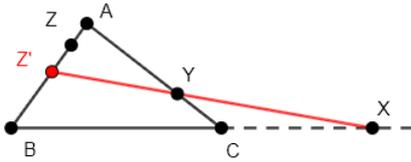
$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{YL}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{YC}}{\overline{YL}} \cdot \frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} = 1.$$

Concluindo, assim, a demonstração da ida. Para demonstrar a recíproca suponhamos que

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1.$$

Queremos provar que os pontos X, Y, Z são colineares. Dessa forma, suponha por contradição que X, Y e Z são pontos não colineares e satisfazem a equação da hipótese. Provaremos que isso é um absurdo, seja Z' um ponto no segmento AB que seja colinear com X e Y , como mostra a Figura 1.7 abaixo.

Figura 1.7: Figura suporte da demonstração do Teorema 1.3.



Fonte: Autoria própria.

Já mostramos que se os pontos X, Y e Z' são colineares, então $\frac{\overline{AZ'}}{\overline{BZ'}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1$. Portanto,

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = \frac{\overline{AZ'}}{\overline{BZ'}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1,$$

após a simplificação dos termos em comum, concluímos que

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{AZ'}}{\overline{BZ'}}. \quad (6)$$

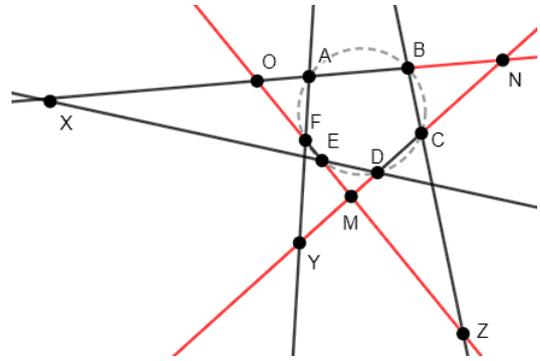
Por fim, temos que pela Proposição 1.2 caso 2, a única forma de (6) acontecer é se $Z = Z'$. Portanto, temos um absurdo, pois supomos que Z não é colinear com X e Y , mas como $Z = Z'$, temos que Z é colinear com X e Y . Assim, concluímos que essa igualdade só ocorre quando X, Y e Z são colineares. \square

Uma aplicação relevante do Teorema de Menelaus é sua utilização como ferramenta na demonstração do Teorema de Pascal, como poderá ser visto a seguir.

Teorema 1.4. (Teorema de Pascal) *Seja $ABCDEF$ um hexágono inscrito em uma circunferência. Então, os pontos de interseções $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{FA}$ são colineares.*

Demonstração. Seja $ABCDEF$ um hexágono inscrito em uma circunferência, traçando as retas $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{FA}$ e $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{EF}$, em que X, Y, Z são pontos nas respectivas interseções. Representando por M a interseção de $\overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{EF}$, N a interseção de $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE}$ e O a interseção de $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{EF}$, como mostra a Figura 1.8,

Figura 1.8: Figura suporte para a demonstração do Teorema de Pascal.



Fonte: Autoria própria.

queremos mostrar que X, Y, Z são colineares. Para isso, aplicamos o Teorema de Menelaus no triângulo $\triangle MNO$ e nos pontos colineares X, D, E , temos:

$$\frac{\overline{NX}}{\overline{OX}} \cdot \frac{\overline{OE}}{\overline{ME}} \cdot \frac{\overline{MD}}{\overline{ND}} = 1. \quad (7)$$

Fazendo o mesmo para o triângulo $\triangle MNO$ e nos pontos colineares Z, C, B , teremos:

$$\frac{\overline{MZ}}{\overline{MZ}} \cdot \frac{\overline{OB}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{MC}} = 1. \quad (8)$$

Por fim, considerando o triângulo $\triangle MNO$ nos pontos colineares Y, F, A segue

$$\frac{\overline{NY}}{\overline{MY}} \cdot \frac{\overline{MF}}{\overline{OF}} \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{NA}} = 1. \quad (9)$$

Perceba que a partir das identidades (7), (8) e (9) teremos

$$\left(\frac{\overline{NX}}{\overline{OX}} \cdot \frac{\overline{OE}}{\overline{ME}} \cdot \frac{\overline{MD}}{\overline{ND}} \cdot \frac{\overline{OM}}{\overline{MZ}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{OB}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{MC}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{MY}}{\overline{NY}} \cdot \frac{\overline{OF}}{\overline{MF}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{OA}}\right) = 1. \quad (10)$$

Reorganizando os termos segue

$$\left(\frac{\overline{NX}}{\overline{OX}} \cdot \frac{\overline{OM}}{\overline{MZ}} \cdot \frac{\overline{MY}}{\overline{NY}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{OE}}{\overline{ME}} \cdot \frac{\overline{MD}}{\overline{ND}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{OF}}{\overline{MF}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{OA}}\right) = 1. \quad (11)$$

Usando a condição da potência do ponto, teremos que o segundo fator do lado esquerdo de (11) pode ser calculado da seguinte maneira

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{ME}} \cdot \frac{\overline{MD}}{\overline{ND}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{OF}}{\overline{MF}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OE} \cdot \overline{OF}}{\overline{OB} \cdot \overline{OA}} \cdot \frac{\overline{MD} \cdot \overline{MC}}{\overline{ME} \cdot \overline{MF}} \cdot \frac{\overline{NB} \cdot \overline{NA}}{\overline{ND} \cdot \overline{NC}} = 1. \quad (12)$$

Logo, por (11) e (12),

$$\frac{\overline{NX}}{\overline{OX}} \cdot \frac{\overline{OM}}{\overline{MZ}} \cdot \frac{\overline{MY}}{\overline{NY}} = 1.$$

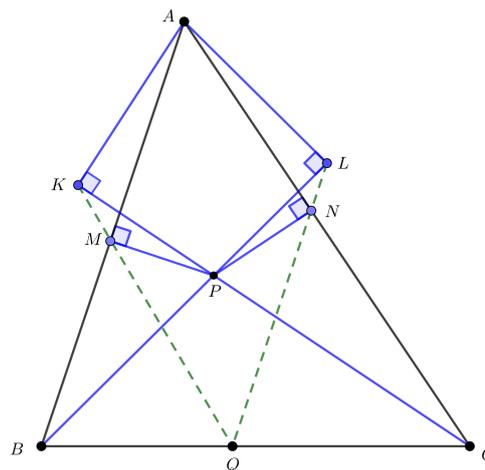
E como os pontos X, Y, Z pertencem aos prolongamentos dos lados do triângulo ΔMNO , podemos afirmar pelo Teorema de Menelaus que X, Y, Z são colineares, demonstrando assim o Teorema de Pascal. \square

Observação 1.2. No Teorema acima o hexágono não precisa ser convexo, ou seja, também pode ser degenerado.

Exemplo 1.1. (POT - 2012 - Geometria - Nível 3) Seja P um ponto no interior do triângulo ABC . Sejam M e N as projeções de P sobre AB e AC , respectivamente. Seja K a projeção de A sobre CP e seja L a projeção de A sobre BP . Prove que KM , LN e BC são concorrentes.

Solução. Primeiramente, note a construção da figura dada pelo enunciado.

Figura 1.9: Figura suporte para visualizar o enunciado do exemplo 1.

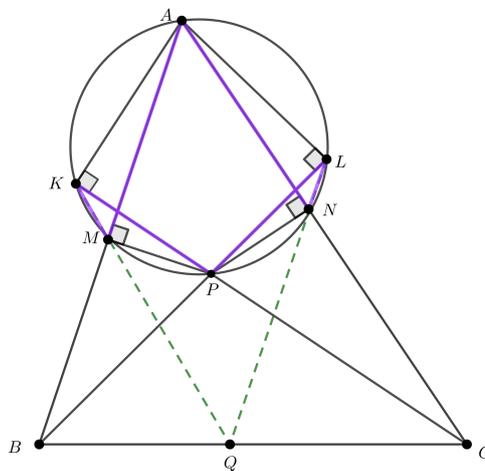


Fonte: Autoria própria

Queremos provar que as retas KM , LN e BC são concorrentes.

Note que os pontos A, K, M, P, N e L pertencem a mesma circunferência. Agora, seja o hexágono não convexo (em roxo), $AMKPLN$.

Figura 1.10: Figura destacando o hexágono do exemplo 1.



Fonte: Autoria própria

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} AM \cap LP &= B \\ AN \cap KP &= C \\ KM \cap LN &= Q. \end{aligned} \quad (13)$$

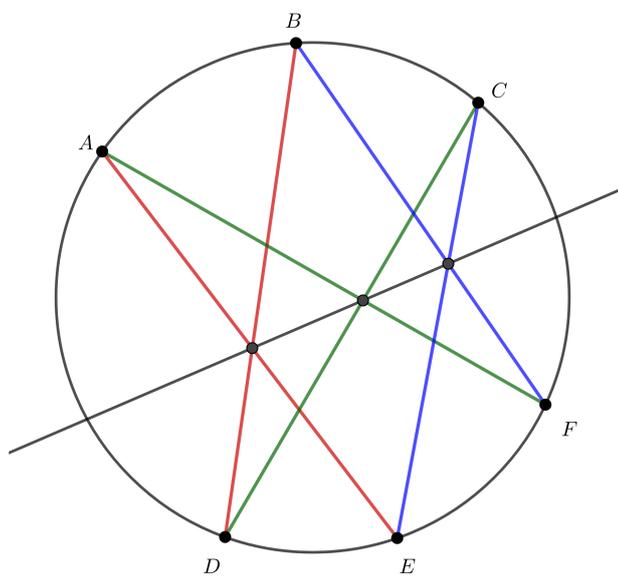
Pelo Teorema de Pascal, B, Q e C são colineares. Daí, temos que KM e LN já têm o ponto Q

em comum, e concluímos que o ponto Q pertence a BC . Ou seja, eles têm em comum o ponto Q , portanto KM , LN e BC são concorrentes. \square

Observação 1.3. Outra forma de enunciar o Teorema de Pascal.

Dados seis pontos A, B, C, D, E, F sobre uma circunferência, não necessariamente distintos, já que o hexágono não precisa ser convexo, as interseções $AE \cap BD$, $AF \cap CD$ e $BF \cap CE$ são colineares.

Figura 1.11: Figura suporte para visualizar outra forma de enunciar o Teorema de Pascal.



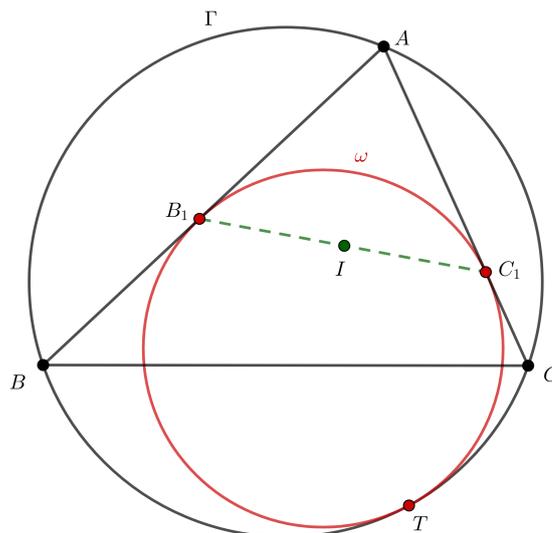
Fonte: Autoria própria

Exemplo 1.2. (Adaptada de olimpedia.fandom.com) Seja ABC um triângulo inscrito numa circunferência Γ e ω um círculo tangente a AB e AC em B_1 e C_1 e tangente internamente a Γ em T . Prove que o incentro de ABC é o ponto médio de B_1C_1 .

Solução. Seja a figura abaixo a representação do que foi enunciado.

⁴Se entre duas retas paralelas traçarmos segmentos formando “bicos”, a soma das medidas dos ângulos com vértices, na direção dessas retas, à direita é igual à soma das medidas dos ângulos com vértices, na direção oposta, independentemente da quantidade de tais ângulos.

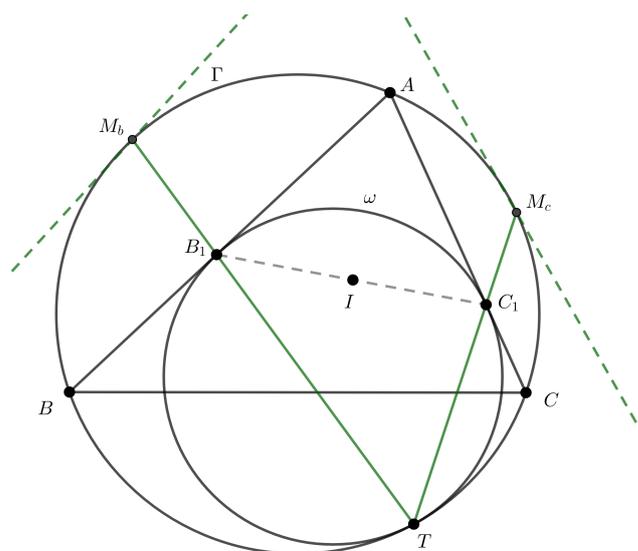
Figura 1.12: Figura suporte para visualizar o enunciado do exemplo 2.



Fonte: Autoria própria

Sabemos que ω e Γ são tangentes entre si, no ponto T . Assim, considere uma homotetia de centro T que leva ω a Γ , onde dados os pontos M_c e M_b tangentes a Γ e paralelos a AB e AC , respectivamente, temos que B_1 e C_1 são levados a M_b e M_c . Ou seja, TB_1 e TC_1 são levados aos pontos M_b e M_c , que são os pontos médios dos arcos AB e AC , e que pertence a B_1 e C_1 .

Figura 1.13: Figura destacando a homotetia no exemplo 2.



Fonte: Autoria própria

Portanto, TB_1M_b e TC_1M_c são colineares.

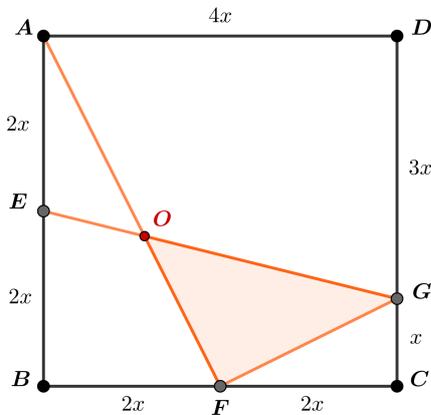
Daí, pelo Teorema de Pascal, temos que $B_1 = AB \cap M_bT$, $I = BM_c \cap CM_b$ e $C_1 = AC \cap TM_c$.

Por fim, pelo Teorema dos Bicos⁴, concluímos que no triângulo AB_1C_1 , o ângulo $B_1 = C_1$. Desta forma, o triângulo AB_1C_1 é isósceles, e a bissetriz coincide com a mediana. Logo, AI é a mediana e I é o ponto médio de B_1C_1 . \square

Exemplo 1.3. (Rioplatense/1997) Seja $ABCD$ um quadrado de lado 1. Sejam E e F os pontos médios dos lados AB e BC . G é um ponto sobre CD tal que $GD = 3GC$. As retas EG e AF se intersectam em O . Calcula a área do triângulo FGO .

Resolução: Seja $\overline{GC} = x$, e pelo enunciado $\overline{GD} = 3x$. Logo, o lado do quadrilátero vale $4x$, ou seja $\overline{AD} = 4x$.

Figura 1.14: Figura suporte para visualizar o enunciado do exemplo 3.



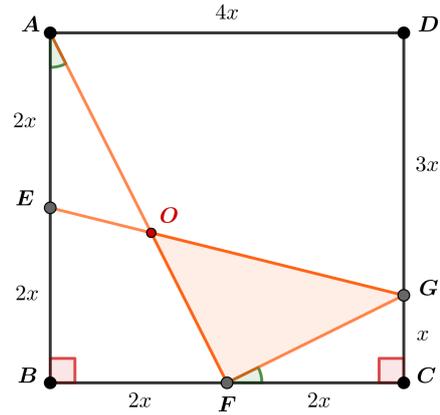
Fonte: Autoria própria

Além disso, $\overline{BE} = \overline{EA} = 2x$, pois E é o ponto médio de \overline{AB} . Analogamente, $\overline{BF} = \overline{FC} = 2x$.

Assim, temos que $x = \frac{1}{4}$. Já que $\overline{AD} = 1 = 4x$.

Agora, note que $\triangle ABF \sim \triangle GFC$, pelo critério LAL. Já que $\overline{AB} = 4x = 2(2x) = 2 \cdot \overline{FC}$, analogamente entre \overline{BF} e \overline{GC} , ou seja há uma proporção de razão 2 entre os lados. Além disso, $\hat{A}BF = \hat{F}GC = 90^\circ$.

Figura 1.15: Figura destacando os ângulos no exemplo 3.



Fonte: Autoria própria

Assim, $\hat{BFA} = \hat{FCG} = \alpha$. O que implica, $\hat{BAF} + \hat{GFC} = (90^\circ - \alpha) + \alpha = 90^\circ$. Logo, $\hat{OFG} = 90^\circ$. Segue que o triângulo $\triangle OFG$ é retângulo. Portanto, para saber a área de $\triangle OFG$, basta conhecer os catetos \overline{FG} e \overline{OF} .

Para \overline{FG} , aplicamos o Teorema de Pitágoras no triângulo GFC .

$$x^2 + (2x)^2 = (\overline{FG})^2.$$

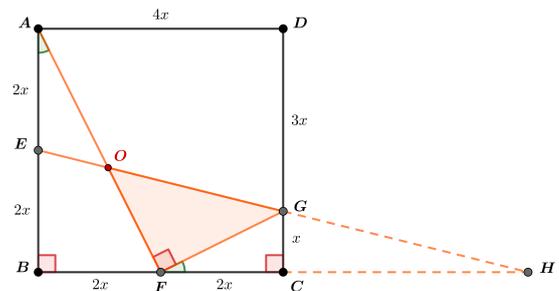
Daí, $\overline{FG} = \sqrt{5x^2}$. Porém, sabemos que $x = \frac{1}{4}$. Portanto,

$$\overline{FG} = \sqrt{5 \cdot \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Para determinar \overline{OF} , usaremos o Teorema de Menelaus.

Por construção, seja o ponto H , a interseção do prolongamento de \overline{EG} e \overline{BC} .

Figura 1.16: Figura destacando a construção do prolongamento \overline{EG} e \overline{BC} no exemplo 3.



Fonte: Autoria própria

Note que, \overline{CG} é a base média do triângulo

$\triangle EBH$, pois $\overline{EB} = 2x$ e $\overline{GC} = x$. Assim, $\overline{CH} = \overline{BC} = 4x$.

Além disso, os pontos H , O e E , são colineares, então aplicando o Teorema de Menelaus no triângulo $\triangle ABF$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{AO}}{\overline{OF}} \cdot \frac{\overline{HF}}{\overline{HB}} &= 1; \\ \implies \frac{2x}{2x} \cdot \frac{\overline{AO}}{\overline{OF}} \cdot \frac{6x}{8x} &= 1; \\ \implies \frac{\overline{AO}}{\overline{OF}} &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Note que, como $\triangle ABF$ é retângulo, facilmente vemos que:

$$\begin{aligned} \overline{AF} &= \sqrt{(4x)^2 + (2x)^2} = \sqrt{20x^2} \\ &= \sqrt{20 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Daí, podemos escrever \overline{AO} de forma a aparecer o termo \overline{AF} , apenas somando \overline{OF} , veja:

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OF}} + \frac{\overline{OF}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{AO} + \overline{OF}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{OF}} = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}.$$

Substituindo, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}}{2} &= \frac{7}{3}; \\ \implies 7 \cdot \overline{OF} &= \frac{3\sqrt{5}}{2}; \\ \implies \overline{OF} &= \frac{3\sqrt{5}}{14}. \end{aligned}$$

Por fim, a área($\triangle FOG$) = $\frac{\overline{FG} \cdot \overline{OF}}{2}$. Substituindo, temos:

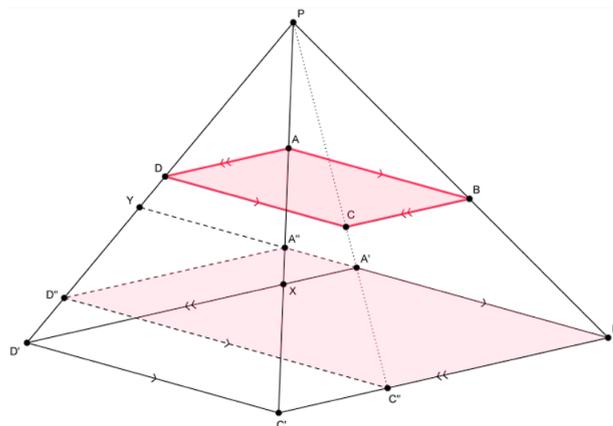
$$\text{área}(\triangle FOG) = \frac{\frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{14}}{2} = \frac{15}{112}.$$

Exemplo 1.4. (Iranian Geometry Olympiad - 2015) Considere dois paralelogramos $ABCD$ e $A'B'C'D'$ tais que o segmento AB é paralelo a $A'B'$ e BC é paralelo a $B'C'$. Seja P a interseção de BB'

com DD' . Se P , A e C' são colineares então A' , C e P são colineares.

Resolução: Supondo P , A e C' colineares, queremos mostrar que A' , C e P são colineares. Considere A'' , C'' , X e Y as interseções, respectivamente, entre PA e $A'B'$, PC e $B'C'$, PC' e $A'D'$, PD e $A'B'$. Construindo dessa forma, podemos afirmar que os paralelogramos $ABCD$ e $A''B'C''D''$ são semelhantes, conforme Figura 1.17.

Figura 1.17: Figura suporte para resolução do Exemplo 1.4.



Fonte: Shortlist IGO 2015.

Portanto, pelo Teorema de Menelaus 1.3 para o $\triangle A'YD'$ com a colinearidade entre X , A'' e P , temos

$$\frac{\overline{A'X}}{\overline{D'X}} \cdot \frac{\overline{D'P}}{\overline{PY}} \cdot \frac{\overline{A''Y}}{\overline{A'A''}} = 1. \quad (15)$$

Usando o Teorema de Tales 1.1 podemos fazer algumas afirmações. Como $A''A'$ e $D'C'$ são paralelos, temos

$$\frac{\overline{A'X}}{\overline{D'X}} = \frac{\overline{A''X}}{\overline{XC'}}. \quad (16)$$

Como $A'X$ e $B'C'$ são paralelos, temos

$$\frac{\overline{A''A'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{A''X}}{\overline{C'X}}. \quad (17)$$

Pela equações (16) e (17), temos que

$$\frac{\overline{A'X}}{\overline{D'X}} = \frac{\overline{A''A'}}{\overline{A'B'}}. \quad (18)$$

Ainda, pelo Teorema de Tales 1.1, temos

$$\frac{\overline{A''Y}}{\overline{A'A''}} = \frac{\overline{D''Y}}{\overline{D'D''}}, \quad (19)$$

pois $D''A''$ é paralelo a $A'D'$. E, também podemos dizer que

$$\frac{\overline{B'C''}}{\overline{C''C'}} = \frac{\overline{D''Y}}{\overline{D'D''}}, \quad (20)$$

por que, YB' , $D''C''$ e $D'C'$ são paralelos.

Pelas equações (19) e (20), temos que

$$\frac{\overline{A''Y}}{\overline{A'A''}} = \frac{\overline{B'C''}}{\overline{C''C'}}. \quad (21)$$

Ainda, pelo Teorema de Tales, como $A''Y$ e $D'C'$ são paralelos, sabemos que

$$\frac{\overline{D'P}}{\overline{PY}} = \frac{\overline{C'P}}{\overline{A''P}}. \quad (22)$$

Portanto, pelas equações (15), (18), (21) e (22), temos que

$$\frac{\overline{A'A'}}{\overline{A'B'}} \cdot \frac{\overline{B'C''}}{\overline{C''C''}} \cdot \frac{\overline{C'P}}{\overline{A''P}} = 1.$$

Logo, pelo Teorema de Menelaus 1.3 no $\Delta A''B'C''$, C'' , A' e P são colineares. Pela forma que construímos, C'' é colinear a P e C . Portanto, concluímos que A' , C e P são colineares.

A seguir veremos outra aplicação do Teorema de Tales.

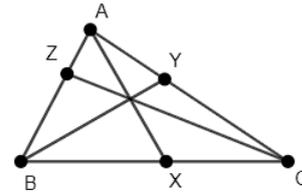
Teorema de Ceva

Nessa seção, enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Ceva usando o Teorema de Tales. Comentaremos também sobre o Ponto de Gergonne.

Teorema 1.5. (Teorema de Ceva) *Dado um triângulo ΔABC qualquer, considere as cevianas AX , BY e CZ , conforme a Figura 1.18. As cevianas são concorrentes, se e somente se,*

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = 1.$$

Figura 1.18: Figura suporte para visualização do Teorema 1.5.



Fonte: Autoria própria.

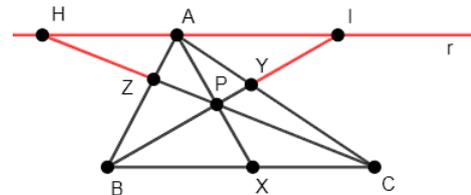
Demonstração via Teorema de Tales:

Demonstração. Dado um triângulo ΔABC , suponha que as cevianas AX , BY e CZ são concorrentes. Queremos mostrar que

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = 1.$$

Para demonstrar o Teorema de Ceva usando o Teorema de Tales 1.1 precisamos traçar alguns segmentos suportes. Sendo assim, seja r uma reta paralela ao segmento BC no ponto A , além disso, prolongue as cevianas BY e CZ até interceptar a reta r em H e I , respectivamente; por fim, seja P o ponto que é interseção das cevianas AX , BY e CZ , conforme a Figura 1.19.

Figura 1.19: Figura suporte para visualização da demonstração do Teorema 1.5.



Fonte: Autoria própria.

Feito isso, temos que o triângulo ΔAIY é semelhante ao triângulo ΔBCY , pois possuem ângulo alterno interno e dois ângulos congruentes. Portanto, sabemos que

$$\frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AI}}. \quad (23)$$

De forma análoga, temos que

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{BC}}, \quad (24)$$

porque o triângulo ΔAHZ é semelhante ao triângulo ΔBCZ , pelos mesmos argumentos. Mas também, o triângulo ΔAIP é semelhante ao triângulo ΔBPX , então $\frac{AI}{BX} = \frac{AP}{PX}$; por outro lado, o triângulo ΔAHP é semelhante ao triângulo ΔCXP e temos que $\frac{AH}{CX} = \frac{AP}{PX}$, logo por transitividade

$$\frac{AI}{BX} = \frac{AH}{CX} \Rightarrow \frac{BX}{CX} = \frac{AI}{AH}. \quad (25)$$

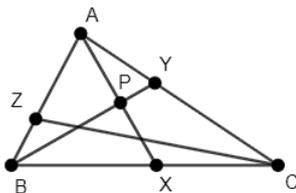
Por fim, multiplicando (24), (23) e (25), temos a seguinte expressão

$$\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{BX}{CX} = \frac{AH}{BC} \cdot \frac{BC}{AI} \cdot \frac{AI}{AH} = 1. \quad (26)$$

Como queríamos demonstrar.

Supondo que $\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1$, queremos provar que as cevianas AX , BY e CZ são concorrentes. Dessa forma, suponha por contradição que as cevianas BX , BY e CZ não são as três concorrentes, mas satisfazem a equação da hipótese. Seja P o ponto de interseção entre as cevianas AX e BY , conforme a Figura 1.20.

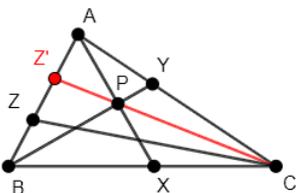
Figura 1.20: Figura suporte da demonstração do Teorema 1.5.



Fonte: Autoria própria.

Considere Z' ponto em AB tal que CZ' é uma ceviana que passa por P , de acordo com a Figura 1.21.

Figura 1.21: Figura suporte da demonstração do Teorema 1.5.



Fonte: Autoria própria.

Já mostramos que os pontos AX , BY e CZ' são

concorrentes, então

$$\frac{AZ'}{BZ'} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1.$$

Por outro lado, por hipótese temos que

$$\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1.$$

Dessa forma,

$$\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = \frac{AZ'}{BZ'} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1,$$

simplicando temos que

$$\frac{AZ}{BZ} = \frac{AZ'}{BZ'}. \quad (27)$$

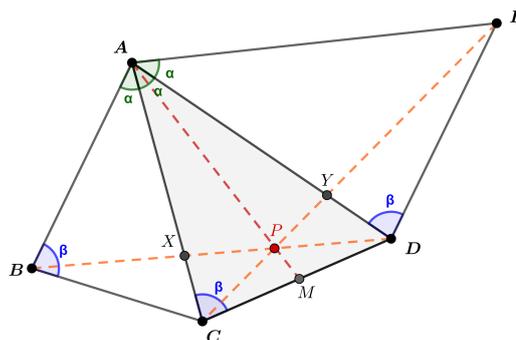
Portanto, temos que $Z = Z'$, pela Proposição 1.2 caso 1. Absurdo, pois consideramos que eram diferentes, então AX , BY e CZ são concorrentes. \square

Exemplo 1.5. (Shortlist - 47° IMO Slovenia, 2006) Seja o ABCDE um pentágono convexo, de modo que $\hat{BAC} = \hat{CAD} = \hat{DAE}$ e $\hat{ABC} = \hat{ACD} = \hat{ADE}$.

As diagonais \overline{BD} e \overline{CE} se encontram em P . Prove que a reta \overline{AP} bissecta o lado \overline{CD} .

Resolução: Seja X a interseção entre as diagonais \overline{AC} e \overline{BD} e Y a interseção entre as diagonais \overline{AD} e \overline{CE} . Seja, também, M o ponto de interseção da reta \overline{AP} e o segmento \overline{CD} . Assim, queremos provar que $\overline{CM} = \overline{MD}$.

Figura 1.22: Figura suporte para visualizar o enunciado do exemplo 5.



Fonte: Autoria própria

Primeiramente, note que $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle ADE$, pelo critério AA. Já que, $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAE} = \alpha$ e $\widehat{ABC} = \widehat{ACD} = \widehat{ADE} = \beta$. Logo, os quadriláteros $ABCD$ e $ACDE$ são semelhantes.

Daí, como todos os lados são proporcionais, temos que X é a interseção das diagonais \overline{AC} e \overline{BD} , do quadrilátero $ABCD$, e Y é a interseção das diagonais \overline{AD} e \overline{CE} do quadrilátero $ACDE$.

Assim, $\frac{\overline{AX}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{YD}}$. Pois, as diagonais são proporcionais em seus respectivos quadriláteros, que por sua vez, são proporcionais entre si.

Note que, por P ser o ponto de interseção, entre as retas concorrentes, \overline{XD} , \overline{YC} e \overline{AM} , podemos aplicar a recíproca do Teorema de Ceva no triângulo $\triangle ACD$, temos:

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{DY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MD}} = 1.$$

Daí, note que temos, $\frac{\overline{AX}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{YA}}{\overline{DY}}$. Então,

$$\frac{\overline{DY}}{\overline{YA}} = \frac{1}{\frac{\overline{AX}}{\overline{XC}}}$$

Logo, temos que a equação é

$$1 \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MD}} = 1 \implies \overline{CM} = \overline{MD}.$$

Assim, como queríamos demonstrar.

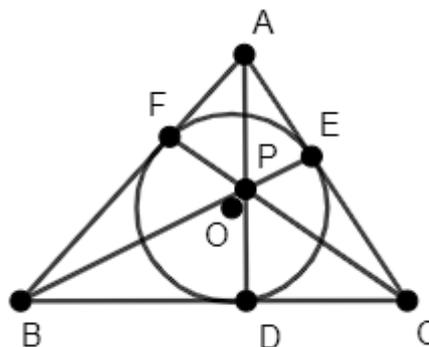
Observação 1.4. O Teorema de Menelaus 1.3 e o Teorema de Ceva 1.5 estão intimamente ligados pois Aplicando os teoremas ao mesmo triângulo $\triangle ABC$, obtemos dois objetos, X e X_1 , que, embora não sejam iguais, estão intimamente ligados. Isso ocorre porque X e X_1 são conjugados harmônicos⁵ em relação ao lado AB do triângulo, com uma razão k para algum $k \in \mathbb{R}$. Fato demonstrado em [11].

Visto isso, vamos agora ver um exemplo no qual usa-se Teorema de Ceva.

⁵Os pontos X e X_1 são ditos conjugados harmônicos se dividirem o segmento AB de maneira que a razão entre as distâncias de X e X_1 aos pontos A e B é a mesma, mas com posições diferentes no segmento. Esta relação de harmonia entre X e X_1 reflete uma simetria fundamental e é uma propriedade importante na geometria projetiva, que explora as relações entre pontos, linhas e planos de maneira que a posição relativa desses elementos é preservada, mesmo sob transformações projetivas.

Exemplo 1.6. (Ponto de Gergonne) Sejam D , E e F os pontos de contato da circunferência de centro O inscrita com os lados BC , CA e AB , respectivamente, do triângulo $\triangle ABC$. Prove que AD , BE e CF são concorrentes em um ponto no qual denomina-se Ponto de Gergonne.

Figura 1.23: Figura para visualização do exemplo 1.6.



Fonte: Autoria própria.

Solução: Note que $\overline{AE} = \overline{AF}$, $\overline{BD} = \overline{BF}$, $\overline{CD} = \overline{CE}$ (Demonstração desse fato pode ser visto em [13]). Por isso, concluímos que

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = 1.$$

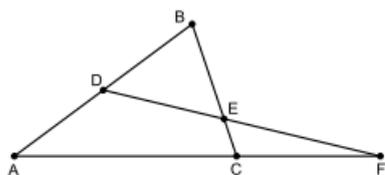
Então, pelo Teorema de Ceva, temos que AD , BE e CF são concorrentes em um ponto.

Por meio do Teorema de Ceva também é possível mostrar que todas as medianas, bissetrizes e alturas se intersectam em um único ponto. Além disso, todos os teoremas mostrados podem ser vistos em questões de olimpíadas de matemática tanto em nível nacional quanto internacional, como pode ser visto durante o trabalho e em [11] e [3].

Questões Propostas

Questão 1. Um segmento intercepta os lados de um triângulo ABC nos pontos D , E , F , conforme a figura. Se $AD = BD = 6$, $BE = CF = 5$ e $CE = 2$, a medida do lado AC é:

Figura 1.24: Figura suporte do enunciado da questão 1.



Fonte: Portal da matemática: OBMEP

- a) $\frac{11}{2}$ c) $\frac{15}{2}$ e) $\frac{19}{2}$
 b) $\frac{13}{2}$ d) $\frac{17}{2}$

Questão 2. No triângulo ABC , retângulo em C , P e Q estão sobre os lados BC e AC , respectivamente, tais que $CP = CQ = 2$. Pelo ponto de interseção R de AP e BQ , uma reta é desenhada passando também por C e cortando AB em S . O prolongamento de PQ corta AB em T . Se $AB = 10$ e $AC = 8$, determine TS .

Questão 3. (POT 2012 - Geometria - Nível 2) Seja $\triangle ABC$ um triângulo e sejam P e Q pontos sobre os lados AB e AC , respectivamente, tais que $PQ \parallel BC$. Prove que PC , QB e a mediana AM , com M em BC , são concorrentes.

Questão 4. (APMO 2013). Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito no círculo w , e seja P um ponto do prolongamento AC tal que os segmentos PB e PD são tangentes a w . A reta tangente por C intersecta PD no ponto Q e a reta AD no ponto R . Seja E o outro ponto de interseção entre AQ e w . Demonstrar que os pontos B, E, R são colineares.

Questão 5. (IMO/1982) As diagonais AC e CE de um hexágono regular $ABCDEF$ são divididas internamente pelos pontos M e N , respectivamente, na razão $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$. Determine se B, M e N são colineares.

Considerações Finais

Com esse trabalho, verificamos que em termos matemáticos o Teorema de Tales apresenta aplica-

ções para resultados mais sofisticados como o Teorema de Menelaus, o Teorema de Pascal e o Teorema de Ceva que constituem ferramentas em questões olímpicas. Além das aplicações já apresentadas em [6].

Referências

- [1] BONGIOVANNI, Vincenzo. **O teorema de Tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico**. REVEMAT-Revista Eletrônica de Matemática, v. 2, n. 1, p. 94-106, 2007
- [2] BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.
- [3] BRITO, Gabriel V. de Souza. **Aplicações de Teoremas de Geometria Plana em Problemas de olimpíadas**. Dissertação de PROFMAT-UFRPE. Recife, 2020.
- [4] CALDART, Ana Paula Facchin et al. **O ensino do Teorema de Pitágoras durante a pandemia: uma tentativa de engajamento na aprendizagem dos estudantes da escola básica**. Anais do XVII Seminário Institucional do PIBID-UFRGS. Porto Alegre, 2022.
- [5] CRESCENZO, L. **História da Filosofia Grega - Os pré-socráticos**. Editorial Presença: Lisboa, 1988.
- [6] FREITAS, P. V. S., BARBOZA, E. M. , GOMES, H. C. B. **O Teorema de Tales: uma poderosa ferramenta matemática (I)**. *É Matemática, Oxente!* v.1, n. 30, p. 2–12, 2024.
- [7] FREITAS, P. V. S.; SANTOS, J. A. ; FERREIRA JR, G. S. ; TANAKA, T. Y. . **Os Teoremas de Ceva e de Menelaus: Irmãos separados por 15 séculos**. XX SEMANA DE MATEMÁTICA, 2020, Ji-Paraná-RO. A Matemática e algumas de suas ramificações: Matemática Pura, Matemática Aplicada e Educa-

ção Matemática. Tudo junto e misturado?, p. 351-362, 2020.

- [8] GALLEGO, José. LINARES, Francisco. **Teorema de Tales**. Revista de Didáctica de las Matemáticas, v. 18, p. 71-76, 1988.
- [9] HEATH, Thomas L. **A manual of Greek mathematics**. Courier Corporation, 2003.
- [10] Iranian Geometry Olympiad. The shortlist of problems. Disponível em: <https://igo-official.com/>. Acesso em 29 Nov. de 2021.
- [11] SANTOS, J. A. dos, FREITAS, P. V. S., FERREIRA, G. S. jr, TANAKA, T. Y. **Explorando os teoremas de Menelaus e Ceva em questões de olimpíadas de matemática**. Professor de Matemática Online (PMO), v.9, v.3, 2021.
- [12] SILVA, J. C. da. **Os teoremas de Menelaus e Ceva**. Dissertação de PROFMAT-UFRPE. Recife, p. 14-22, 2015.
- [13] SILVA, R. J. da. **Triângulo Pitagórico e circunferência inscrita**. São Paulo, edição digital, 2014.

2. Curiosidades

Modelagem Matemática e Python

Maria Ângela Caldas Didier
(maria.didier@ufrpe.br)⁶

A ciência busca explicar a natureza por meio de teorias as quais impulsionam o avanço do conhecimento e permitem tomar decisões futuras com base em ações efetivas. A Modelagem Matemática é uma forma de abstração e generalização destinada à previsão de tendências. Essencialmente, consiste na representação de situações da realidade como problemas matemáticos, cujas soluções devem ser interpretadas (BASSANEZI, 2002). Um

modelo matemático é a descrição quantitativa de um fenômeno do mundo real, representado por uma função ou equação. Seu propósito é explicar o fenômeno e, potencialmente, prever seu comportamento futuro (STEWART, 2017). A Modelagem é amplamente utilizada em diversas áreas da ciência. Recentemente, vimos na mídia o uso de modelos matemáticos no acompanhamento da evolução da Pandemia da COVID-19. A construção desses modelos envolve técnicas clássicas como a Regressão ou Ajuste de Curvas utilizando o método dos mínimos quadrados (RUGGIERO & LOPES, 2000) e as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) (BOYCE & DIPRIMA, 2010). A escolha da abordagem adequada depende do pesquisador e da natureza do problema em questão. Em situações complexas, como sistemas de equações diferenciais ou grandes volumes de dados, é comum recorrer a métodos numéricos computacionais para obter soluções pois nem sempre é possível encontrá-las analiticamente. Assim, os pesquisadores se voltam para os computadores, capazes de executar cálculos numéricos em uma ínfima fração do tempo demandado manualmente.

Python é uma linguagem de programação desenvolvida por Guido van Rossum, um matemático e programador holandês nascido em Haarlem, em 31 de janeiro de 1956 e graduado pela Universidade de Amsterdã (GUIDO, 2021). Esta linguagem é conhecida por sua sintaxe clara e legível, o que torna o processo de escrita e manutenção de código mais dinâmico. Ela oferece ambientes que combinam código, texto explicativo e visualizações em um único documento interativo como Jupyter Notebooks e IPython. Isso facilita a visualização de dados, a exploração de diferentes abordagens de modelagem e a colaboração com outros pesquisadores. Esta linguagem também dispõe de uma ampla gama de bibliotecas especializadas. NumPy, SciPy e SymPy são bibliotecas que auxiliam na construção e exploração de modelos matemáticos, permitindo a implementação de algoritmos de diferenciação numérica,

⁶Professora Doutora do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

resolução de equações diferenciais e manipulação de expressões simbólicas de forma eficiente. As bibliotecas Matplotlib e Plotly possibilitam a criação de gráficos interativos e animações, tornando os conceitos abstratos do Cálculo mais acessíveis e concretos. E, para completar a lista de bibliotecas básicas necessárias à realização de um processo de modelagem matemática, a biblioteca Pandas que desempenha um papel crucial na preparação e processamento de dados, fornecendo uma base sólida para a construção e análise dos modelos.

No artigo de Silva, Bonfim & Didier (2024), são apresentadas técnicas de modelagem juntamente com modelos matemáticos de dinâmica populacional, incluindo seus respectivos códigos em Python. Por exemplo, encontramos a descrição e o código referente ao modelo epidemiológico compartimental SIR desenvolvido em 1927 por Kermack e McKendrick, pioneiro nos estudos de doenças transmissíveis epidêmicas. Neste modelo, a população é considerada constante e é dividida em três compartimentos: Suscetíveis (S), composto por indivíduos expostos à contaminação; Infectados (I), constituído por indivíduos que foram contaminados e estão transmitindo a doença a uma taxa α ; e Recuperados (R), formado por indivíduos que se recuperaram da doença e adquiriram imunidade a uma taxa β . As doenças que melhor se encaixam nesse modelo, são em maioria, doenças infantis, como a varicela, varíola, a rubéola e a caxumba. O sistema de EDO que representa esse modelo é dado por:

$$\begin{cases} S'(t) = -\alpha SI \\ I'(t) = \alpha SI - \beta I \\ R'(t) = \beta I \end{cases} \quad (28)$$

tal que $\alpha, \beta > 0$, $N = S + I + R$ e as condições iniciais são $R(0) = 0, I(0) = I_0$ e $S(0) = N - I_0$, sendo $I_0 \in \mathbb{R}$. Estes problemas exploram diferentes aspectos da dinâmica das epidemias e requerem habilidades avançadas em equações diferenciais, análise de sistemas dinâmicos e raciocínio crítico para interpretar e resolver. Desta maneira, podem

ser adaptados para desafios de olimpíadas matemáticas. No caso de previsão e controle, pode-se solicitar aos competidores que determinem o número esperado de pessoas infectadas ao longo do tempo, dependendo da taxa de infecção e de recuperação. Nesse contexto, os competidores podem ser convidados a propor estratégias de intervenção para controlar a disseminação da doença. Quanto ao aspecto qualitativo, pode-se exigir que os estudantes analisem as propriedades matemáticas dos modelos epidemiológicos, tais como pontos de equilíbrio, estabilidade e comportamento assintótico, para interpretar o significado das soluções em relação à propagação da doença.

É fascinante observar como os conceitos matemáticos, quando combinados com recursos computacionais, são aplicados em situações do mundo real. Essa integração enriquece o campo da matemática assim como abre portas para soluções inovadoras e eficazes em diversas áreas da ciência. Em especial, questões que envolvam modelos epidemiológicos, em olimpíadas matemáticas, podem elevar o nível de desafio da competição e despertar o interesse dos participantes nessa área de pesquisa.

Referências

- [1] BASSANEZI, RODNEY CARLOS. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. 4. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2002.
- [2] ROSSUM, GUIDO VAN. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2021. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Guido_van_Rossum&oldid=61161128. Acesso em: 16 de maio de 2021.
- [3] STEWART, JAMES. *Cálculo*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, v.1, 2013.
- [4] RUGGIERO, MÁRCIA A. GOMES; LOPES, VERA LÚCIA DA ROCHA. *Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais*. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2000.
- [5] SILVA, ANGELO ANTUNES DA ROCHA; DIDIER,

MARIA ÂNGELA CALDAS; BONFIM, SILVIO CAVALCANTI. *Construção de Modelos Matemáticos com o Python: uma motivação para o estudo de Cálculo Diferencial e Lógica Matemática*. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, Sergipe, volume 9, número 1, páginas 1-24, 2024. <https://doi.org/10.34179/revistem.v9i1.16811>

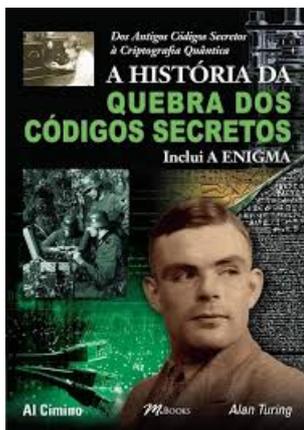
[6] PYTHON SOFTWARE FOUNDATION. (n.d.) Python Documentation. <https://docs.python.org>. Acesso em: 8 de maio de 2024.

3. Indicação de Livro

A História da Quebra dos Códigos Secretos

Roberta Elaine Domingos de Araújo⁷

Em “**História da Quebra dos Códigos Secretos**”, temos uma visão abrangente e acessível do mundo da criptografia e da decodificação ao longo da história. O livro aborda como os códigos secretos moldaram eventos históricos e a importância da criptografia na segurança das comunicações.



Para decifrar um código, é necessário adotar um ponto de vista que permita uma imersão profunda na mentalidade do adversário, com o propósito de identificar os pontos fortes e fracos inerentes ao sistema de criptografia empregado. Este processo envolve um sofisticado jogo de estratégias, no qual os

⁷Discente do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco e monitora voluntária do Jornal *É Matemática*, OXENTE!

elementos de blefe são fundamentais para superar as defesas codificadas.

Os criadores de códigos e os decifradores são personagens de extraordinária tenacidade e visão, cujas contribuições são cruciais para a dinâmica das guerras de informação e do poder global. De fato, suas habilidades em criar sistemas criptográficos complexos e a destreza em quebrá-los reconfiguram os cenários estratégicos e políticos em que atuam.

O livro está organizado em 16 capítulos com histórias que tem suas origens nos complexos hieróglifos do Antigo Egito e evoluem através dos séculos, moldando-se com as necessidades e avanços tecnológicos da humanidade até o presente.

Os destaques do livro vão para os capítulos, A criação da Enigma e A Decodificação da Enigma. Estes ressaltam a importância da máquina Enigma, um dispositivo de codificação eletromecânico desenvolvido na Alemanha, amplamente utilizado durante a Segunda Guerra Mundial para criptografar comunicações militares. Desenvolvida pelo engenheiro eletricista Arthur Scherbius, usava um sistema de rotores interligados que avançava quando cada letra era cifrada. Sua importância na história da decodificação é monumental, pois sua construção desempenhou um papel crucial na vitória dos Aliados.

No capítulo 11, Os Códigos Navais Japoneses, é tratado com precisão histórica como a natureza dinâmica e a capacidade dos japoneses de alterar e atualizar frequentemente seus sistemas de codificação foi uma tática deliberada para manter a segurança de suas comunicações e dificultar a tarefa dos criptógrafos inimigos.

Esse fato impossibilitou significativamente a previsão do local exato e do momento do ataque iminente aos Estados Unidos, durante a Segunda Guerra Mundial e impediu uma resposta preventiva e eficaz por parte deles. Na manhã de 7 de dezembro de 1941, os japoneses atacaram a base naval de Pearl Harbor, demonstrando desse modo as limitações e desafios enfrentados pelos criptógrafos diante

de sistemas de codificação altamente sofisticados e em constante evolução.

Já no capítulo 15, intitulado Os Computadores Assumem o Comando, abrange como o desenvolvimento de computadores programáveis, como o Colossus e o ENIAC, levou a criptografia a outro nível, criando cifras e também descobrindo-as.

Enfim, após a leitura deste livro sua visão sobre como a criptografia transformou-se radicalmente será ampliada, mais ainda, você notará como a criptografia moderna baseia-se em princípios matemáticos avançados e em sistemas de chaves públicas e privadas, que garantem a proteção de dados em uma escala global. Com certeza ele vai expandir seus horizontes e te mostrar um aspecto da matemática que talvez, até então, você não tenha considerado.

Referências.

- [1] CIMINO. A. A História da Quebra dos Códigos Secretos: Dos Antigos Códigos Secretos à Criptografia Quântica. São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda, 2018.

4. Quem pergunta, quer saber!

Revista do Professor de Matemática (RPM, nº 44, p.57)

Severino Barros de Melo⁸

Na Revista do Professor de Matemática (RPM) (nº 44, 2000, p.57) um leitor de Maceió observou que $5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$ e pergunta: *quantos e quais são os números primos que podem ser escritos como um produto de números complexos conjugados?*

Resposta da RPM:

Infinitos. Observando que $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$, a sua pergunta fica: quantos e quais núme-

⁸Docente do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco

⁹Este resultado encontra-se demonstrado no Teorema 2.1 da dissertação, de Mestrado Profissional de Matemática - UFPB, intitulada Números Inteiros como Soma de Quadrados, de João Evangelista Cabral dos Santos.

ros primos são soma de dois quadrados?

É fácil encontrar exemplos:

$$5 = 1 + 4 \implies 5 = (1 + 2i)(1 - 2i) \\ = (2 + i)(2 - i)$$

$$17 = 1 + 16 \implies 17 = (1 + 4i)(1 - 4i)$$

$$37 = 1 + 36 \implies 37 = (1 + 6i)(1 - 6i)$$

$$13 = 4 + 9 \implies 13 = (2 + 3i)(2 - 3i)$$

$$53 = 4 + 49 \implies 53 = (2 + 7i)(2 - 7i), \text{ etc.}$$

Que há infinitos primos que são soma de dois quadrados decorre do seguinte teorema: *Qualquer que seja o número natural n , existe um primo p tal que $p = a^2 + b^2$, com a e b naturais e maiores do que n .*

Nota da Equipe de Redação do Jornal Oxente:

Esse resultado pode ser visto como uma consequência do Teorema de Fermat sobre a soma de dois quadrados⁹, o qual afirma que um número primo p pode ser expresso como soma de dois quadrados $p = a^2 + b^2$ se, e somente se, $p = 2$ ou $p \equiv 1 \pmod{4}$. Como existem infinitos primos da forma $p \equiv 1 \pmod{4}$, sempre haverá um primo maior que qualquer número natural n que possa ser escrito dessa forma. Para os interessados em uma discussão mais detalhada dos primos da forma $p = a^2 + b^2$, indicamos o livro Elementary Number Theory de David M. Burton.

5. Eventos

Fiquem Ligados!!!

- **I Workshop da SBM de Mulheres na Matemática**

- Local: Universidade Estadual de Maringá (UEM) - PR
- Data: 02 a 04 de outubro de 2024
- Mais informações: <https://sites.google.com/uem.br/iwmm-sbm/p%C3%A1gina-inicial>

• Olimpíada Titãs da Matemática

- Local: Praiamar Natal Hotel & Convention - Natal - RN
- Inscrições: Até 30 de setembro de 2024
- Data: 30 de outubro de 2024
- Mais informações: <https://titasdamatematica.com.br/>

• V Mostra de Vídeos Digitais e Educação Matemática e XVIII Semana da Matemática

- Local: Evento Híbrido - Universidade Federal de Roraima - Boa Vista - Roraima
- Data: 05 a 07 de novembro de 2024
- Mais informações: <https://www.eventos3.com.br/v-mostra-de-videos-digitais-e-educacao-matematica-xviii-semana-da-matematica-470190/>

• IX Encontro Estadual de Educação Matemática

- Local: Faculdade de Educação da Baixada Fluminense - Duque de Caxias - Rio de Janeiro
- Data: 08 a 09 de novembro de 2024
- Mais informações: https://www.eventos3.com.br/encontro-estadual-de-educacao-matematica-468642?even3_orig=online_category

• XXVII Semana da Matemática

- Local: Universidade Federal de Rondonópolis (UFR) - Rondonópolis - Mato Grosso

- Data: 25 a 29 de novembro de 2024
- Mais informações: https://www.eventos3.com.br/semat2024ufr?even3_orig=online_category

• IX Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática

- Local: Praiamar Natal Hotel & Convention - Natal - RN
- Data: 26 a 30 de novembro de 2024
- Mais informações: <https://www.sbembrasil.org.br/eventos/index.php/sipem/inscricao>

6. Soluções de Olimpíadas

OPEMAT 2022 - Nível 3

Nesta edição apresentaremos a resolução das questões discursivas e de verdadeiro ou falso da prova da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2022 referentes ao nível 3.

Problema 6.1. Considere o círculo C_a com centro na origem $O = (0, 0)$ e raio a . Seja $A = (a, 0)$ o ponto de interseção do círculo C_a com o eixo x . Considere agora, o círculo C_b , com centro C na reta OA e raio b , tangente à C_a em A , com $b < a$. O círculo C_b rola sob o círculo C_a no sentido anti-horário sem deslizar, de forma que a semirreta OC , após o rolamento, forma um ângulo θ com o eixo x , com $\theta < 2\frac{b}{a}\pi$ e T o ponto de interseção da semirreta OC com a circunferência C_a ,

Após o rolamento de C_b sob C_a por um ângulo θ , o ponto A é deslocado para o ponto $P = (x(\theta), y(\theta))$, conforme a figura abaixo:

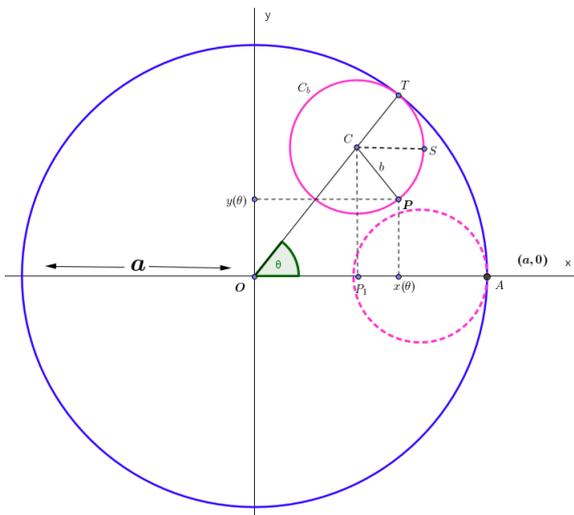


Figura 6.1: Representação do rolamento

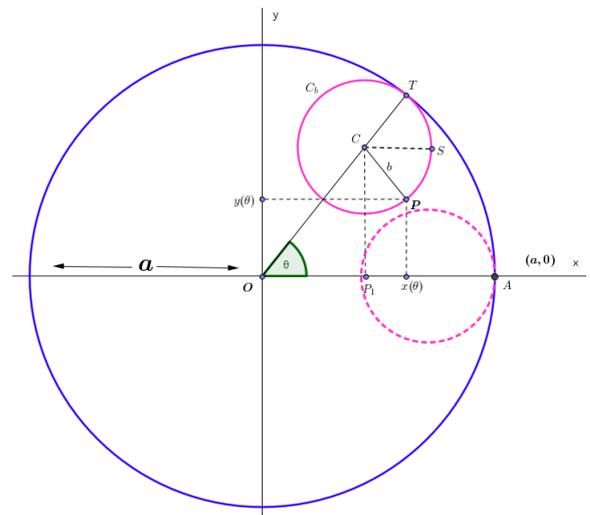


Figura 6.2: Representação do rolamento

Julgue os itens a seguir atribuindo (V) se a afirmação for VERDADEIRA ou (F) se a afirmação for FALSA.

(A) (V) (F) Se P_1 é a projeção do ponto C no eixo x , então $OP_1 = (a - b)\cos(\theta)$ e $CP_1 = (a - b)\sin(\theta)$.

(B) (V) (F) Se $\alpha = \widehat{TCP}$, então $2ab = a\theta$.

(C) (V) (F) Seja S um ponto de C_b à direita de C após o rolamento tal que o segmento CS é paralelo ao eixo x e P_2 o ponto de interseção entre a reta paralela a CS que passa por P e o segmento CP_1 . Se φ é o ângulo \widehat{SCP} , então $P_2P = b\sin(\varphi)$ e $CP_2 = b\cos(\varphi)$.

(D) (V) (F) O ângulo φ é dado por $\varphi = \alpha - \theta = \frac{(a - b)\theta}{b}$.

(E) (V) (F) As coordenadas $x(\theta)$ e $y(\theta)$ do ponto P são dadas por $x(\theta) = (a - b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{(a - b)\theta}{b}\right)$ e $y(\theta) = (a - b)\sin(\theta) - b\sin\left(\frac{(a - b)\theta}{b}\right)$.

Solução. (A) Verdadeiro.

Considere o triângulo $\triangle OCP_1$, onde P_1 é a projeção do ponto C no eixo x então,

$$\cos\theta = \frac{OP_1}{OC} = \frac{OP_1}{(a - b)} \Rightarrow OP_1 = (a - b)\cos(\theta)$$

e

$$\sin\theta = \frac{CP_1}{OC} = \frac{CP_1}{(a - b)} \Rightarrow CP_1 = (a - b)\sin(\theta).$$

(B) Falso.

Observe que $b\alpha = \text{Arco}(TP) = \text{Arco}(AT) = a\theta$. Assim, $b\alpha = a\theta$ (Figura 2). Logo, $ab = a\theta$.

(C) Falso.

Observando o triângulo $\triangle PP_2C$ concluímos que $PP_2 = b\cos(\varphi)$ e $CP_2 = b\sin(\varphi)$ pois,

$$\cos(\varphi) = \frac{P_2P}{CP} \Rightarrow P_2P = \cos(\varphi)CP = b\cos(\varphi)$$

e

$$\sin(\varphi) = \frac{CP_2}{CP} \Rightarrow CP_2 = \sin(\varphi)CP = b\sin(\varphi).$$

(D) Verdadeiro.

Sendo S um ponto de C_b após o rolamento tal que o segmento CS é paralelo ao eixo x , olhando para os triângulos $\triangle P_2PC$ e $\triangle SCP$, note que φ_1 e φ_2 são alternos internos, logo $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. Assim, $\varphi = \alpha - \theta = \frac{(a\theta)}{b} - \theta = \frac{(a - b)\theta}{b}$.

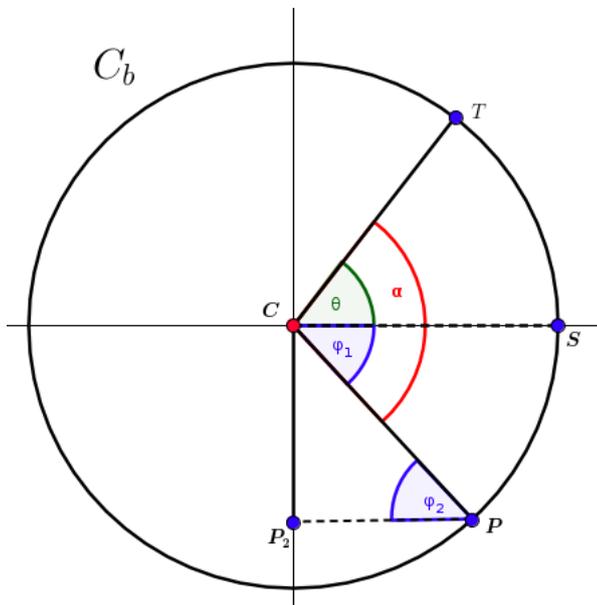


Figura 6.3: Círculo C_b

(E) Verdadeiro.

Pela figura observamos que $x(\theta) = OP_1 + PP_2$ e $y(\theta) = CP_1 - CP_2$. Pelo que vimos nos itens anteriores segue que as coordenadas $x(\theta)$ e $y(\theta)$ de P são dadas por

$$\begin{aligned} x(\theta) &= (a - b)\cos(\theta) + b\cos(\varphi) \\ &= (a - b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{(a - b)\theta}{b}\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y(\theta) &= (a - b)\sen\theta - b\sen(\varphi) \\ &= (a - b)\sen(\theta) - b\sen\left(\frac{(a - b)\theta}{b}\right). \end{aligned}$$

□

Problema 6.2. No intervalo entre as aulas de geometria e teoria dos números da “Escola Olímpica de Matemática”, Francisco pediu a professora Maité a senha de acesso ao laboratório de computação para jogar “League of Legends” com seus amigos. A professora Maité disse a Francisco que só daria a senha de acesso ao laboratório se ele determinasse a solução da equação:

$$2^{(x-1)} + 3^x = 27^x \cdot 2^{(-2x-1)}.$$

Sabendo que Francisco e seus amigos conseguiram jogar “League of Legends” no laboratório, qual

foi a solução encontrada por ele?

Solução. Observe que

$$\begin{aligned} 2^{(x-1)} + 3^x &= 27^x \cdot 2^{(-2x-1)} \\ &= \frac{27^x}{2^{2x+1}}, \end{aligned}$$

multiplicando por 2 em ambos os membros, obtemos

$$2^x + 2(3^x) = \frac{27^x}{4^x}.$$

Agora dividindo ambos os lados da equação por 2^x , obtemos

$$\begin{aligned} 1 + 2\frac{(3^x)}{2^x} &= \frac{27^x}{8^x} \\ \implies 1 + 2\left(\frac{3}{2}\right)^x &= \left(\frac{27}{8}\right)^x \\ \implies 1 + 2\left(\frac{3}{2}\right)^x &= \left(\frac{3}{2}\right)^{3x}. \end{aligned}$$

Fazendo agora $\varphi = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, substituindo na equação acima obtemos

$$1 + 2\varphi = \varphi^3 \implies \varphi^3 - 2\varphi - 1 = 0. \quad (29)$$

Fatorando o polinômio à esquerda da igualdade, obtemos

$$\varphi^3 - 2\varphi - 1 = (\varphi^2 - \varphi - 1)(\varphi + 1).$$

Logo as soluções da equação (29) são $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $\varphi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ e $\varphi = -1$. Como $\varphi = \left(\frac{3}{2}\right)^x > 0$, então a única solução possível é $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ que é o número de ouro. Assim, temos

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (30)$$

Tomando o logaritmo na base e em ambos os lados da equação (30), obtemos que a senha encontrada é

$$x = \frac{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}. \quad (31)$$

□

Problema 6.3. Considere a seguinte expressão algébrica

$$\sqrt{1000 + \sqrt[10]{n}} + \sqrt{1000 - \sqrt[10]{n}}.$$

Determine a quantidade de números inteiros $n \geq 1$ que torna a expressão acima um número inteiro.

Solução. No que segue, chamaremos a expressão acima de um certo número inteiro $K > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \sqrt{1000 + \sqrt[10]{n}} + \sqrt{1000 - \sqrt[10]{n}} &= K \\ \Rightarrow 1000 + \sqrt[10]{n} + 1000 - \sqrt[10]{n} &+ 2\sqrt{1000 \cdot 1000 - \sqrt[5]{n}} = K^2 \\ \Rightarrow 4000 > 2000 + 2\sqrt{1000 \cdot 1000 - \sqrt[5]{n}} &= K^2 \\ \Rightarrow 2\sqrt{1000 \cdot 1000 - \sqrt[5]{n}} = K^2 - 2000 &\geq 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$n = \left[1000 \cdot 1000 - \left(\frac{K^2 - 2000}{2} \right)^2 \right]^5$$

e

$$2000 \leq K^2 < 4000 \implies 45 \leq K < 63.$$

Como n é um número inteiro então K^2 é um número par, consequentemente, K é um número par. Desde que

$$46 \leq K \leq 62$$

então

$$K \in \{46, 48, 50, \dots, 60, 62\},$$

isto é, para cada K inteiro e par, teremos um único inteiro n , o que mostra que a resposta desejada é

9.

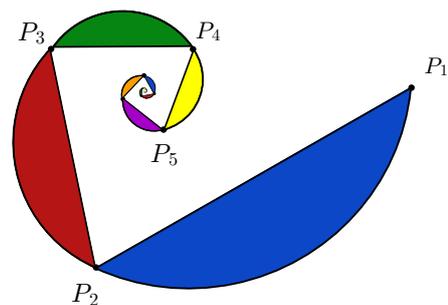
□

Problema 6.4. No “Multiverso” do Pirraia e da Piveta, existe uma estrutura plana articulada composta por infinitos segmentos circulares associados às cordas $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \dots$ conforme a figura a seguir.



Deseja-se calcular a área total dessa estrutura, mas apenas a área do segmento circular maior é conhecida. Nossa dupla resolveu esse problema quando descobriu que existe uma configuração para essa estrutura (ver figura abaixo) de um modo que, para cada $n \geq 1$:

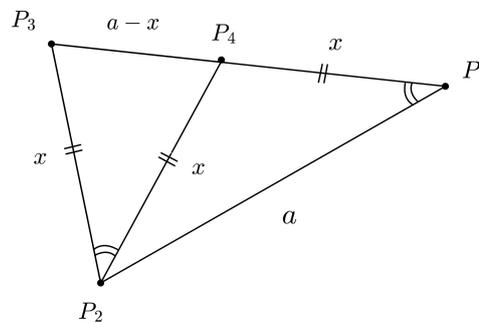
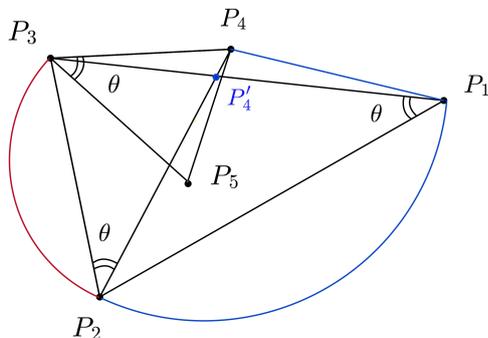
- (i) os triângulos $P_nP_{n+1}P_{n+2}$ são semelhantes (com esta ordem dos vértices);
- (ii) o ponto P_{n+3} está a uma mesma distância dos segmentos P_nP_{n+1} e $P_{n+1}P_{n+2}$;
- (iii) o arco de círculo P_nP_{n+1} possui centro em P_{n+3} .



Sendo assim, determine a soma total das áreas dessa estrutura, sabendo que a área do maior segmento circular vale $5 - \sqrt{5}$.

Solução. Primeiramente, note que os pontos P_n, P_{n+2} e P_{n+3} são colineares, para todo $n \geq 1$.

De fato, para simplificar a notação, vamos verificar isto apenas para os pontos P_1, P_3 e P_4 , pois o argumento é o mesmo para o caso geral.

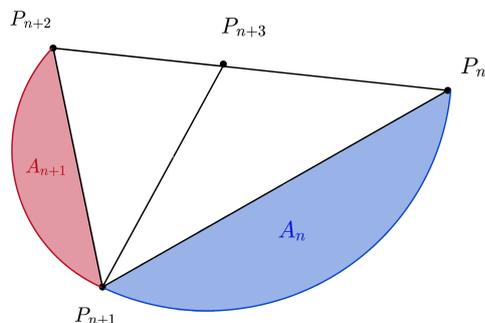


Façamos $P_3\hat{P}_1P_2 = \theta$. Por (i), temos que $P_4\hat{P}_2P_3 = \theta$. A condição (ii) implica que P_4 pertence a bissetriz do ângulo $P_1\hat{P}_2P_3$, logo $P_1\hat{P}_2P_4 = \theta$.

Por fim, a hipótese (iii) assegura que o triângulo $P_1P_2P_4$ é isósceles. Daí, $P_4\hat{P}_1P_2 = P_1\hat{P}_2P_4 = \theta = P_3\hat{P}_1P_2$, donde P_1, P_3 e P_4 estão alinhados.

Aplicando o mesmo raciocínio para os demais triângulos é possível concluir que, para todo $n \geq 1$, os triângulos $P_nP_{n+1}P_{n+2}$ são isósceles e tais que $P_nP_{n+3} = P_{n+3}P_{n+1} = P_{n+1}P_{n+2}$. Em particular,

$$P_1P_4 = P_4P_2 = P_2P_3.$$



Note que os triângulos $P_nP_{n+1}P_{n+3}$ também são semelhantes para cada $n \geq 1$. Logo, os segmentos circulares são semelhantes e, portanto, a sequência das áreas A_1, A_2, \dots forma uma progressão geométrica P.G (A_1, A_2, A_3, \dots) cuja razão $q = \frac{A_{n+1}}{A_n}$ entre duas áreas consecutivas é dada pelo quadrado da razão de semelhança. A razão de semelhança pode ser calculada por $\frac{P_2P_3}{P_1P_2}$.

Dada a semelhança $P_1P_2P_3 \sim P_2P_3P_4$ e considerando $P_1P_2 = a$ e $P_2P_3 = x$, segue-se que

$$0 < \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \Rightarrow x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a.$$

$$\text{Daí, } \frac{P_2P_3}{P_1P_2} = \frac{a}{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$$\text{Logo, a razão } q \text{ entre as áreas é } q = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Desta forma, a soma das infinitas áreas que compõem a estrutura é dada por

$$S = \frac{A_1}{1-q} = \frac{5-\sqrt{5}}{1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2(5-\sqrt{5})}{\sqrt{5}-1}$$

$$= \frac{2(5-\sqrt{5})}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2 \cdot 4\sqrt{5}}{4} = 2\sqrt{5}.$$

□

Problema 6.5. O Pi-raia possui em seu quarto uma caixa contendo 3 medalhas de ouro, 3 de prata e 3 de bronze, sendo que medalhas de um mesmo material são indistinguíveis. De quantos modos o Pi-raia pode dispô-las em fila sobre uma prateleira se ele não deseja que medalhas de um mesmo material fiquem juntas?

Solução. Representando por “O”, “P” e “B” os três materiais (ouro, prata e bronze), podemos identificar uma disposição das medalhas sobre a prateleira com um anagrama da palavra OOO PPP BBB. Denotemos por

$$\Omega = \{\text{anagramas de } OOO PPP BBB\}$$

e sejam

$X = \{\text{anagramas de } OOO PPP BBB \text{ nos quais ocorre o bloco } OO\}$

$Y = \{\text{anagramas de } OOO PPP BBB \text{ nos quais ocorre o bloco } PP\}$

$Z = \{\text{anagramas de } OOO PPP BBB \text{ nos quais ocorre o bloco } BB\}$.

O problema consiste, portanto, em contar os elementos de

$$|\Omega| - |X \cup Y \cup Z|.$$

Temos

$$|\Omega| = \frac{9!}{3!3!3!} = 1.680.$$

Por outro lado, o princípio da inclusão e exclusão afirma que

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|.$$

Para contar os anagramas de X , basta supor que duas letras OO formam um único bloco OO . Assim, teremos 7 letras e o bloco OO para permutar, o que pode ser feito de

$$\frac{8!}{3!3!} = 1.120 \text{ modos.}$$

Entretanto, ao contar estes anagramas, contamos os anagramas que possuem o bloco OOO duas vezes. Com efeito, estes foram contados uma vez quando contamos os anagramas que possuíam uma letra O seguida do bloco OO e outra vez quando contamos os anagramas que possuíam o bloco OO seguido do bloco O . O número de anagramas que contêm o bloco OOO é

$$\frac{7!}{3!3!} = 140.$$

Logo, $|X| = 1.120 - 140 = 980$. Por um raciocí-

nio análogo, conclui-se que $|Y| = |Z| = 980$.

Os anagramas de $X \cap Y$ contêm um bloco OO , um bloco PP e 5 letras, logo temos

$$\frac{7!}{3!} = 840$$

anagramas ao todo. Aqui, porém, foram contados duas vezes os anagramas que contêm um bloco OOO e um bloco PP e duas vezes os anagramas que contêm um bloco OO e um bloco PPP . Os anagramas que contêm um bloco OOO e um bloco PP são em número

$$\frac{6!}{3!} = 120,$$

e o mesmo ocorre para os anagramas que contêm um bloco OO e um bloco PPP . Descontando do valor obtido originalmente, ficamos com $840 - 2 \cdot 120 = 600$ anagramas. Porém, neste processo, os anagramas que contêm os blocos OOO e PPP , que são em número

$$\frac{5!}{3!} = 20,$$

foram contados quatro vezes e, em seguida, descontados quatro vezes. Logo, como não foram contados nenhuma vez, devemos contá-los uma única vez. Assim, o total de elementos de $X \cap Y$ é 620. Por simetria, $|X \cap Z| = |Y \cap Z| = 620$.

Por fim, para contar os elementos de $X \cap Y \cap Z$, contamos os anagramas que contêm os blocos OO , PP e BB e as letras O , P e B , o que nos dá $6! = 720$ anagramas. Nestes, contamos duas vezes os anagramas que contêm OOO , PP e BB , duas vezes os anagramas que contêm OO , PPP e BB e duas vezes os anagramas que contêm OO , PP e BBB . Como cada um destes ocorre em número $5! = 120$, temos que o novo sub-total é $720 - 3 \cdot 120 = 360$. Fazendo isso, os anagramas que contêm OOO , PPP e BB foram descontados quatro vezes, quando haviam sido contados 4 vezes, originalmente. O mesmo vale para os anagramas que contêm OOO , PP e BBB e OO , PPP e BBB . Como cada caso destes contêm $4! = 24$

anagramas, incluímos estes na nossa contagem, obtendo assim o subtotal $= 360 + 3 \cdot 24 = 432$.

Finalmente, os anagramas que contém os blocos OOO, PPP e BBB, que são em número $3! = 6$ foram contados 8 vezes inicialmente, descontados 12 vezes e contados novamente 6 vezes, de modo que estes anagramas foram contados 2 vezes. Assim, o número de elementos de $X \cap Y \cap Z$ é, de fato, $432 - 6 = 426$.

Portanto, a resposta final é

$$\begin{aligned} |X \cup Y \cup Z| &= |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| \\ &\quad - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z| \\ &= 1.680 - (3 \cdot 980 - 3 \cdot 620 + 426) \\ &= 174. \end{aligned}$$

□

7. Problemas

Convidamos o leitor a responder alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Enviem as soluções dos problemas propostos para o e-mail: ematematicaoxente@gmail.com

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, o envio do arquivo (.tex), no modelo disponível no site, deve ser realizado até **09/12/2024**.

Problema 1. (Olimp. Titãs, Nível Febe, 2023) Sejam $n, p, q \in \mathbb{N}$, com p e q primos. Quantas soluções tem a equação

$$n = \sqrt{4pq + 1}.$$

- (a) 0 (b) 1 (c) 5 (d) 10

Problema 2 (XXXVII Olimpíada de Matemática da UNICAMP - 2021). Uma jornalista encontrou documentos de uma empresa de produtos químicos com informações detalhadas sobre a aplicação de dois testes de contaminação feitos em todos seus funcionários, um para a Substância A e outro para a Substância B. Os documentos eram antigos e por

isso pouca informação estava legível. O resultado de cada teste é dito *Falso Positivo* quando fornece o resultado positivo para a presença da substância, mas a substância não está de fato presente no corpo da pessoa testada, ou seja, é apenas um erro. Da mesma forma, o resultado do teste é dito *Falso Negativo* quando fornece o resultado negativo para a presença da substância, porém a substância estava presente no corpo da pessoa testada. A jornalista conseguiu também descobrir as seguintes informações:

- 70 funcionários receberam o resultado Falso Positivo para a substância A;
- 273 funcionários tiveram resultado Negativo para a substância A e de fato não estavam contaminados com esta substância;
- 5% de todos os testes que resultaram positivo para a Substância A eram, na verdade, Falsos Positivos (ou seja, 5% destes estavam errados);
- 176 funcionários tiveram resultado Falso Negativo para a substância B;
- 528 funcionários tiveram resultado Negativo para a substância B e de fato não estavam contaminados com esta substância;
- 5% de todos os testes que resultaram positivo para a Substância B eram, na verdade, Falsos Positivos (ou seja, 5% destes estavam errados);
- a porcentagem de Falsos Negativos nos resultados negativos da substância A era igual à porcentagem de Falsos Negativos nos resultados negativos da substância B.

Determine a quantidade de funcionários cujo resultado foi positivo para a presença da substância B mas que, na verdade não estavam contaminados por esta substância.

Problema 3 (OBMEP 2022). Ana, Cláudia, Joaquim, Pedro e Fabiana se esconderam durante uma brincadeira. Nessa brincadeira,

- havia exatamente duas crianças na casa da árvore;
- Pedro, que nasceu em São Paulo, se escondeu junto com Fabiana;
- uma menina se escondeu sozinha;
- Ana não estava sozinha em seu esconderijo;
- o menino pernambucano estava na casa da árvore.

Quem estava na casa da árvore?

- Pedro e Fabiana;
- Joaquim e Cláudia;
- Ana e Joaquim;
- Pedro e Ana;
- Cláudia e Fabiana.

8. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n. 30, abril de 2024**.

Problema 1 (XXVII Olimp. de Mat. da Unicamp(OMU) - 2011). Considere duas velas que têm o mesmo comprimento e são feitas de materiais diferentes. Uma vela queima completamente em 6 horas e a outra vela queima completamente em 4 horas. Determine a que horas as velas devem ser acesas de modo que às 16 horas o comprimento de uma vela seja três quartos do comprimento da outra vela.

Solução. Denotamos por $L_1(t)$ o comprimento da vela que queima em 6 horas e $L_2(t)$ o comprimento da vela que queima em 4 horas, em função do tempo, isto é,

$$L_1(t) = L - \frac{L}{6}t \quad \text{e} \quad L_2(t) = L - \frac{L}{4}t,$$

em que L é o comprimento de cada uma das velas.

Temos que determinar um tempo \bar{t} no qual as velas, depois de acesas, estarão na forma solicitada, isto é, $L_2\bar{t} = \frac{3}{4}L_1\bar{t}$, pois a vela L_2 queima mais rápido.

Substituindo pelos valores acima, temos:

$$L - \frac{L}{4}\bar{t} = \frac{3}{4} \left(L - \frac{L}{6}\bar{t} \right).$$

Assim,obtemos a seguinte equação em \bar{t} :

$$1 - \frac{1}{2}\bar{t} = 0$$

e assim $\bar{t} = 2$.

Portanto, depois de 2 horas acesas os comprimentos das velas terão a relação pedida. Logo, acendendo as velas às 14 horas, às 16 horas as velas estarão com os comprimentos na relação solicitada. \square

Problema 2. (Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte (OMRN) - 2019) Seja $h(x) = x \cdot g(x)$, onde $g(x) = f^{-1}(x)$. A tabela a seguir fornece alguns valores assumidos por $f(x)$ e por sua derivada $f'(x)$.

x	$f(x)$	$f'(x)$
2	4	-1
3	5	2
5	1	3

O valor de $h'(5)$ é:

- $\frac{3}{2}$
- $\frac{7}{2}$
- $\frac{11}{2}$
- $\frac{13}{2}$
- $\frac{17}{2}$

Solução. Note que, ao derivar $h(x)$, pela regra do produto, obtemos:

$$[h(x)]' = 1 \cdot g(x) + x \cdot [g(x)]'.$$

Então, $h'(5) = g(5) + 5 \cdot g'(5)$.

Observe que, $g(x) = f^{-1}(x)$ e por definição a derivada da função inversa é dada por:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

$$\text{Assim, } g'(5) = \frac{1}{f'(f^{-1}(5))} = \frac{1}{f'(g(5))}.$$

Portanto, $h'(5) = 3 + 5 \cdot \frac{1}{f'(3)}$, pois $g(5) = f^{-1}(5) = 3$, pela tabela.

Isto implica que

$$h'(5) = 3 + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{6+5}{2} = \frac{11}{2}.$$

Logo, a alternativa correta é c).

□

Problema 3. (OBM - Nível Universitário - 2018)

Para quantos números primos p o número $p^3 - 4p + 9$ é um quadrado perfeito?

- a) 2 b) 3 c) 5 d) 7.

Solução. ¹⁰ Precisamos que a expressão do enunciado seja um quadrado perfeito. Assim, devemos ter a expressão igual a n^2 para algum $n \in \mathbb{Z}$, ou seja, $p^3 - 4p + 9 = n^2$.

Escrevendo tudo no módulo p , $n^2 \equiv 9 \pmod{p}$. Daí, $n \equiv 3 \pmod{p}$ ou $n \equiv -3 \pmod{p}$, isto é,

$$n = q \cdot p \pm 3, \text{ com } q \in \mathbb{N}^*.$$

Elevando os dois lados da igualdade ao quadrado, temos

$$n^2 = (q \cdot p \pm 3)^2.$$

Porém, sabemos quem é n^2 , então:

$$p^3 - 4p + 9 = q^2 \cdot p^2 \pm 6qp + 9.$$

Subtraindo 9, dos dois lados da equação, e dividindo a expressão acima por p , obtemos:

$$\begin{aligned} p^2 - 4 &= q^2 \cdot p \pm 6q \Leftrightarrow \\ p^2 - q^2 p &= 4 \pm 6q \Leftrightarrow \\ p(p - q^2) &= 2(2 \pm 3q). \end{aligned}$$

Temos que $p|2$ ou $p|(2 \pm 3q)$. Como p é primo já obtemos $p = 2$ como uma das possíveis soluções.

Além disso, $p = 2$ é o único número primo par. Assim, agora consideremos p ímpar, para resolver o

caso $p|(2 \pm 3q)$. Note que,

$$p \leq 3q + 2 \Rightarrow \frac{p-2}{3} \leq q.$$

Observe que, ao multiplicar os dois lados de

$$\frac{p-2}{3} \leq q,$$

por p , em seguida subtrair 3, obtemos:

$$\frac{(p-2) \cdot p}{3} - 3 \leq qp - 3.$$

Porém, temos também $n = qp \pm 3$, então $n \geq qp - 3$.

Daí,

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{(p-2) \cdot p}{3} - 3 \Leftrightarrow \\ n &\geq \frac{p^2 - 2p - 9}{3}. \end{aligned}$$

Elevando os dois lado da desigualdade ao quadrado:

$$n^2 \geq \frac{(p^2 - 2p - 9)^2}{3^2}.$$

Substituindo a expressão de n^2 :

$$\begin{aligned} p^3 - 4p + 9 &\geq \frac{p^4 - 4p^3 - 14p^2 + 36p + 81}{9} \Leftrightarrow \\ 9p^3 - 36p + 81 &\geq p^4 - 4p^3 - 14p^2 + 36p + 81. \end{aligned}$$

Organizando, temos

$$\begin{aligned} p^4 - 13p^3 - 14p^2 + 72p &\leq 0 \\ p(p-2) \cdot (p^2 - 11p - 36) &\leq 0. \end{aligned}$$

Como supomos p ímpar, $p > 2$. Logo, $p(p-2)$ é um valor maior que 0 e, conseqüentemente,

$$(p^2 - 11p - 36) \leq 0.$$

Ao resolver esta inequação, obtemos

$$\frac{11 - \sqrt{265}}{2} \leq p \leq \frac{11 + \sqrt{265}}{2}.$$

Logo, p está em um intervalo aproximado entre

¹⁰Agradecemos ao leitor Raphael Thales Andrade de Assis que interagiu conosco e enviou uma solução a esta questão. Por questão de completudeza o comitê editorial está publicando a solução oficial.

$-2, 6$ e $13, 6$. Como queremos as soluções para p primo e natural, então teremos como possíveis valores $2, 3, 5, 7, 11$ e 13 .

Vimos que 2 já é uma solução, basta agora testar os demais valores na expressão $p^3 - 4p + 9$ e verificar

se obteremos um quadrado perfeito.

Tais valores que satisfazem o enunciado são $2, 7$ e 11 . Logo, há apenas 3 números como resposta, o que corresponde a alternativa (b). \square