É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 30, volume 1, abril de 2024

ISSN 2526-8651

Editorial

Caros Leitores,

Feliz ano novo! De fato, essa saudação cabe neste editorial pois com a presente edição, estamos iniciando nossa caminhada no ano de 2024.

Essa edição nasce sob a égide de bons tempos: a consolidação de um projeto que cresce e se afirma, no âmbito da comunidade de professores, dos alunos dos cursos de licenciatura e – este é o foco principal do nosso trabalho – dentre os participantes das Olimpíadas de Matemática. Ademais, nossos contatos para além do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE vão se ampliando. Como exemplo podemos citar o destaque dado ao nosso jornal no noticiário da Sociedade Brasileira de Matemática.

A presente edição traz na seção *artigo* um trabalho intitulado *O Teorema de Tales: uma poderosa ferramenta matemática (I)*, de autoria do professor Eudes Mendes Barboza da UFRPE, junto com seus alunos Pedro Victor Souza Freitas e Heloisa Cardoso Barbosa Gomes. O artigo apresenta como ponto de partida o supracitado teorema e em seguida destaca vários resultados e aplicações que surgem tendo como base esse teorema.

A seção *curiosidade* traz a contribuição da aluna Roberta Elaine Domingos de Araújo, do Curso de Licenciatura em Matemática da UFRPE, abordando a *Curva de Agnesi*. Esse gráfico ganhou notoriedade não só pelo fato de ter sido estudado por uma mulher, coisa rara na produção matemática da época, mas por um erro de tradução, que induzia os desinformados a atribuir aspectos misteriosos a esta curva.

A *indicação de leitura* apresenta a sugestão do professor Severino Barros de Melo, do Departamento de Educação da UFRPE, acerca do livro *Número: a linguagem da ciência* - uma obra de divulgação escrita pelo Matemático Tobias Dantzig - livro que mereceu comentários elogiosos até mesmo de Albert Einstein.

A seção *Quem pergunta, quer saber!* esclarece a dúvida se foi Pitágoras quem realmente descobriu a relação entre os lados de um triângulo retângulo.

Temos ainda um conteúdo extra sobre a 1ª edição da Olimpíada de Professores de Matemática do Ensino Médio (OPMBr). Nesse certame, dois professores egressos da UFRPE, Milena Monique de Santana Gomes e Eliton Mendes Pedrosa Simes, estão classificados entre os 20 melhores do Brasil e foram premiados, respectivamente, com medalhas de ouro e prata.

Finalizamos a edição como sempre com *Problemas Propostos*, *soluções de questões anteriores* enviadas pelos leitores, com as soluções da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) 2022, segunda fase, nível 1 e com informes acerca de alguns eventos programados para 2024.

Com alegria em compartilhar com cada um nosso trabalho e gratidão por prestigiarem o É Matemática, OXENTE!, desejamos uma ótima leitura.

A Redação.

Sumário

1. Artigo

O Teorema de Tales: uma poderosa ferramenta matemática (I)

Pedro Victor Souza Freitas & Eudes Mendes Barboza & Heloisa Cardoso Barbosa Gomes

UFRPE - CEGEN - Departamento de Matemática
52171-900 - Recife - PE - Brasil

Introdução

A Matemática pode ser dividida em áreas de conhecimento, sendo a Geometria uma delas. Um dos resultados importantes da Geometria é o Teorema de Tales, o qual será a base do estudo desse trabalho.

Tales de Mileto foi um filósofo, engenheiro, astrônomo e matemático da Grécia Antiga que nasceu em torno de 624 a.C [2, 5, 7]. Além disso, ele é mencionado como um dos sete sábios da Grécia Antiga [7]. Tales tem alguns feitos notáveis, um desses é o fato de ele ser " frequentemente saudado como o primeiro matemático verdadeiro - criador da organização dedutiva da geometria." (Boyer, 2012, p. 55).

Ademais, Tales fez contribuições para a ciência de forma geral, mas em particular, muitas contribuições da Geometria lhe são atribuídas como propriedades geométricas, resoluções de problemas da época e teoremas [3]. Uma dessas contribuições é o teorema que leva o seu nome.

Aqui, apresentaremos uma demonstração do Teorema de Tales usando argumentos que possam ser entendidos por estudantes da Educação Básica. E por fim, exibiremos uma série de aplicações desse teorema, mostrando sua versatilidade e como pode ser usado como uma poderosa ferramenta para mostrar outros resultados matemáticos.

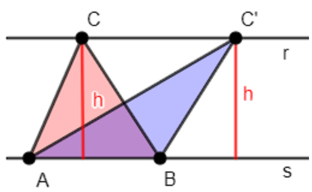
O Teorema de Tales

Inicialmente, vamos apresentar o Teorema de Tales e prová-lo. Para isto, vamos precisar de alguns resultados que serão demonstrados brevemente.

Proposição 1.1. *Dadas duas retas paralelas r e s, quaisquer dois triângulos ΔABC e $\Delta ABC'$, com a mesma base AB situada sobre a reta s e com os vétices C e C' sobre r, têm a mesma área.*

Demonstração: Consideremos duas retas paralelas r e s. Construindo quaisquer dois triângulos ΔABC e $\Delta ABC'$ com a mesma base AB em que AB está na reta s e os outros vértices C e C' estão na reta r (ver Figura 1.1).

Figura 1.1: Esquema da demonstração da Proposição 1.1



Fonte: Autoria própria.

Sabemos que a área de um triângulo ΔABC é dada por

$$[ABC] = \frac{b \cdot h}{2},$$

em que b representa a medida da base e h a medida da altura. Como as retas r e s são paralelas, as alturas destes triângulos têm a mesma medida. Daí, como têm a mesma base, segue que as áreas dos triângulos são iguais, ou seja,

$$[ABC] = [ABC'].$$

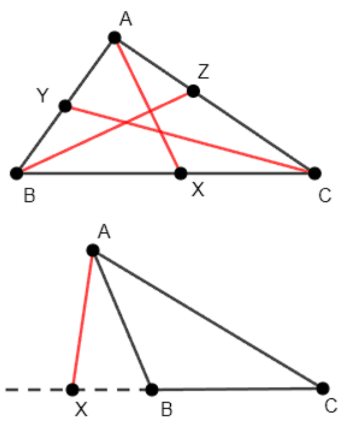
■

Consideremos a seguinte definição.

Definição 1.1. Sejam ΔABC um triângulo e X, Y e Z pontos nos lados BC, AC e AB, respectivamente, ou em seus respectivos prolongamentos. Os segmentos AX, BY e CZ são denominados de cevianas do ΔABC.

Isto é, uma ceviana de um triângulo é um segmento de reta que liga um dos vértices a um ponto do lado oposto a esse vértice ou ao prologamento desse lado (ver Figura 1.2).

Figura 1.2: Cevianas

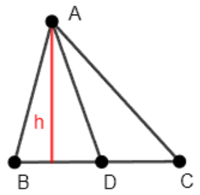


Fonte: Autoria própria.

Veremos agora uma proposição que nos auxiliará na demonstração do Teorema de Tales.

Proposição 1.2. *Dado um triângulo qualquer ΔABC, considere a ceviana AD (ver Figura 1.3), então* $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \dfrac{[ABD]}{[ACD]}$.

Figura 1.3: Esquema da demonstração da Proposição 1.2.



Fonte: Autoria própria.

Demonstração: Sabemos que $[ABD] = \dfrac{\overline{BD} \cdot h}{2}$ e $[ACD] = \dfrac{\overline{CD} \cdot h}{2}$. Dessa forma,

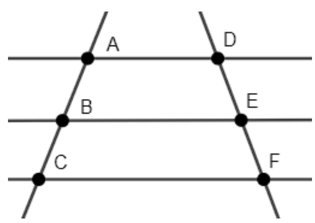
$$\frac{[ABD]}{[ACD]} = \frac{\dfrac{\overline{BD} \cdot h}{2}}{\dfrac{\overline{CD} \cdot h}{2}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}.$$

■

Usaremos as proposições anteriores para demonstrar o Teorema de Tales.

Teorema 1.3. ***(Teorema de Tales)*** *Os segmentos determinados por um feixe de retas paralelas sobre duas transversais são diretamente proporcionais (ver Figura 1.4). Em outros termos,* $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$.

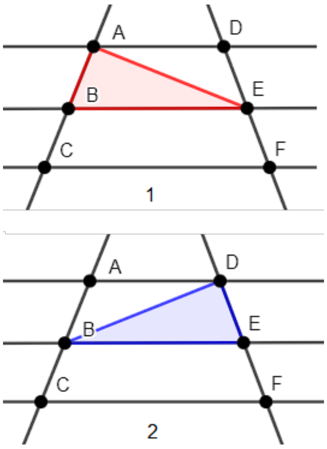
Figura 1.4: Esquema para visualização do Teorema 1.3.



Fonte: Autoria própria.

Demonstração: Dado o feixe de três retas paralelas e duas retas transversais, podemos construir os triângulos ΔABE e ΔBDE, como mostra a Figura 1.5 a seguir.

Figura 1.5: Figura suporte para Proposição 1.1 na demonstração do Teorema 1.3. 1 ΔABE e 2 ΔBDE.



Fonte: Autoria própria.

Perceba que pela Proposição 1.1, temos que

$$[\Delta ABE] = [\Delta BDE]. \tag{1}$$

De forma análoga, $[\Delta BEC] = [\Delta BEF]$. Por (1), segue que

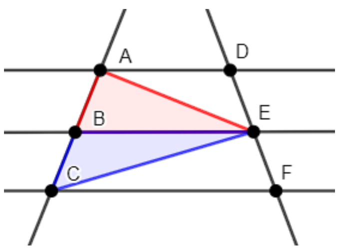
$$\frac{[\Delta ABE]}{[\Delta BEC]} = \frac{[\Delta DBE]}{[\Delta BEC]}.$$

Como $[\Delta BCE] = [\Delta BEF]$, temos que

$$\frac{[\Delta ABE]}{[\Delta BEC]} = \frac{[\Delta BDE]}{[\Delta BEF]}.$$

Consideremos os triângulos ΔABE e ΔCBE, como mostra a Figura 1.6 a seguir.

Figura 1.6: Esquema para uso da Proposição 1.2 na demonstração do Teorema 1.3.



Fonte: Autoria própria.

Pela Proposição 1.2, temos que

$$\frac{[\Delta ABE]}{[\Delta CBE]} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

Por outro lado, $\dfrac{[\Delta BED]}{[\Delta BEF]} = \dfrac{\overline{ED}}{\overline{EF}}$. Portanto, temos

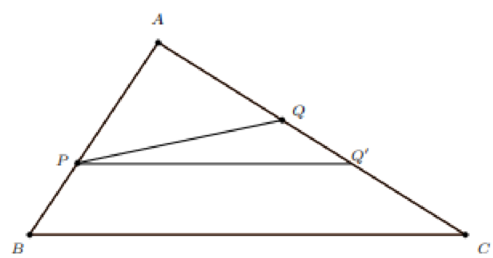
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}.$$

■

Vejamos agora algumas situações em que é possível aplicar o Teorema de Tales, como por exemplo, determinar a altura de uma pirâmide.

Exemplo 1.1. (Portal da OBMEP) Considere o triângulo ABC e os pontos P e Q sobre os lados AB e AC, respectivamente. Se $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}}$, mostre que $PQ \parallel BC$.

Figura 1.7: Esquema de visualização do Exemplo 1.1.



Fonte: Portal da OBMEP.

Resolução: Suponha que PQ não seja paralelo a BC (veja a figura acima). Trace, então, uma paralela PQ' por P a BC, como mostrado na figura 1.7. Pelo Teorema de Tales, temos

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ'}}{\overline{Q'C}}.$$

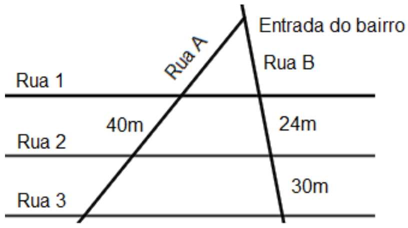
Mas, como a igualdade $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{QC}}$ é satisfeita por hipótese, temos

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AQ'}}{\overline{Q'C}}.$$

Portanto, os pontos Q e Q' são distintos e dividem o lado AC na mesma razão, o que é absurdo. Logo, PQ é paralelo a BC.

Exemplo 1.2. Um bairro foi planejado de maneira que as ruas A e B formam ruas transversais com as Rua 1, Rua 2 e Rua 3 que formam um feixe de paralelas (ver Figura 1.8).

Figura 1.8: Esquema visualização do Exemplo 1.2.



Fonte: Autoria própria.

Qual é o comprimento do trecho entre a Rua 2 e Rua 3 da Rua A?

Resolução: Seja x a medida do trecho da Rua A, entre a Rua 2 e a Rua 3. Como as ruas formam um feixe de paralelas sobre duas transversais, podemos aplicar o Teorema de Tales. Sendo assim, ficamos com

$$\frac{40}{x} = \frac{24}{30}.$$

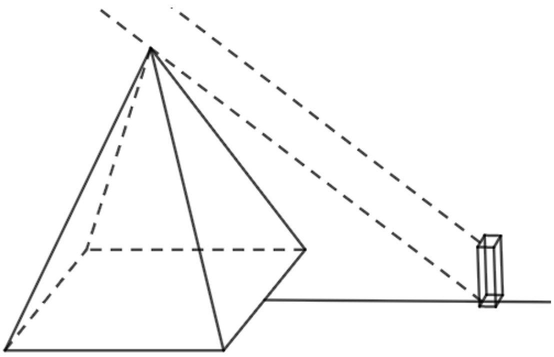
Isolando o termo que queremos descobrir, temos

$$x = \frac{40 \cdot 30}{24} = \frac{1200}{24} = 50\, m.$$

Exemplo 1.3. (Altura da pirâmide de base quadrada) Victor estava próximo de uma pirâmide de base quadrada com uma estaca de madeira e uma fita métrica. Como Victor poderia encontrar a altura dessa pirâmide de base quadrada?

Resolução: Sabendo que os raios solares têm sua trajetória em linha reta, Victor colocou uma estaca de madeira no fim da sombra feita pela pirâmide, conforme a figura a seguir.

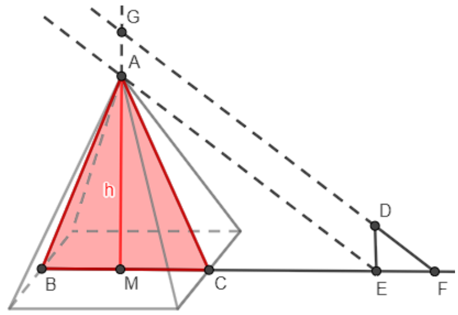
Figura 1.9: Esquema visualização do Exemplo 1.3.



Fonte: Autoria própria.

Feito isso, a secção transversal, exatamente no centro da pirâmide nos dá a seguinte figura:

Figura 1.10: Esquema resolução do Exemplo 1.3.



Fonte: Autoria própria.

Note que as retas formadas pelos segmentos DF e AE são paralelas e as retas formadas pelos segmentos AM e EM são transversais. Dessa maneira, aplicando o Teorema de Tales, temos

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{EM}}{\overline{EF}}. \tag{2}$$

Os segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{EM}$ Victor consegue medir, pois M é o ponto médio de BC e como a base é quadrada é fácil encontrar. Por outro lado, perceba que $AEDG$ forma um paralelogramo, então $\overline{DE} = \overline{AG}$ e $\overline{DE}$ Victor consegue encontrar a medida. Então, substituindo em (2) e isolando $\overline{AM} = h$, temos

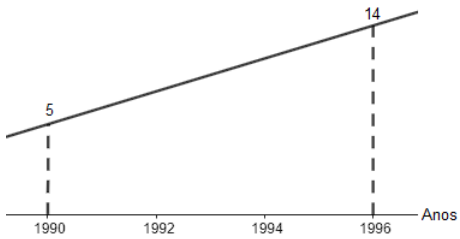
$$\overline{AM} = \frac{\overline{EM} \cdot \overline{AG}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EM} \cdot \overline{DE}}{\overline{EF}} = h.$$

Portanto, Victor conseguiu medir apenas com sua estaca e fita métrica a altura da pirâmide.

Observação 1.1. Essa forma de descobrir a altura de uma pirâmide de base quadrada pode ser estendida à medição de qualquer objeto (normalmente grande), que possua uma base com centro definido. Note ainda que se a estaca medir, por exemplo, 1 metro, o problema reduz-se a uma divisão.

Exemplo 1.4. (UEL-PR) O gráfico a seguir mostra a atividade de café, em milhões de toneladas, em certo município do Estado do Paraná.

Figura 1.11: Gráfico do exemplo 1.4.

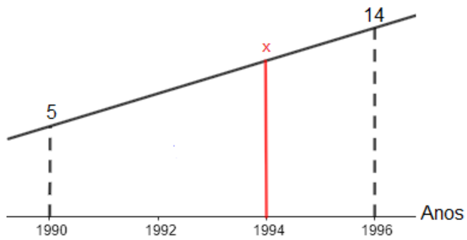


Fonte: Autoria própria.

Quanto foi a produção de café em 1994 nesse município, em milhões de toneladas?

Resolução: Façamos em 1994, no eixo dos anos, um segmento paralelo aos segmentos verticais do gráfico.

Figura 1.12: Gráfico suporte para resolução do Exemplo 1.4.



Fonte: Autoria própria.

Por construção, esses três segmentos verticais são paralelos. E, ainda, como o gráfico é linear. Perceba que esse trecho do gráfico forma um segmento de reta transversal ao eixo. Portanto, podemos usar o Teorema de Tales.
Assim,

$$\begin{aligned} \frac{14-x}{x-5} &= \frac{1996-1994}{1994-1990} \\ 56-4x &= 2x-10 \\ -6x &= -66 \\ x &= 11. \end{aligned}$$

Portanto, em 1994 teve 11 milhões de toneladas de café produzidas por esse município.

Aplicações do Teorema

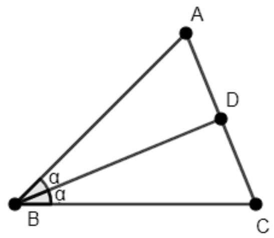
O Teorema de Tales tem diversas aplicações. Além disso, é uma ferramenta importante para demonstração de diversos outros teoremas, tais como o Teorema da Bissetriz Interna, Teorema da Bissetriz externa, Teorema Fundamental da Semelhança, Teorema de Meneleaus e Teorema de Ceva. Sendo assim, veremos como este Teorema é aplicado como ferramenta para demonstração destes resultados.

Teorema da Bissetriz Interna

Aqui, vamos demonstrar o Teorema da Bissetriz Interna e mostrar uma de suas aplicações.

Teorema 1.4. ***(Teorema da Bissetriz Interna)*** *A bissetriz interna de um triângulo qualquer divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes. Isto é, seja ΔABC um triângulo qualquer com uma bissetriz BD, como mostra a Figura 1.13 abaixo. Então,* $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$.

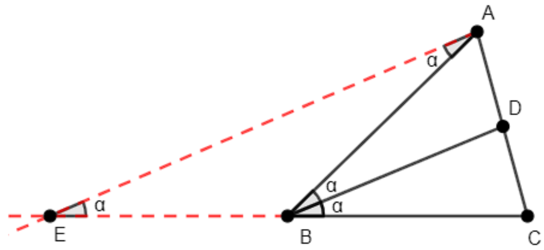
Figura 1.13: Figura suporte para Teorema 1.4.



Fonte: Autoria própria.

Demonstração: Seja ΔABC um triângulo qualquer. Considere a bissetriz no ângulo $\angle A\hat{B}C$ interceptando o lado AC no ponto D. Traçando um segmento paralelo a BD no ponto A até interceptar o prolongamento do lado BC no ponto E (ver Figura 1.14).

Figura 1.14: Figura suporte para demonstração do Teorema 1.4.



Fonte: Autoria própria.

Feito isso, note que o ângulo $\angle B\hat{A}E$ é alterno interno com o ângulo $\angle A\hat{B}D$ e o ângulo $\angle B\hat{E}A$ é correspondente ao ângulo $\angle C\hat{B}D$. Então o triângulo

ΔABE é isósceles com base AE e lados congruentes AB e BE. Por fim, podemos aplicar o Teorema de Tales considerando AC e CE como segmentos transversais e o feixe de retas paralelas sendo as retas BD e AE. Dessa forma, temos

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}.$$

Como AB e AE são congruentes, temos

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}.$$

■

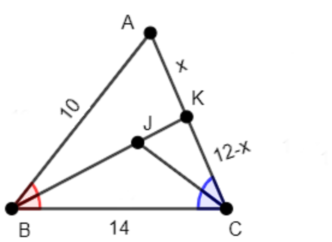
Agora vejamos uma aplicação deste Teorema. Antes disso, apresentamos a seguinte definição

Definição 1.2. Dois segmentos são ditos comensuráveis quando o quociente de suas medidas equivale a um número racional.

Exemplo 1.5. (Portal da OBMEP) Seja um triângulo ΔABC, no qual $\overline{AB} = 10$, $\overline{AC} = 12$ e $\overline{BC} = 14$. A bissetriz interna que passa por B, intercepta AC em K. A bissetriz interna que passa por C, intercepta BK em J. Determine se os segmentos BJ e JK são comensuráveis.

Resolução: Traçando o triângulo e as bissetrizes da questão, encontramos uma figura semelhante à Figura 1.15 abaixo.

Figura 1.15: Figura suporte para resolução do Exemplo 1.5.



Fonte: Autoria própria.

Como BK é uma bissetriz, podemos aplicar o Teorema da Bissetriz Interna. Dessa forma, ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{12-x}{14} &= \frac{x}{10} \\ 14x &= 120 - 10x \\ x &= \frac{120}{24} = 5. \end{aligned} \tag{3}$$

Por outro lado, podemos aplicar este teorema para a bissetriz CJ.

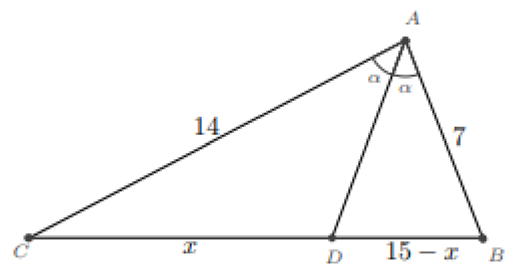
$$\frac{\overline{JK}}{12-x} = \frac{\overline{BJ}}{14}.$$

Por (3), $x = 5$. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{JK}}{7} &= \frac{\overline{BJ}}{14} \\ \frac{\overline{JK}}{\overline{BJ}} &= \frac{7}{14}. \end{aligned}$$

Tendo em vista que $\frac{\overline{JK}}{\overline{BJ}}$ equivale a um número racional, os segmentos JK e BJ são comensuráveis.

Exemplo 1.6. (Portal da OBMEP) Os lados de um triângulo medem $7cm$, $14cm$ e $15cm$. Calcule a medida do maior segmento que a bissetriz interna do ângulo oposto ao maior lado determina sobre o mesmo.



Resolução: Se ABC é um triângulo tal que $\overline{AB} = 7$, $\overline{BC} = 15$ e $\overline{CA} = 14$ (como mostra a figura), queremos calcular o comprimento do maior segmento determinado, sobre o lado BC, pela bissetriz interna partindo de A.

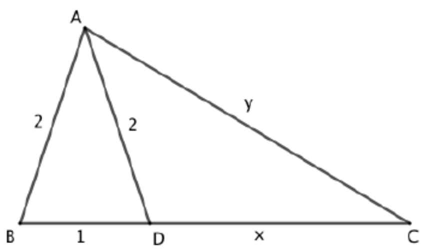
Tal segmento será o adjacente a AC (pois a proporcionalidade do teorema da bissetriz interna garante que o maior segmento determinado fica ao lado do maior lado). Sendo x a medida desse segmento, o outro segmento sobre BC medirá $15 - x$. Agora, pelo teorema da bissetriz interna,

$$\frac{15-x}{7} = \frac{x}{14} \Leftrightarrow 210 - 14x = 7x$$

$$\Leftrightarrow \quad 21x = 210 \Leftrightarrow x = 10.$$

Exemplo 1.7. (OBM-2005) O ponto D pertence ao lado BC do triângulo ΔABC. Sabendo que $\overline{AB} = \overline{AD} = 2, \overline{BD} = 1$ e os ângulos $B\hat{A}D$ e $C\hat{A}D$ são congruentes, então a medida do segmento CD é:
A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{7}{6}$.
Resolução: Considere a figura a seguir.

Figura 1.16: Figura suporte para resolução do Exemplo 1.7.



Fonte: Autoria própria.

Pelo Teorema da Bissetriz Interna:

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{y} \Rightarrow y = 2x.$$

Pela expressão do comprimento da bissetriz, temos

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AB} - \overline{BD} \cdot \overline{CD}.$$

Daí,

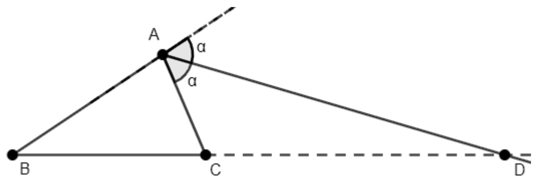
$$4 = 2y - x \Rightarrow 4 = 4x - x \Rightarrow x = \frac{4}{3}.$$

Teorema da Bissetriz Externa

A seguir provaremos o Teorema da Bissetriz Externa.

Teorema 1.5. ***(Teorema da Bissetriz Externa)*** *Se a bissetriz externa do ângulo de um triângulo qualquer intersecta a reta que contém o lado oposto, então ela divide o lado oposto externamente em segmentos proporcionais aos lados adjacentes. Ou seja, dados ΔABC um triângulo qualquer e uma bissetriz externa AD, conforme a Figura 1.17, então $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$.*

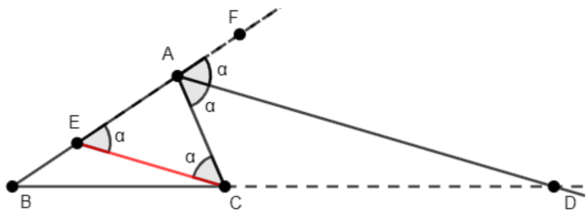
Figura 1.17: Figura suporte para Teorema 1.5.



Fonte: Autoria própria.

Demonstração: Sejam ΔABC um triângulo qualquer e AD a bissetriz do ângulo $C\hat{A}F$ em que essa bissetriz intercepta o prolongamento do lado BC no ponto D e F um ponto no prolongamento do lado AB. Ademais, trace um segmento paralelo ao segmento AD no ponto C, ver Figura 1.18.

Figura 1.18: Figura suporte para Teorema 1.5.



Fonte: Autoria própria.

Note que o ângulos $\angle C\hat{A}D$ e $\angle A\hat{C}E$ são alternos internos, além disso, o ângulo $\angle D\hat{A}F$ é correspondente ao ângulo $\angle C\hat{E}A$. Então, o triângulo ΔACE é isósceles com base CE e os lados AE e AC congruentes. Sendo assim, aplicando o Teorema de Tales com AB e BD sendo os segmentos transversais e AD e CE as retas paralelas, temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}.$$

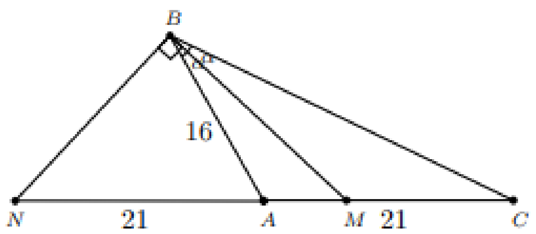
Porém como AE e AC são congruentes, temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}.$$

■

Exemplo 1.8. (Portal da OBMEP) Em um triângulo ABC, as bissetrizes interna e externa traçadas a partir do vértice B encontram o lado oposto (ou seu prolongamento) nos pontos M e N, respectivamente. Se $\overline{AC} = 21$, $\overline{AB} = 16$ e $\overline{AN} = 21$, calcule os comprimentos dos segmentos BC e AM.

Resolução: Primeiramente, observe que as igualdades $\overline{AN} = 21$ e $\overline{AC} = 21$ garantem que A é o ponto médio do segmento CN (veja a figura abaixo).



Fonte: Portal da OBMEP.

Agora, pelo Teorema da Bissetriz Externa, temos

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{21}{42} = \frac{16}{BC} \Leftrightarrow BC = 32.$$

Por outro lado, pelo Teorema da Bissetriz Interna, temos

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AM} + \overline{MC}} = \frac{1}{1+2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\overline{AM}}{21} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \overline{AM} = 7.$$

Apresentaremos agora uma definição necessária para a compreensão do exemplo a seguir.

Definição 1.3. Dizemos que os pontos M e N dividem harmonicamente o segmento AB se

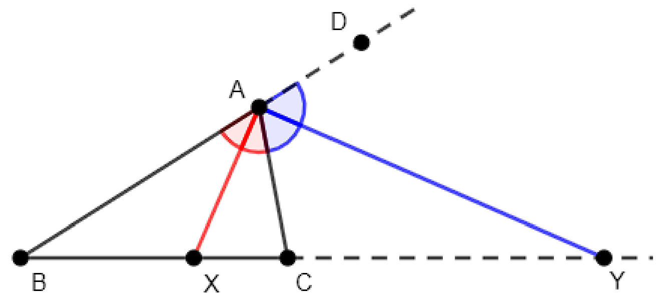
$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = k = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}},$$

ou seja, quando M e N dividem o segmento AB na mesma razão. Nessa situação M e N são ditos conjugados harmônicos na razão k sobre AB.

Exemplo 1.9. (Divisão harmônica pelas bissetrizes) Seja um triângulo ΔABC. As bissetrizes interna e externa relativas a qualquer vértice desse triângulo dividem o lado oposto harmonicamente.

Resolução: Seja ΔABC, trace a bissetriz interna AX e a bissetriz externa AY, relativas aos ângulos $\angle B\hat{A}C$ e $\angle C\hat{A}D$, respectivamente, conforme a Figura 1.19.

Figura 1.19: Figura suporte para resolução do Exemplo 1.9.



Fonte: Autoria própria.

Suponha que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = k$. Pelo Teorema da Bissetriz Interna, temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BX}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CX}}.$$

Daí, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}$.
Em contrapartida, pelo Teorema de Bissetriz Externa,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BY}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CY}}. \tag{4}$$

Logo, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BY}}{\overline{CY}}$.
Portanto,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{BY}}{\overline{CY}} = k.$$

Consequentemente, os pontos X e Y dividem harmonicamente o segmento BC.

Teorema Fundamental da Semelhança

Vamos demonstrar o Teorema Fundamental da Semelhança. Com este propósito, precisamos definir o que são triângulos semelhantes.

Definição 1.4. Sejam ΔABC e ΔDEF dois triângulos quaisquer. Dizemos que ΔABC e ΔDEF

são semelhantes quando tiverem lados, respectivos, proporcionais e ângulos ordenadamente congruentes.

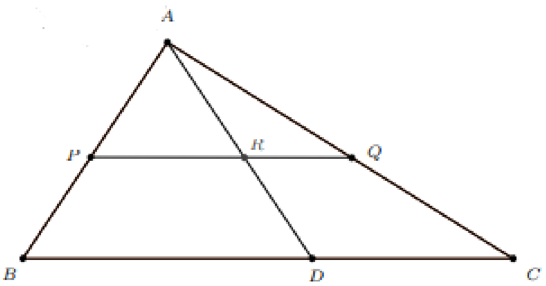
Notação: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ΔABC é semelhante a ΔDEF).

A proposição a seguir traz uma consequência muito importante do Teorema de Tales. De fato, ela traz o primeiro exemplo de uma semelhança de triângulos.

Proposição 1.6. *Se, sobre os lados AB e AC de um triângulo ABC, marcarmos pontos D e E tais que DE e BC são paralelos, então os lados dos triângulos ABC e ADE são respectivamente proporcionais. Mais precisamente,*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}.$$

Exemplo 1.10. (Portal da OBMEP) Considere o triângulo ABC e uma ceviana AD, com D sobre o lado BC. Sejam P e Q pontos sobre os lados AB e AC, tais que $PQ \parallel BC$. Se AD intersecta PQ em R, mostre que R divide PQ na mesma razão em que D divide o lado BC.



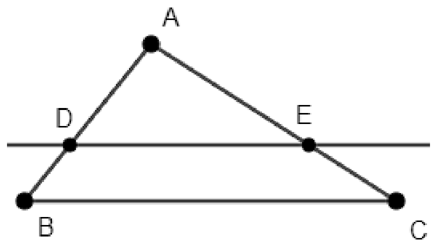
Resolução: Aplicando a proposição anterior aos triângulos APR e ABD, obtemos $\dfrac{\overline{PR}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$. Por outro lado, pelo Teorema de Tales, temos $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AC}}$. Agora, aplicando a proposição anterior aos triângulos ARQ e ADC, obtemos $\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{RQ}}{\overline{DC}}$. Combinando as três igualdades acima, segue que $\dfrac{\overline{PR}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{RQ}}{\overline{DC}}$ ou, o que é o mesmo,

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}. \tag{5}$$

Mas isso significa exatamente que R divide PQ na mesma razão em que D divide o lado BC.

Teorema 1.7. ***(Teorema Fundamental da Semelhança)*** *Qualquer Segmento de reta paralelo a um lado de um triângulo e que intersecta os dois outros lados, determina um triângulo semelhante. Isto é, sejam ΔABC um triângulo qualquer e DE um segmento paralelo a BC (ver Figura 1.20). Então, $\Delta ABC \sim \Delta ADE$.*

Figura 1.20: Figura suporte para Teorema 1.7.



Fonte: Autoria própria.

Demonstração: Queremos mostrar que ΔABC e ΔADE são semelhantes. Para isso basta mostrar que seus lados são respectivamente proporcionais, em outros termos,

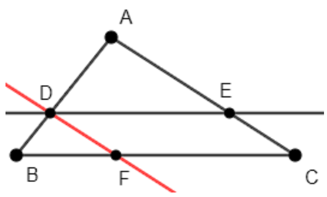
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BC}}. \tag{6}$$

Observando que BC e DE são paralelos e os segmentos AB e AC são transversais podemos usar o Teorema de Tales. Assim, temos

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}. \tag{7}$$

Traçaremos agora um segmento de reta DF paralelo a AC, em concordância com a Figura 1.21.

Figura 1.21: Figura suporte para demonstração do Teorema 1.7.



Fonte: Autoria própria.

Então, podemos usar o Teorema de Tales com os segmentos de reta paralelos AC e DF e com BC e

DE sendo os segmentos transversais. Dessa forma, temos

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}},$$

mas como $DECF$ forma um paralelogramo, temos que CF é congruente a DE. Logo,

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}. \tag{8}$$

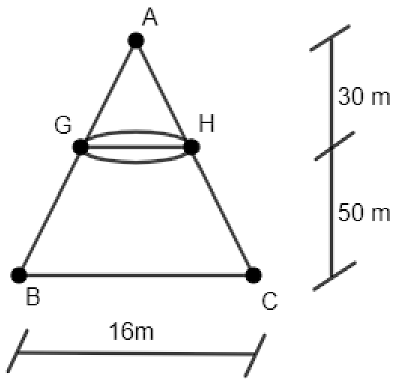
Portanto, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ pois pelas equações (7) e (8), temos que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}.$$

■

Exemplo 1.11. (UNIRIO) Numa cidade do interior, à noite, surgiu um objeto voador não identificado, em forma de disco que estacionou a 50 m do solo, aproximadamente. Um helicóptero do exército, situado aproximadamente 30 m acima do objeto, iluminou-o com um holofote, conforme Figura 1.22. Sendo assim, pode-se afirmar que o raio do disco voador mede, em metros, aproximadamente quanto?

Figura 1.22: Helicóptero



Fonte: UNIRIO.

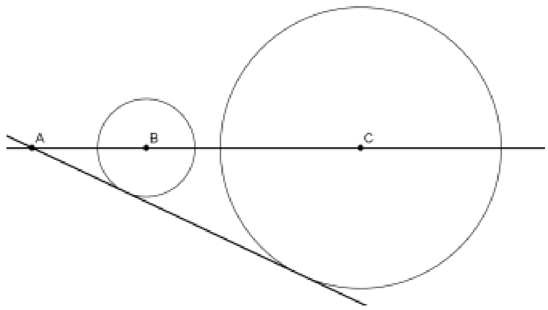
Resolução: Tomando como base a Figura 1.22, verificamos que no ponto A encontra-se o helicóptero, o segmento GH representa o diâmetro x do objeto não identificado e BC representa a sombra formada pelo feixe de luz sobre o objeto. Note que, é possível usar o Teorema Fundamental da Semelhança. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{x}{16} &= \frac{30}{30+50} \\ x &= \frac{480}{80} = 6. \end{aligned}$$

Encontramos que o diâmetro mede $6m$, mas sabemos que o raio é metade do diâmetro. Então, $r = 3m$.

Exemplo 1.12. (Portal da OBMEP) Na figura abaixo, temos uma reta que passa pelos pontos A, B e C e outra que passa por A e é tangente às circunferências de centros B e C e raios $3cm$ e $5cm$. Se $\overline{AB} = 7cm$, determine $\overline{BC}$.

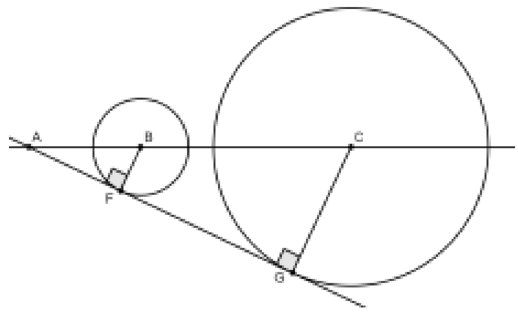
Figura 1.23: Figura Exemplo 1.12



Fonte: Portal da OBMEP.

Resolução: Traçando raios ligando os centros das circunferências aos pontos de tangência, obtemos a figura abaixo.

Figura 1.24: Resolução do Exemplo 1.12

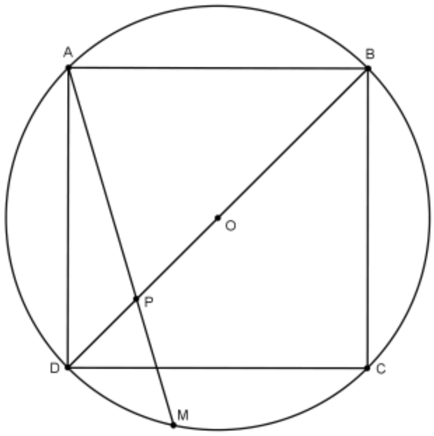


Fonte: Portal da OBMEP.

Perceba que $\Delta ABF \sim \Delta ACG$. Chamando a distância entre os centros de x e aplicando a razão de semelhança, temos

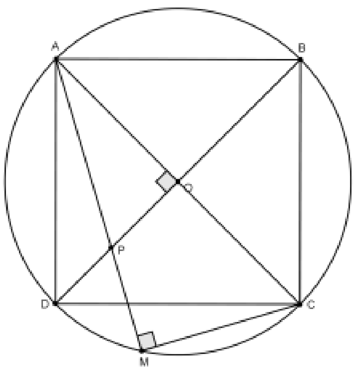
$$\begin{aligned}
\frac{7}{3} &= \frac{7+x}{5} \\
21+3x &= 35 \\
x &= \frac{14}{3}.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.13. (OBM–2013) O quadrado $ABCD$ está inscrito em um círculo cujo raio mede 30. A corda $\overline{AM}$ intercepta a diagonal $\overline{BD}$ no ponto P. Se o segmento $\overline{AM}$ mede 50, determine a medida do segmento $\overline{AP}$.



Fonte: OBM.

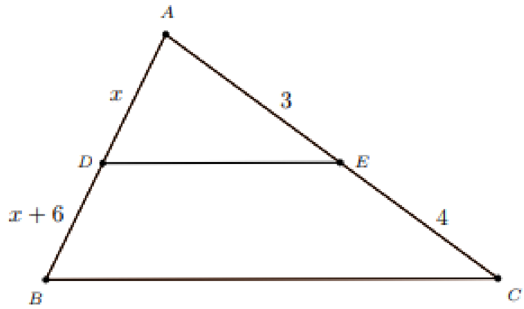
Resolução: Trace a diagonal $\overline{AC}$ que intersecta $\overline{DB}$ no ponto O. Sendo $ABCD$ um quadrado, O é o centro da circunferência. Observe que $\angle C\hat{M}A$ e $\angle P\hat{O}A = \angle D\hat{O}A$ medem 90^o. Logo, pelo caso AA, os triângulos AOP e AMC são semelhantes e, portanto, $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AO}}{\overline{AM}}$, que é equivalente a $\dfrac{\overline{AP}}{60} = \dfrac{30}{50}$, ou seja, $\overline{AP} = 36$.



Fonte: Portal da OBMEP.

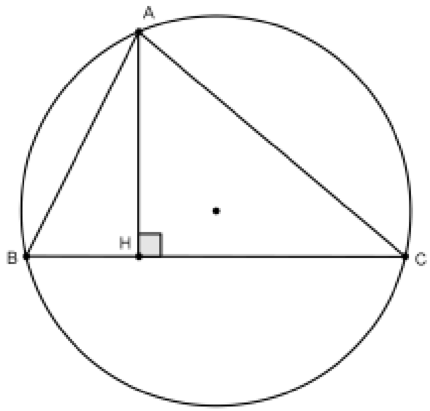
Problemas Propostos

- **Problema 1** (Portal da OBMEP) Uma reta paralela ao lado BC de um triângulo ABC determina o ponto D em AB e E em AC. Sabendo-se que $\overline{AD} = x$, $\overline{BD} = x+6$, $\overline{AE} = 3$ e $\overline{EC} = 4$, calcule o comprimento do lado AB do triângulo ABC.



Fonte: Portal da OBMEP.

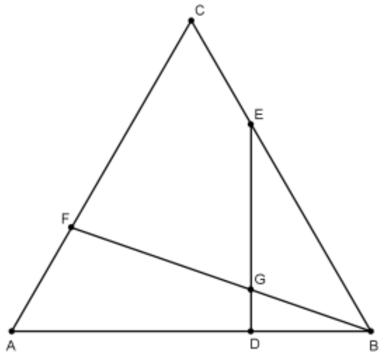
- **Problema 2** (Portal da OBMEP) Na figura abaixo, temos um triângulo inscrito. Se $\overline{AB} = 10$, $\overline{AC} = 12$ e $\overline{AH} = 4$, determine o raio da circunferência.



Fonte: Portal da OBMEP.

- **Problema 3** (OBM 2014) No desenho abaixo, o triângulo ABC é equilátero e $\overline{BD} = \overline{CE} = \overline{AF} = \overline{AB}/3$. Determine a razão $\overline{EG}/\overline{GD}$.

 ISSN 2526-8651



Fonte: Portal da OBMEP.

- **Problema 4** (OBM 1993). Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, onde N é o ponto médio de DC, M é o ponto médio de BC, e O é a intersecção entre as diagonais AC e BD. Mostre que O é o baricentro do ΔAMN se, e somente se, $ABCD$ é um paralelogramo.
- **Problema 5** (Leningrado) Sejam AF, BG e CH as bissetrizes de um triângulo ABC que tem ângulo A medindo 120^o. Prove que o ângulo $G\hat{F}H$ mede 90^o.
- **Problema 6** (Olimpíada de Maio/2000) Seja ABC um triângulo retângulo em A com cateto AC medindo 1. A bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ corta a hipotenusa em R; a perpendicular a AR traçada por R corta o lado AB em seu ponto médio. Encontre a medida do lado AB.
- **Problema 7** (OBM-2015) Seja ABC um triângulo escaleno e AD, BE e CF as bissetrizes internas, com D sobre BC, E sobre AC e F sobre AB. É dado que $A\hat{F}H = A\hat{D}C$. Calcule a medida do ângulo $B\hat{C}A$.

Considerações Finais

Com esse trabalho, verificamos que em termos matemáticos o Teorema de Tales tem diversas aplicações e, como foi visto, sua demonstração pode ser apresentada de maneira relativamente simples. Ao longo do texto, podemos encontrar aplicações em diversos outros teoremas além de várias questões olímpicas. Há ainda outras importantes aplicações diretas ou indiretas deste teorema como o Teorema de Menelaus, o Teorema de Pascal, o Teorema de Ceva que serão tratados em um texto futuro.

Referências

[1] AIRES, Haroldo da Costa, PEREIRA, Irene Castro. **Técnicas de Problemas Olímpicos de Geometria Plana.** Belém: EditAedi/UFPA, 2019.

[2] BOYER, Carl B. História da matemática. [Digite o Local da Editora]: Editora Blucher, 2012. E-book. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521216117/. Acesso em: 14 mar. 2024.

[3] BONGIOVANNI, Vincenzo. **O teorema de Tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico**. REVEMAT-Revista Eletrônica de Matemática, v. 2, n. 1, p. 94-106, 2007.

[4] BRITO, Gabriel V. de Souza. **Aplicações de Teoremas de Geometria Plana em Problemas de olimpíadas**. Dissertação de PROFMAT-UFRPE. Recife, 2020.

[5] CRESCENZO, L. **História da Filosofia Grega - Os pré-socráticos**. Editorial Presença: Lisboa, 1988.

[6] GALLEGO, José. LINARES, Francisco. **Teorema de Tales**. Revista de Didáctica de las Matemáticas, v. 18, p. 71-76, 1988.

[7] HEATH, Thomas L. **A manual of Greek mathematics**. Courier Corporation, 2003.

[8] LOPES, Davi. **O Quarteto Harmônico e o Problema 6 da OBM**. XIX Semana Olímpica de Matemática- Nível 2. Disponível em https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/Quarteto_Harmonico_Problema_6_OBM_Davi_Lopes-1.pdf. Acesso em 08 março de 2024.

[9] Portal OBMEP. Disponível em https://portaldaobmep.impa.br/. Acesso em 08 março de 2024.

2. Curiosidade

Curva de Agnesi

Roberta Elaine Domingos de Araújo[1]

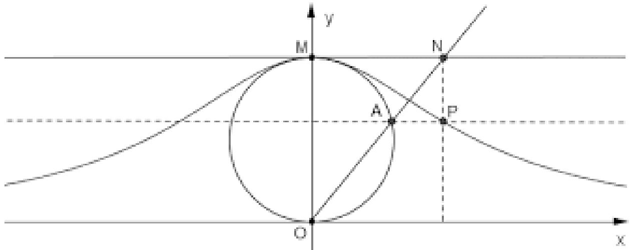
Maria Gaetana Agnesi foi uma matemática que nasceu em Milão em 1718 e faleceu na mesma cidade em 1799. Sua educação foi privilegiada e privada, o que não era hábito das mulheres daquele século.

Seu pai, Pietro Agnesi, era um rico mercador de seda (considerado muitas vezes, equivocadamente, como professor de Matemática da Universidade de Bolonha [3]), que a incentivou a estudar Ciências. Agnesi concentrou seus estudos na Religião e na Matemática e priorizou ter uma vida discreta.

Foi quando conheceu Ramiro Rampinelli, professor de matemática da Universidade de Roma e também de Bolonha, que a ajudou nos estudos dos textos de Cálculo do matemático Reyneau. Em 1748, Agnesi publicou *"Instituzioni Analitiche ad uso della Gioventù Italiana"*, uma obra em dois volumes, com temas de Álgebra, Geometria e Cálculo Infinitesimal. No volume dois é apresentada uma extensa discussão sobre uma curva, conhecida como "Bruxa de Agnesi", que ganhou esse nome devido a um erro de tradução.

Segundo Stewart, o matemático John Colson (1680-1760), professor na Universidade de Cambridge, ao traduzir a obra de Agnesi para o inglês, equivocou-se ao ler *"la versiera"* como *"l'aversiera"* que, em italiano, significa "a bruxa".

Figura 2.1: Curva de Agnesi



Fonte: Wikipédia, 2023.

Para entender a construção da Curva de Agnesi, cuja equação é dada por $xy = a^3/(a^2 + x^2)$, em que a é uma constante, procedemos da seguinte maneira: fixada uma circunferência, toma-se um ponto O nela. De qualquer outro ponto A da circunferência, traça-se a secante OA. Seja M o ponto diametralmente oposto a O. A interseção entre a reta OA e a reta tangente à circunferência no ponto M é o ponto N. Por A, traça-se uma reta paralela a MN, e por N uma reta paralela a OM. Seja P a interseção entre essas duas retas. O caminho que P faz ao variarmos A é a chamada Curva de Agnesi.

Dentre os poucos trabalhos encontrados sobre as aplicações da Curva de Agnesi, estão os artigos de Stigler (1974) intitulado *"Studies in the History of Probability and Statistics. XXXIII Cauchy and the witch of Agnesi: An historical note on the Cauchy distribution"* (Estudos em História da Probabilidade e Estatística. XXXIII Cauchy e a bruxa de Agnesi: uma nota histórica sobre a distribuição de Cauchy), o de Ciaurri (2017) cujo título é *"Maria Gaetana Agnesi Meets Johannes Kepler"* (Maria Gaetana Agnesi encontra Johannes Kepler) e o de Yankova (2017), *"Piecewise rational interpolation by witch of Agnesi"* (Interpolação racional por partes através da bruxa de Agnesi).

Como podemos observar trata-se de uma curva relativamente fácil de ser compreendida, permitindo relembrar técnicas e propriedades da Trigonometria e Geometria Plana e sua exploração permite também aguçar as nossas habilidades.

Além disso, por estar associada a grandes nomes

[1]Discente do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco e monitora voluntária do Jornal É Matemática, OXENTE!

da Matemática, a curva carrega um enorme legado, mostrando a importância de ser melhor reconhecida e estudada, assim como a história por trás dessa esplêndida mulher.

Referências.

[1] SILVA, Felipe Bezerra da. Agnesi e sua bruxa: história e aplicação. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2021.

[2] IMPA, 31 de outubro: dia de celebrar a Bruxa de Agnesi.Tudo o que você precisa saber sobre Transtorno Mental. Disponível em: `https://impa.br/noticias/31-de-outubro-dia-de-celebrar-a-bruxa-de-agnesi/`. Acesso em: 10 ago. 2023.

[3] STEWART, Ian. Almanaque das curiosidades matemáticas. Rio de Janeiro: Zahar, 2009. p. 117 - 119.

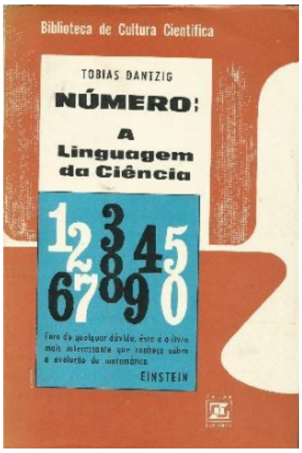
3. Indicação de Leitura

Número: A Linguagem da Ciência

Severino Barros de Melo[2]

A indicação de leitura desta edição é fruto de um antigo hábito que tenho de garimpar em diversos locais, livros de edição esgotada e indiscutivelmente importantes para a área de matemática. Uso com gosto a expressão garimpar pois essa metáfora nos faz lembrar a busca por algo precioso e que não se encontra facilmente. A obra proposta para leitura faz parte daquele grupo de livros sobre matemática, que mesmo não tendo conteúdo estritamente técnico é uma leitura profundamente enriquecedora. Tratase de *Número: A Linguagem da Ciência*, escrito por Tobias Dantzig e publicado por Zahar Editores em 1970 (a primeira edição foi de 1930).

O autor foi um matemático que nasceu na Letônia em 1884 e faleceu em Los Angeles em 1956. Trabalhou por muitos anos nos Estados Unidos, fez o doutorado em 1917 na Universidade de Indiana e sua tese teve como título *Some Contributions to the Geometry of Plane Transformations*. O sobrenome Dantzig ganhou mais notoriedade por conta de seu filho, o brilhante matemático George Dantzig, que dentre outros trabalhos, foi o desenvolvedor do algoritmo simplex.



O livro indicado tem 283 páginas e está estruturado em duas partes. A primeira intitulada Evolução do conceito de número, aborda os seguintes temas: *Impressões digitais, A coluna vazia, A ciência do número, O último número, Símbolos, O inexprimível, Este mundo em movimento, O ato da criação, Preenchendo as lacunas, O domínio do número, A anatomia do infinito, As duas realidades e Marcos na evolução do conceito de número.* A segunda parte intitulada Problemas velhos e novos, aborda: *Sobre o registro de números, Tópicos sobre inteiros, Sobre raízes e radicais, Sobre princípios e argumentos.*

A Obra é muito interessante. Por exemplo: no capítulo *Impressões digitais*, o autor aborda conteúdos que atualmente são um campo fértil para pesquisas em Etnomatemática. Nesse contexto, ele apresenta o modo como agricultores franceses da região de Auvergne realizam com as mãos contas de multiplicação entre números maiores que cinco e menores que nove.

No prefácio à primeira edição Dantzig afirma que "nossos currículos escolares, despindo a matemática de seu conteúdo cultural e deixando um es-

[2]Professor do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco

queleto nu de tecnicismos, repeliram muitas mentes argutas. O objetivo deste livro é restaurar esse conteúdo cultural e apresentar a evolução do número como a história profundamente humana que ela é".

A repercussão do livro foi positiva e dentre os que elogiaram a obra, está inclusive o Albert Einstein. Com uma opinião desse porte, a Editora não poderia fazer por menos; colocou já na capa a opinião dele: "fora de qualquer dúvida, este é o livro mais interessante que conheço sobre a evolução da matemática", disse.

Dantzig advoga que os aspectos fundamentais da ciência do número podem ser apresentados sem mostrar todo aparato intrincado da ciência matemática. Diz que o livro é uma profissão de fé nisso que ele acredita, e desafia: " Os que lerem, julgarão!".

Apesar de ser uma obra esgotada, pode ser encontrada de vez em quando, no maior sebo virtual do país, o site Estante Virtual.

Referências

[1] DANTZIG, Tobias. Número: A Linguagem da Ciência. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970.

4. Quem pergunta, quer saber!

Pitágoras descobriu o Teorema de Pitágoras?

Severino Barros de Melo[3]

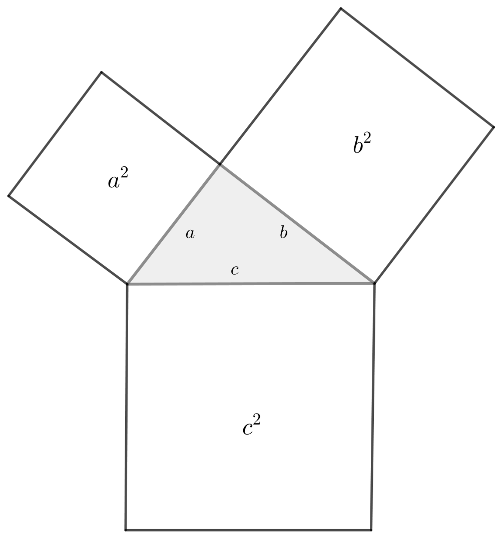
Na edição de junho de 2019, na seção Quem pergunta, quer saber!, fizemos referência a um Museu dedicado exclusivamente à Matemática, localizado na cidade de Giessen (Alemanha). Muitos visitantes, movidos pela curiosidade, formularam perguntas de todo tipo acerca da Matemática. O matemático Albrecht Beutelspacher, à época diretor do museu, selecionou 101 dentre elas e publicou na Espanha, em 2015, o livro *Matemáticas: 101 preguntas fundamentales* com respostas às perguntas propostas. Chama a atenção como a Matemática provoca no grande público muita curiosidade acerca de aspectos conceituais, operacionais, históricos e culturais.

Nesta edição escolhemos mais uma pergunta dos visitantes e a resposta do matemático.

Pergunta: *Pitágoras descobriu o Teorema de Pitágoras?*

Resposta de Albrecht Beutelspacher:

Não. Na Babilônia se conhecia o teorema a pelo menos mil anos antes. Para todos os efeitos, o teorema de Pitágoras é um instrumento que não se pode abrir mão, para se calcular distâncias e comprimentos, de modo que não é inconcebível que tenha aparecido em diferentes lugares e diferentes épocas como na Babilônia, Índia e China. O Teorema de Pitágoras se atém a um enunciado sobre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. Os menores são chamados *catetos* e correspondem aos que formam o ângulo reto: suas medidas podem ser representadas por a e b. O lado oposto ao ângulo reto é a *hipotenusa* e tem comprimento c.



O teorema de Pitágoras estabelece que os comprimentos a, b e c mantêm entre si uma relação surpreendente. Na fórmula, os números a, b e c não aparecem de maneira "linear", ou seja, sem expoentes, ao contrário, as tais medidas são elevadas ao quadrado. A célebre equação é $a^2 + b^2 = c^2$.

Expresso em termos geométricos isto quer dizer que a soma dos quadrados dos catetos tem o mesmo

[3]Docente do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco

valor que o quadrado da hipotenusa.

Como disse anteriormente, os babilônios conheciam este enunciado há cerca de 1500 anos antes de Cristo. Pitágoras (aprox. 570-510 a.C.) conhecia muito bem as matemáticas babilônicas e, portanto, não é estranho pensar que conhecia também o "Teorema de Pitágoras". Sem dúvida figura como o primeiro que o demonstrou. Da parte dos babilônios não chegou até nós nenhum indício de demonstração: o enunciado se utilizava para efetuar cálculos.

Nem mesmo é seguro afirmar que Pitágoras tenha demonstrado "seu" teorema. Porém deve ter sido demonstrado em sua época, pois nos *Elementos* de Euclides (aprox. 300 a. C) já aparece a demonstração do teorema.

5. Soluções de Olimpíadas

OPEMAT 2022 - Nível 1

Nesta edição, apresentaremos a resolução das questões discursivas e de verdadeiro ou falso da prova da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2022, referentes ao nível 1.

Problema 5.1. Diego está fazendo pulseiras para vender. Ele usa dezoito(18) bolinhas para cada pulseira, um(1) fecho e dois(2) pingentes: um do Piraia e outra da Pi-veta. Ele tem apenas duas cores de bolinhas disponíveis: preto e cinza Na hora de montar uma pulseira, ele sempre segue as seguintes regras:

> **Regra 1:** Primeiro deve ser colocada a primeira parte do fecho, depois o pingente do Pi-raia, depois uma sequência de dezoito(18) bolinhas, depois o pingente da Pi-veta e por fim a outra parte do fecho;
>
> **Regra 2:** A pulseira deve conter bolinhas de ambas as cores: preto e cinza;
>
> **Regra 3:** Fixa-se uma sequência de cores de bolinhas e repete-se esta sequência de modo a atingir as dezoito(18) bolinhas;
>
> **Regra 4:** As repetições da sequência de bolinhas fixada deverão ser sempre completas.

Uma pulseira que satisfaça as quatro regras acima é dita uma **pulseira elegante**.

Assim, por exemplo, a sequência de bolinhas (preto, preto, cinza) produz uma pulseira elegante (Figura 1). Já a sequência (preto, preto, cinza, cinza) não produz (Figura 2).

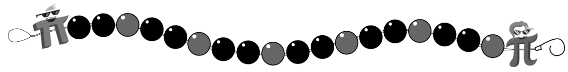


Figura 5.1: Pulseira elegante

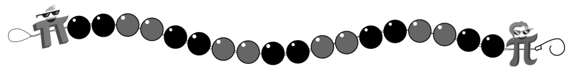


Figura 5.2: Pulseira não elegante

Julgue os itens a seguir atribuindo (V) se a afirmação for VERDADEIRA ou (F) se a afirmação for FALSA.

(A) (V) (F) A sequência de bolinhas (preto, cinza) produz uma pulseira elegante.

(B) (V) (F) Sequências com cinco(5) bolinhas produzem pulseiras elegantes.

(C) (V) (F) Diego só consegue fazer pulseiras elegantes com sequências de cores se repetindo a cada três(3) bolinhas ou nove(9) bolinhas.

(D) (V) (F) Diego consegue fazer seis(6) pulseiras elegantes distintas usando sequência de cores se repetindo a cada três(3) bolinhas.

(E) (V) (F) O total de pulseiras elegantes distintas que Diego produz é 572.

Solução. (A) A afirmação é VERDADEIRA, pois sendo P a bolinha preta e C a bolinha cinza, a pulseira PC PC PC PC PC PC PC PC PC satisfaz as regras seguidas por Diego.

(B) A afirmação é FALSA, pois se Diego escolher sequências com 5 bolinhas, como 18 não é divisível por 5, na última repetição da sequência, só será possível adicionar 3 bolinhas, o que contradiz a Regra 4.

(C) A afirmação é FALSA, pois para que a Regra 4 seja verdade, a sequência de cores deve ser escolhida de modo que o número de repetições dela seja divisível por 18. Desta forma, é possível produzir pulseiras elegantes repetindo sequências com 2, 3, 6 e 9. Aqui o número não pode ser 1 ou 18, pois a pulseira deve conter bolinhas de ambas as cores.

(D) A afirmação é VERDADEIRA, pois escolhendo uma sequência com 3 bolinhas, para cada bolinhas, temos duas opções de cores a ser escolhida, logo, temos $2^3 = 8$ possibilidades, porém pela Regra 2, devemos tirar as 2 pulseiras que tem apenas uma cor. Portanto, temos 6 pulseiras elegantes distintas que são as geradas pelas sequências: PCC, CPC, CCP, PPC, CPP, PCP.

(E) A afirmação é FALSA. observe que, como temos apenas duas cores para combinar, teremos apenas sequências de tamanho 2, 3, 6 ou 9 como possibilidades para que a pulseira tenha 18 bolinhas e a sequência de bolinhas seja completa.

Para sequências com duas bolinhas, teremos $2^2 - 2 = 2$ possibilidades, sendo que as duas excluídas serão as pulseiras com todas as bolinhas da mesma cor.

Para sequências com três bolinhas, teremos $2^3 - 2 = 6$ possibilidades.

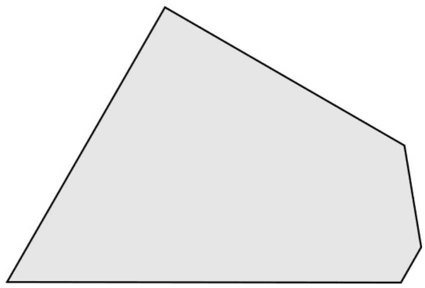
Para sequências com seis bolinhas, teremos $2^6 - 2 = 62$ possibilidades. Porém, neste caso, como 2 e 3 dividem 6, as sequências de duas e três bolinhas também aparecerão nas sequências de seis bolinhas. Por exemplo, a sequência PC(Preta, Cinza) e a sequência PPC, aparecem, respectivamente, nas seguintes sequências de seis bolinhas: PCPCPC e PPCPPC. Logo, teremos $62 - 2 - 6 = 54$ possibilidades.

Para sequências com nove bolinhas, teremos $2^9 - 2 = 510$ possibilidades. Porém, como 3 divide 9, as sequências com três bolinhas também aparecerão nas sequências de nove bolinhas. Por exemplo, a sequência PPC aparece na sequência, PPCPPCPPC, de nove bolinhas. Logo, teremos $510 - 6 = 504$ possibilidades.

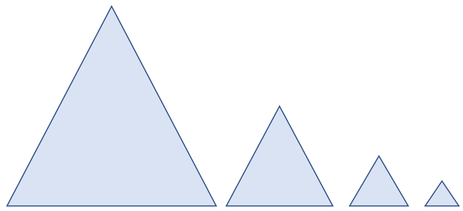
Portanto, o total de pulseiras elegantes é $2 + 6 + 54 + 504 = 62 + 504 = 566$.

□

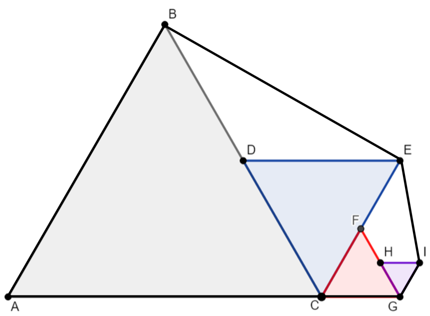
Problema 5.2. João gosta de ajudar o seu avô, Seu José, quando ele faz suas “invenções" no quintal de casa. Desta vez, Seu José está aproveitando algumas sobras de cerâmica para cobrir uma parte do piso do quintal representada pela figura abaixo:



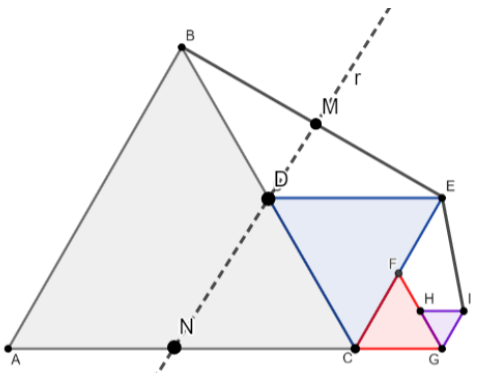
Até agora, Seu José encontrou quatro cerâmicas com formato de triângulo equilátero, para fazer sua “arte". O maior triângulo tem lado medindo $AB = 8cm$, o lado do segundo a metade deste, o lado do terceiro a metade do segundo e o lado quarto a metade do terceiro.



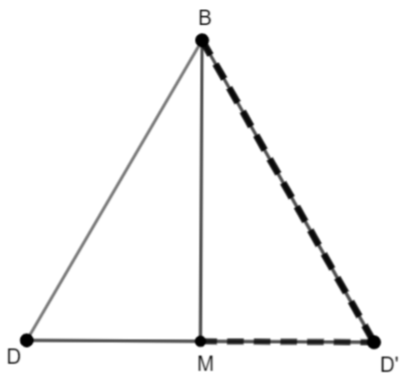
Ao colocar as quatro cerâmicas, Seu José percebeu que ainda faltavam duas regiões para preencher e pediu ajuda ao seu neto nesta tarefa.



Para terminarem a “arte", quais as medidas dos lados $L = BE$ e $l = EI$ das peças de cerâmica que João precisa achar?



Solução. $B\hat{D}E = 120°$, pois o $\triangle CDE$ é equilátero. Além disso, $BD = DE = 4$, pois D é ponto médio de BC. Considere a reta r passando por D e paralela ao segmento AB. Como r é paralela a AB, $D\hat{N}C = B\hat{A}C = 60°$. Daí, o triângulo ΔDNC é equilátero. Portanto, N é ponto médio de AC. Ainda pelo fato de r ser paralela a AB, segue que M é ponto médio de BE, com $BM = ME = \frac{L}{2}$. Portanto, os triângulos ΔBMD, ΔDME são congruentes (pelo caso LAL). Daí, segue que r é mediatriz do segmento AE e por consequência, os triângulos ΔBMD, ΔDME são retângulos em M. Agora, consideremos um ponto D' sobre a reta r, de modo que $BD' = BD$, temos então o triângulo $\Delta BDD'$:



Verifiquemos que este triângulo é equilátero.

$\Delta BDD'$ é isósceles, portanto:

$$B\hat{D'}D = B\hat{D}D' = 60° \ .$$

No ΔBMD, temos que:

$$\begin{aligned} D\hat{B}M &= 180° - \left(D\hat{M}B + M\hat{D}B\right) \\ &= 180° - (90° + 60°) = 30°. \end{aligned}$$

Da mesma forma no $\Delta BMD'$, podemos concluir que:

$$D'\hat{B}M = 30°.$$

Portanto,

$$D\hat{B}D' = 60°.$$

Portanto, $\Delta BDD'$ é um triângulo equilátero.

Daí, ΔBMD é congruente ao $\Delta BMD'$, pelo caso de congruência LAL. Assim, M é o ponto médio de DD'. Disto, segue que:

$$DM = \frac{BD}{2} \ .$$

Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo ΔBMD:

$$BM^2 = BD^2 - DM^2 = BD^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}BD^2.$$

Logo,

$$BM = \frac{\sqrt{3}}{2}BD \ .$$

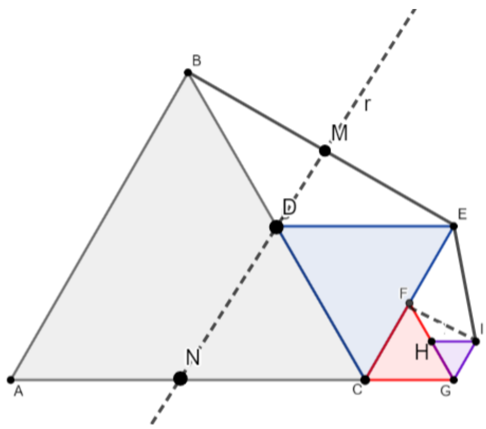
Daí,

$$\frac{\frac{L}{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

Portanto,

$$L = 4\sqrt{3} \ .$$

$E\hat{F}H = 120°$, pois o $\triangle CFG$ é equilátero. $FE = 2$, $FH = 1$, pois F, H são pontos médios de CE, FG.



$F\hat{H}I = 120°$, pois o $\triangle GHI$ é equilátero. E copiando o mesmo argumento utilizado acima no triângulo ΔDFE para o triângulo ΔFHI, obtemos:

$$FI = 1.\sqrt{3} = \sqrt{3}\ .$$

$F\hat{H}I = 30°$, pois o $\triangle FHI$ é isósceles. Assim,

$$E\hat{F}I = E\hat{F}H - H\hat{F}I = 120°\text{-}30°\text{=}90°.$$

Logo, pelo Teorema de Pitágoras no $\triangle EFI$:

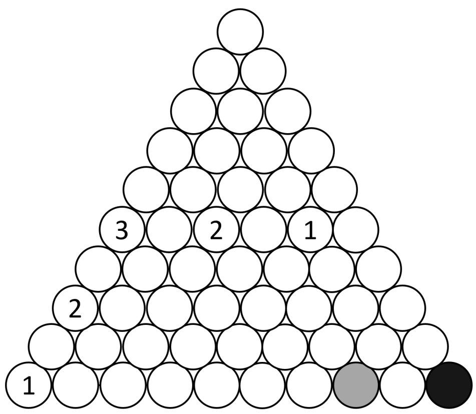
$$l^2 = EF^2 + FI^2 = 2^2 + 3 = 7\ .$$

Portanto,

$$l = \sqrt{7}\ .$$

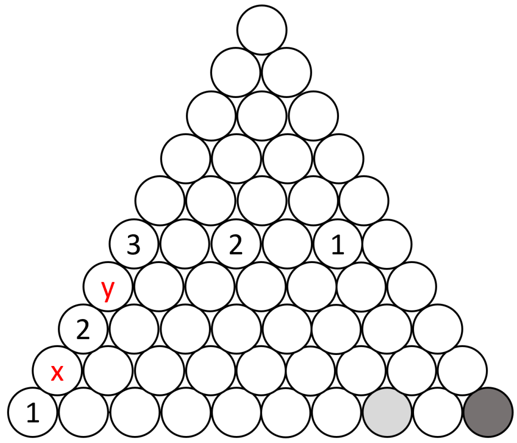
□

Problema 5.3. Na figura abaixo, vamos escrever números naturais dentro de cada círculo de modo que a soma dos números escritos em cinco círculos alinhados e consecutivos seja sempre a mesma.



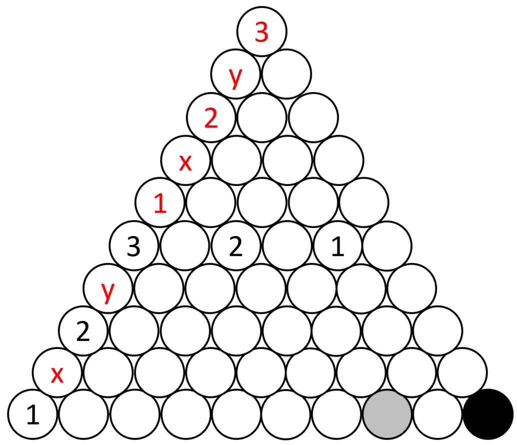
Determine os números escritos nos círculos cinza e preto, de modo que a soma de todos os números escritos nos círculos da figura seja igual a 165 e a diferença entre o número escrito no círculo preto e o número escrito no círculo cinza seja igual a 1.

Solução. Para determinar os números escritos nos círculos preto e cinza, considere x e y os números que aparecem entre 1, 2 e 3.

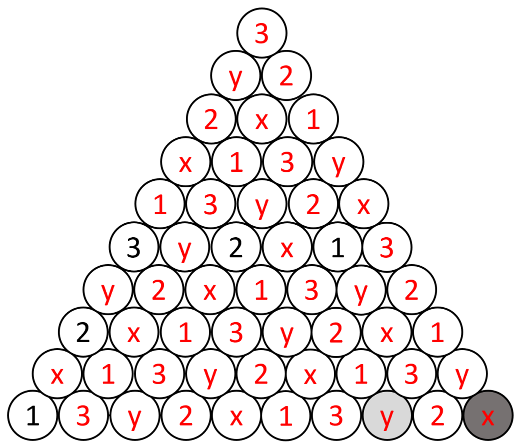


Como a soma dos números escritos em cinco círculos alinhados e consecutivos deve ser sempre a mesma a sequência de números escritos nessa diagonal seguir a ordem

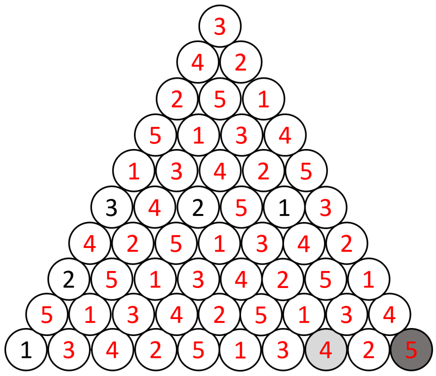
$$1\ \ x\ \ 2\ \ y\ \ 3\ \ 1\ \ x\ \ 2\ \ y\ \ 3$$



Seguindo, essa estratégia, preenche-se todos os círculos no triângulo



Note agora que cada número irá aparecer 11 vezes no triângulo. Logo, queremos x e y de modo que $11(x+y+1+2+3) = 165$ e $x - y = 1$, ou seja, $x + y + 1 + 2 + 3 = 15$ e $x - y = 1$. Resolvendo o sistema de equações, chegamos em $x = 5$ e $y = 4$.



□

Problema 5.4. Um número inteiro positivo T par e menor do que 500 admite 8 divisores positivos, sendo 13 um deles. Determine todas as possibilidades para T.

Solução. Primeiramente, dado um número N e sua decomposição em fatores primos

$$N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}.$$

O número de divisores de N é dado por:

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) \ldots (n_k + 1).$$

Como T é um número par, divisível por 13 e admite 8 divisores, sua decomposição em fatores primos é da forma

$$T = 2^a 13^b p^c,$$

de modo que

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 8.$$

Aqui não é possível ter na decomposição um primo q diferente de 2, 13 e p, pois, se existisse o número de divisores de T seria maior do que 8. Assim, as possibilidades para a, b e c são:

$a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$, então $T = 26p$, como T é menor do que 500, temos $26p < 500$, ou seja, $p < 19,2$. Assim, $p = 3, 5, 7, 11, 17$ e 19 e as possibilidades são $T = 78, 130, 182, 286, 442, 494$.

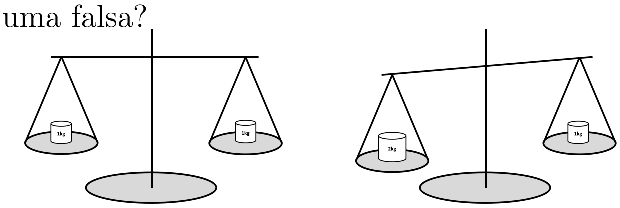
$a = 3$, $b = 1$ e $c = 0$, então $T = 8 \times 13 = 104$.

$b = 3$, $a = 1$ e $c = 0$, então $T = 2 \times 13^3 > 500$.

Portanto, as 7 possibilidades para T são: $T = 78, 104, 130, 182, 286, 442, 494$. □

Problema 5.5. Em um grupo de 8 moedas, sendo 5 moedas verdadeiras de mesmo peso M e 3 moedas falsas de mesmo peso m, com m menor do que M, isto é, as moedas falsas são mais leves do que as moedas verdadeiras. Suponha que você dispõe de uma balança constituída de dois pratos de modo que você pode comparar os pesos de dois grupos de objetos dispostos em cada prato da seguinte maneira: Ao colocar os objetos de cada grupo nos pratos, se os pesos dos dois grupos de objetos são iguais, então os pratos vão ficar na mesma altura, caso contrário um grupo de objetos pesa mais que o outro e o grupo mais pesado estará no prato posicionado embaixo do outro prato (conforme figura abaixo).

Qual o número mínimo de pesagens necessárias para encontrar um par com uma moeda verdadeira e uma falsa?



Solução. Vamos denotar as moedas verdadeiras por V e as falsas por F.

Dentre as oito moedas selecione duas para compor o Grupo 1, duas para compor o Grupo 2 e as quatro restantes comporão o Grupo 3. Comparamos o peso das moedas dos Grupos 1 e 2 na balança. Temos 2 casos a considerar:

Caso 1: A soma dos pesos das duas moedas do Grupos 1 e igual a soma dos pesos das duas moedas do Grupo 2. (Configurações possíveis - Grupo 1: VV Grupo 2: VV e Grupo 3: VFFF ou Grupo 1: VF, Grupo 2: VF e Grupo 3: VVVF).

Nesse caso, no Grupo 3 existirá três moedas verdadeiras e uma falsa ou três moedas falsas e uma verdadeira. Escolha duas dentre as moedas do Grupo 3 e fazemos a segunda pesagem colocando uma moeda em cada prato. Se elas tiverem pesos diferentes achamos as duas moedas desejadas. Se elas tiverem pesos iguais as duas moedas restantes do Grupo 3 terão pesos diferentes.

Caso 2: A soma dos pesos das duas moedas do Grupo 1 é diferente da soma dos pesos das duas moedas do Grupo 2. (Configurações possíveis - Grupo 1: VV e Grupo 2: VF ou Grupo 1: VV e Grupo 2: FF ou Grupo 1: VF e Grupo 2: FF).

Neste caso, escolha uma moeda de cada um dos dois grupos para a segunda pesagem. Se estas moedas tiverem pesos diferentes acabou. Senão as duas moedas que selecionamos tem pesos iguais. Como os dois grupos com duas moedas possuem pesos diferentes e as moedas que selecionamos para a segunda pesagem possuem pesos iguais, concluímos que a moeda do primeiro grupo e a moeda do segundo grupo que não foram selecionadas para a segunda pesagem possuem pesos diferentes.

Com esse argumento, provamos que somos capazes de selecionar um par com uma moeda verdadeira e uma falsa com duas pesagens. Uma vez que não é possível selecionar a moeda mais pesada e a mais leve com uma única pesagem concluímos que o número mínimo de pesagens para selecionar o par desejado é dois. □

6. Eventos

Fiquem Ligados!!!

- **VII Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste**
  - Local: Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD)
  - Data: 08 a 12 de Abril de 2024
  - Mais informações: https://eventos.uepb.edu.br/sipemat/
- **I Encontro Brasileiro sobre a Teoria da Objetivação**
  - Local: UFRPE, Recife-PE
  - Data: 24 a 26 de Abril de 2024
  - Mais informações: https://www.even3.com.br/iebto2024/
- **VII ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL - ERMAC**
  - Local: Faculdade de Ciências - Campus de Bauru - Unesp - São Paulo
  - Data: 21 a 24 de Maio de 2024
  - Mais informações: https://www.even3.com.br/viiermac/
- **6º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEMAT**
  - Local: Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) – Campina Grande - PB
  - Data: 23 a 25 de Maio de 2024
  - Mais informações: https://www.even3.com.br/6sipemat/

7. OPMBr - A Olimpíada de Professores de Matemática do Ensino Médio

Maité Kulesza
Tarciana Maria Santos da Silva[4]

Nessa coluna, queremos contar para vocês um pouco da Olimpíada de Professores de Matemática do Ensino Médio(OPMBr)[5], uma competição que chegou com o objetivo de selecionar, anualmente, 10 professores(as) de matemática do Ensino Médio que fazem a diferença nos seus ambientes escolares. Os(As) escolhidos(as) serão premiados(as) com uma viagem para conhecer um dos países do ranking dos 10 melhores em Matemática no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes(PISA).

[4]Professoras do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco
[5]https://opmbr.org/

A ideia da competição surgiu quando alguns engenheiros do Instituto Tecnológico de Aeronáutica(ITA) observaram que, apesar do Brasil fazer parte da elite mundial na Matemática(nível 5 da Internacional Mathematical Union – IMU), seu desempenho no último PISA foi muito ruim, ficando na posição 65 entre os 81 países participantes. Com isso, pensaram em criar uma premiação que buscasse valorizar as práticas de sala de aula dos(as) professores(as), bem como apresentasse soluções criativas para os problemas no ensino.

Puderam participar da competição, quaisquer professores(as) de escolas municipais, estaduais, federais e privadas no Brasil, registradas no Ministério da Educação(MEC), que atuassem nos segmentos do Ensino Médio, desde que demonstrassem "paixão pelo ensino e pelo sucesso de seus alunos" e, promovessem "uma cultura de aprendizado contínuo e crescimento pessoal", conforme consta no regulamento. A seleção contou com 3 fases, sendo a primeira, uma prova com um questionário contextual e uma avaliação do conhecimento matemático especializado para o ensino. Na segunda fase, os(as) participantes enviaram uma apresentação em vídeo ilustrando o trabalho desenvolvido em sala de aula e, por fim, na terceira fase, foram entrevistados(as) pelo Conselho Acadêmico da OPMBr.

Nessa primeira edição, serão premiados(as) 68 professores(as), dos quais 48 na categoria bronze, 10 na categoria prata e 10 na categoria ouro. A premiação ocorreu no dia 27 de Março em formato online pelo canal do YouTube da FGV[6]. Entre os 20 finalistas, havia representantes de diversos estados do país como Maranhão, Pará, Rio Grande do Norte, Paraíba, Pernambuco, Ceará, Minas Gerais, São Paulo, Rio de Janeiro, Paraná e Rio Grande do Sul. Esses(as) 10 professores(as) da categoria ouro participarão em outubro de 2024 de um intercâmbio técnico e cultural de 15 dias em Xangai para conhecer o Centro de Educação para Professores da Unesco (TEC Unesco) na Universidade Normal da China, país que configura entre os melhores no ranking do PISA. Além disso, cada um(a) dos(as) premiados(as), ministrará cinco workshops, perfazendo um total de 50 cursos realizados em cidades brasileiras escolhidas em parceria com o MEC.

A iniciativa tem apoio de várias instituições, entre elas: ITA, Escola de Matemática Aplicada (EMAp) da Fundação Getúlio Vargas(FGV), Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica(IMECC) da Universidade Estadual de Campinas(Unicamp), Universidade Federal do Ceará(UFC), Sociedade Brasileira de Matemática(SBM) e Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica(ANPMat). Além do MEC e do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação(MCTI).

Foram mais de 600 inscritos(as) e, nós, da Universidade Federal Rural de Pernambuco(UFRPE), temos dois egressos como finalistas da OPMBr. Estamos muito felizes e orgulhosos e queremos também apresentá-los a vocês.

Milena Monique de Santana Gomes, nossa finalista agraciada com a medalha de ouro, atualmente é professora no Centro Estadual Experimental de Ensino-Aprendizagem (CEEEA) Sesquicentenário, em João Pessoa, Paraíba. Milena se graduou na Licenciatura em Matemática da UFRPE em 2014 e, depois concluiu o mestrado(2016) e o doutorado(2020) na Universidade Federal de Pernambuco(UFPE).

Figura 7.1: Fotografia de Milena Monique.
Fonte: Arquivo pessoal.

[6] https://www.youtube.com/live/tSSXdzUa2Nc?si=vOZ2NJDL0J0i9fwH

Em conversa com as professoras Tarciana e Maité, ela destacou que a Rural teve um papel muito importante no desenvolvimento da sua carreira, já que foi na instituição que teve acesso a participar de muitos projetos e programas que alavancaram sua experiência na escola e também no desenvolvimento da matemática. Como exemplo, ela citou o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência(PIBID) que deu a ela a oportunidade de viver o ambiente escolar e a prática de sala de aula. Sob orientação do Prof. Adriano Régis Melo Rodrigues da Silva, ela teve que enfrentar os desafios de salas de aula pouco atrativas aos estudantes e buscar formas de mantê-los ativos e interessados. Sempre com muita paciência e ludicidade, buscava criar alternativas, como competições. Milena também participou do Programa Ciências Sem Fronteiras, passando uma temporada na Università di Pisa, na Itália. Ela também ressaltou que o ambiente acolhedor e o corpo docente acessível,com muitas mulheres, que teve na Rural, a inspiraram a ter uma postura de empatia e interesse pelos seus alunos.

Milena tem muitas iniciativas em sala de aula e contou para nós algumas delas. Ela desenvolveu o projeto "Mulheres na Matemática" que busca destacar o papel das mulheres na área, através de pesquisas, debates e a criação de jogos educativos. Também visando aumentar a representativade das meninas na área, ela criou o "Matemátic-tac", um jornal matemático com redatoras meninas. Ela também organizou a "I Olimpíada Interclasse de Matemática", uma gincana entre as turmas que foi promovida em parceria com o Departamento de Matemática da UFPB, e que através dela abriu a possibilidade dos estudantes terem uma bolsa de iniciação científica no Ensino Médio. Dentre tantos projetos realizados, nos chamou atenção mais dois deles: "Um bilhete para Matemática", nessa atividade, os estudantes escrevem no início do curso um bilhete para ela sobre a matemática e ela lê anonimamente, e no final do curso, eles reescrevem o bilhete, e "Nem tudo é responder", nesse projeto ela estimula os estudantes a criarem questões, podem ser até mesmo uma conta simples. A medida que o curso passa, eles vão aplicando e melhorando significativamente a complexidade das questões criadas.

Uma das falas recorrentes durante a entrevista de Milena é o sentimento de gratidão que ela tem por todos os professores e professoras que passaram na vida dela. Ela também divide a conquista com toda a comunidade escolar que a apoia e a inspira e deixa um recado: "A educação e a matemática mudaram drasticamente a minha vida e é isso que busco proporcionar para os estudantes. É um prazer vê-los aprender, interessados e mudando a vida deles também por meio de oportunidades que criamos juntos."

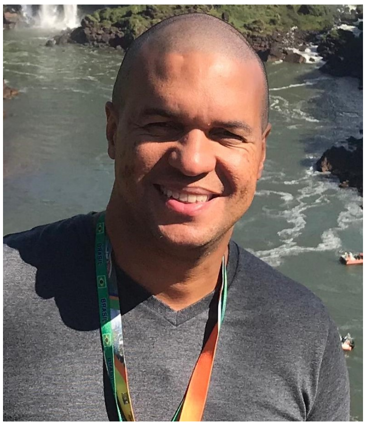


Figura 7.2: Fotografia de Eliton Mendes.
Fonte: Arquivo pessoal.

Premiado com a medalha de prata, temos outro egresso da nossa universidade. O professor Eliton Mendes Pedrosa Simes, que terminou o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional(PROFMAT) em 2023. Eliton graduou-se no Bacharelado em Matemática da UFPE(2007) e fez uma especialização em Educação da Matemática com ênfase em Informática na Faculdade de Ciências Humanas e Sociais de Igarassu(FACIG)(2011). Da Rural, ele guarda o ambiente agradável para estudar e também lembrou que foi, a partir do PROFMAT, que ele teve acesso a bons professores e um ensino de excelência, o que fez ele decidir se dedicar exclusivamente à escola pública.

Ele já foi professor em várias escolas privadas e públicas em Recife, e atualmente é professor da

Escola de Aplicação do Recife da Universidade de Pernambuco(UPE). Além de ter turmas olímpicas de preparação para olimpíadas de matemática, Eliton se destacou pelo seu projeto de natureza interdisciplinar que alia a leitura à Matemática. Ele estimula os estudantes a lerem obras literárias que envolvam a Matemática. Assim, em cada ano do Ensino Médio, ele indica um título. No 1º ano, os estudantes leem "O último Teorema de Fermat" de Simon Singh. No 2º ano, eles discutem "O diabo dos números" de Hans Magnus Enzensberger e por fim, no 3º ano, a indicação é de outro livro de Simon Singh: "Os segredos matemáticos dos Simpsons". Com isso, ele busca estimular os estudantes a relacionar a matemática com questões do dia a dia. Uma curiosidade é que Eliton foi professor de Milena no 3º ano do Ensino Médio.

Durante a nossa conversa, Eliton destacou que ganhar esse prêmio é muito importante para ele, pois a experiência de conhecer os professores e a escola em Xangai, pode melhorar ainda mais a sua prática de sala de aula e de outros colegas. Além disso, ele acredita que pode inspirar e motivar seus estudantes, através da matemática e mostrar que "é possível ir longe através dos estudos".

Esperamos que essas experiências possam contribuir também para motivar nossos estudantes de gradução e pós-graduação, e também a todos os professores de matemática.

Referências

[1] PARAÍBA. Governo do Estado. Professora de Matemática da Rede Estadual está entre os 20 melhores do Brasil e se prepara para fase final da OPMBr. 15 de março de 2024. Disponível em <https://paraiba.pb.gov.br/diretas/secretaria-da-educacao/noticias/professora-de-matematica-da-rede-estadual-esta-entre-os-20-melhores-do-brasil-e-se-prepara-para-fase-final-da-opmbr/>. Acesso em: 25 de Março de 2024.

[2] SBM. Sociedade Brasileira de Matemática. Egresso do PROFMAT é finalista da OPMbr e concorre a intercâmbio para a China. 25 de março de 2024. Disponível em <https://sbm.org.br/blog/2024/03/25/egresso-do-profmat-e-finalista-da-opmbr-e-concorre-a-intercambio-para-a-china/>. Acesso em: 25 de Março de 2024.

8. Problemas

Convidamos o leitor a responder alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Enviem as soluções dos problemas propostos para o e-mail:*ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, o envio do arquivo (.tex), no modelo disponível no site, deve ser realizado até **10/06/2024**.

Problema 1 (XXVII Olimpíada de Matemática da Unicamp (OMU) - 2011)**.** Considere duas velas que têm o mesmo comprimento e são feitas de materiais diferentes. Uma vela queima completamente em 6 horas e a outra vela queima completamente em 4 horas. Determine a que horas as velas devem ser acesas de modo que às 16 horas o comprimento de uma vela seja três quartos do comprimento da outra vela.

Problema 2. (Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte (OMRN) - 2019) Seja $h(x) = x \cdot g(x)$, onde $g(x) = f^{-1}(x)$. A tabela a seguir fornece alguns valores assumidos por $f(x)$ e por sua derivada $f'(x)$.

x	$f(x)$	$f'(x)$
2	4	-1
3	5	2
5	1	3

O valor de $h'(5)$ é:

a) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{11}{2}$ e) $\frac{17}{2}$

b) $\frac{7}{2}$ d) $\frac{13}{2}$

Problema 3. (OBM - Nível Universitário - 2018) Para quantos números primos p o número p^3-4p+9 é um quadrado perfeito?

a) 2 b) 3 c) 5 d) 7

9. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n. 28, outubro de 2023**.

Problema 1. (1ª fase - 16ª OBMEP) Quantas vezes o número 17^2 deve aparecer dentro do radicando na igualdade
$\sqrt{17^2+17^2+\cdots+17^2} = 17^2+17^2+17^2$
para que ela seja verdadeira?

(a) 2601 (b) 861 (c) 289 (d) 51 (e) 9

Solução. [7]

Fazemos $17^2+17^2+\cdots+17^2 = n\cdot 17^2$, sendo n um número natural representando a quantidade de 17^2. Daí temos $\sqrt{n\cdot 17^2} = 3\cdot 17^2$, que simplificando obtemos $n = 51^2 = 2601$.

□

Problema 2. Em uma lanchonete, um pão de queijo, dois cachorros-quentes e um suco de laranja custam juntos R$ 31,00; já três pães de queijo, três cachorros-quentes e dois sucos de laranja custam juntos R$ 59,00. Qual é a diferença entre os preços de um cachorro-quente e de um pão de queijo?

a) R$ 1,00 c) R$ 2,00 e) R$ 3,00

b) R$ 1,50 d) R$ 2,50

Solução. Sejam p = pão de queijo, c = cachorro quente e s = suco. Temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} p + 2c + s = 31 \\ 3p + 3c + 2s = 59 \end{cases}.$$

Multiplicando a primeira equação por (-2) e somando com a segunda, obtemos $p-c=-3$ ou seja $c-p=3$ (três reais). □

[7]As soluções dos problemas 1 e 2 foram enviadas pelo leitor Amaro José de Oliveira Filho

Problema 3. (2ª fase - Nível 3 XXXI-OBM Q.4) No programa de auditório *Toto Bola*, o apresentador Ciço Magallanes dispõe de duas caixas idênticas. Um voluntário da platéia é chamado a participar da seguinte brincadeira: ele recebe dez bolas verdes e dez bolas vermelhas e as distribui nas duas caixas, sem que o apresentador veja, e de modo que em cada caixa haja pelo menos uma bola. Em seguida, o apresentador escolhe uma das caixas e retira uma bola. Se a bola for VERDE, o voluntário ganha um carro. Se for VERMELHA, ele ganha uma banana. A máxima probabilidade que o voluntário tem de ganhar um carro é igual a $\frac{m}{n}$, em que m e n são inteiros positivos primos entre si. Determine o valor de $m+n$.

Solução. Seja $P(a,b)$ a probabilidade de o voluntário ganhar o carro no caso em que ele tenha colocado a bolas VERDES e b bolas VERMELHAS na caixa 1. Então, necessariamente haverá $(10-a)$ bolas VERDES e $(10-b)$ bolas VERMELHAS na caixa 2. Segue que

$$P(a,b) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+1}{a+b} + \frac{1}{2}\cdot\frac{10-a}{20-a-b}.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $a+b \leq 10$, já que as caixas são idênticas. Suponha, ainda, que haja alguma bola VERMELHA na caixa 1. Vejamos o que acontece com essa probabilidade se transferirmos uma bola VERDE da caixa 2 para a caixa 1 e uma bola VERMELHA da caixa 1 para a caixa 2. Ficamos com

$$P(a+1,b-1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+1}{a+b} + \frac{1}{2}\cdot\frac{9-a}{20-a-b}.$$

Dessa forma,

$$P(a+1,b-1) - P(a,b) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{20-a-b}\right) \geq 0,$$

pois $a+b \leq 10$. Assim, o voluntário sabe que, enquanto houver bola VERMELHA na caixa que contém menos bolas, a probabilidade pode ser aumentada, bastando, para isto, que ele troque uma das bolas VERMELHAS desta caixa com uma VERDE da outra. Por isso, para maximizarmos a probabilidade, basta considerarmos o caso em que a caixa 1 contém apenas bolas VERDES e a caixa 2 contém o restante das bolas. Teremos

$$\begin{aligned} P(a,0) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{10-a}{20-a} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{10-a}{20-a}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(2-\frac{10}{20-a}\right)=1-\frac{5}{20-a}. \end{aligned}$$

Logo, a probabilidade será máxima quando a for mínimo. Como em cada caixa deve haver pelo menos uma bola, devemos ter $a=1$. Neste caso, a probabilidade é:

$$P(1,0)=1-\frac{5}{19}=\frac{14}{19}.$$

Segue que $m=14$, $n=19$ e $m+n=33$. $\square$