É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 26, volume 1, abril de 2023

ISSN 2526-8651

Editorial

Caros Leitores,

Para a equipe do jornal É Matemática Oxente, estamos no início do ano.

É uma satisfação iniciarmos com vocês mais uma jornada rumo à consolidação cada vez maior de nosso projeto. Entre a última edição e a atual, vivemos várias realidades que nos fazem antever um novo tempo do ponto de vista educacional e científico para o nosso país. Portanto, a edição de abril de 2023 nasce sob a égide de um desejo coletivo de mudança.

Nesse contexto, também nosso conselho editorial avaliou o que foi feito em 2022: pontos positivos e aspectos a melhorar visando o aperfeiçoamento do jornal. Esta avaliação teve dentre as consequências, a atualização do site do jornal, com as complicações e implicações inerentes a esta empreitada.

Relendo a edição finalizada, ficamos felizes por perceber a contribuição do Oxente no sentido de propiciar ao leitor, uma visão sempre mais ampla da matemática. A presente edição traz na seção artigo um trabalho intitulado Paradoxo do Inventor, escrito pelo professor Hiller Alves Fernandes, Mestrando do PROFMAT-UFVJM. O artigo relacionado com a resolução de problemas destaca dentre outros aspectos, que em algumas ocasiões o plano mais ambicioso na resolução de um problema pode ter mais chances de sucesso, do que um olhar sobre casos específicos. O autor apresenta algumas questões nas quais tal fato se verifica.

A seção curiosidade aborda os Palíndromos em outras bases. Este assunto já foi apresentado há algum tempo; agora com a contribuição do professor Gabriel Guedes do Departamento de Matemática da UFRPE, volta ao jornal, desta vez considerando outras bases.

A indicação de leitura apresenta ao nosso público o livro Deus é Matemático? escrito por Mário Livio, físico e matemático de origem israelense.

A seção Quem pergunta, quer saber! resgata uma pergunta acerca de porcentagem e descontos em preços de mercadorias, publicada na Revista do Professor de Matemática (RPM, no 38, p.56).

Finalizamos a edição com os informes sobre eventos e as nossas, já tradicionais, questões propostas. A propósito, para quem não teve oportunidade de participar do XV Seminário Nacional de História da Matemática, realizado de 2 a 5 de abril na Universidade Federal de Alagoas (UFAL), todo material será disponibilizado no site da Sociedade Brasileira de História da Matemática.

Concluindo, nunca é demais agradecer a todos aqueles que colaboraram nessa edição e desejar aos leitores - razão de ser deste projeto - um bom proveito nesta nova temporada.

Sumário

1. Artigo

Paradoxo do Inventor

Hiller Alves Fernandes
SEE MG - hiller20111@hotmail.com
Mestrando em Matemática PROFMAT-UFVJM
(39818-000) - Padre Paraíso - MG - Brasil

Introdução

Em algumas ocasiões o plano mais ambicioso pode ter mais chances de sucesso, isto é, às vezes para resolver um problema específico devemos atacar um problema mais geral e obter um resultado mais forte. Este é o Paradoxo do Inventor introduzido e definido por Pólya(1978) no seu livro: "A arte de resolver problemas".

Sem dúvida isso é contraintuitivo, pois existe a crença de que o caso geral é sempre mais difícil de se resolver do que o caso específico. Para ilustrar essa ideia vamos abordar alguns problemas de contagem, somas e probabilidade. Peço que o leitor resolva os problemas antes de observar a solução, caso não consiga não se preocupe apenas continue a leitura do artigo.

Contando o número de PA's

Para iniciarmos os trabalhos é fundamental que o leitor saiba o que é uma progressão aritmética.

Definição 1.1. Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência numérica com a propriedade de que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre igual.
São exemplos de PA:

1. $(a_i)_{i\geq 1} = (1, 2, 3, \cdots)$
2. $(b_i)_{i\geq 1} = (2, 4, 6, \cdots)$
3. $(c_1)_{i\geq 1} = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}, \cdots)$.

A primeira PA começa com 1 e sua razão é 1, isto é, $a_{i+1} - a_i = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$. A segunda PA começa com 2 e sua razão é $b_{i+1} - b_i = 2$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por fim, a terceira PA tem termo inicial $\sqrt{2}$ e razão $c_{i+1} - c_i = -\sqrt{2}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Uma PA é bem definida pelo seu termo inicial e sua razão.

A fim de enriquecer a discussão vamos usar, de maneira informal, o conceito de custo computacional. Neste artigo custo computacional é o número de operações necessárias para resolver um determinado problema P com um método M. Por exemplo, utilizando o algoritmo da soma para determinar o valor de $E = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ o custo é igual a 4, pois precisamos realizar 4 operações de soma.

Problema 1.1. Quantas progressões aritméticas de três termos podem ser obtidas com o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$?

Uma possível forma de resolver esse problema é listar todas as possibilidades, mas isso é demorado e pode haver possibilidades não listadas. Então não há como verificar se a lista é exaustiva. Agora, note que os termos são da forma $a, a + r$ e $a + 2r$, onde $a \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{Z}$. De modo que, $a + 2r - a = 2r$.

Portanto, a diferença entre o primeiro e o último termo é sempre um número par, o que indica que ambos possuem a mesma paridade. Nosso problema se reduz em escolher o primeiro e o último termo de modo que a_1 e a_3 tenham mesma paridade, isto é, deixam mesmo resto quando divididos por 2.

Temos três decisões consecutivas a tomar. Primeiro vamos escolher a paridade dos termos: ímpar ou par. Ao escolhermos a paridade, por exemplo, par; há no conjunto 6 opções para o primeiro termo e 5 opções para o último termo. Pelo Princípio Fundamental da Contagem podemos formar $2 \cdot 6 \cdot 5 = 60$ progressões com três números do conjunto dado. $\square$

O que é preciso deixar claro é que o Paradoxo do Inventor só faz sentido se pensarmos em métodos de resolução de problemas. É óbvio que listar todas as PA's de três termos obtidas de $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ é simples e mais natural. Que, a propósito, são: $\{(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 2, 1), (4, 3, 2, 1)\}$. Contudo, quando lidamos com conjuntos maiores (cardinalidade) tal método não é eficiente.

Listar todas as 60 PA's do nosso Problema 1 é possível. Portanto, o custo desse método é de 60 operações (listar item). Mas, note que do nosso modo podemos resolver de forma mais rápida, pois temos o custo computacional de realizar apenas duas operações de multiplicação. Além disso, sem muitas complicações nosso método pode ser aplicado para n sem um ganho substancial de custo computacional. Em outras palavras, o método utilizado na resolução é fácil de se aplicar independentemente do tamanho do conjunto dado.

De fato, se n é par ele é do tipo $n = 2k$, então temos k ímpares e k pares. Logo, o número de progressões aritméticas que podemos formar com três termos de $\{1, \cdots, n-1, n\}$ é $2 \cdot (k) \cdot (k-1)$. Se n é ímpar, então é da forma $2k+1$ e temos assim $k+1$ ímpares e k pares. Portanto, podemos formar $k(k-1) + (k+1)k = 2k^2$ progressões aritméticas com três termos do conjunto $\{1, \cdots, n-1, n\}$.

Teorema 1.1. *Considere o subconjunto dos naturais $I_n = \{1, 2, 3, \cdots, n-1, n\}$. Podemos formar $q[(k-1-r)(q-1) + r(q+1)]$ progressões aritméticas com k elementos onde $k, r, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $n = (k-1)q + r$.*

Demonstração. O primeiro termo da PA é da forma $a \in \mathbb{N}$ e o último é do tipo $a_k = a + (k-1)s$ com $k, s \in \mathbb{N}$, ou vice-versa, se a PA for decrescente. Portanto, $k-1$ divide $a_k - a_1$, isto é, $(k-1)|(a_k - a_1)$. De fato, $|a_k - a_1| = a + (k-1)s - a = (k-1)s$. Consequentemente, o primeiro e o último termo de nossa PA precisam deixar o mesmo resto na divisão por $k-1$.

Existem q e r tais que $n = (k-1)q + r$. De 1 a $(k-1)q$ existem $k-1$ conjuntos com q números inteiros que deixam mesmo resto na divisão por $k-1$. Contudo, ainda precisamos percorrer os números $(k-1)q + 1, (k-1)q + 2, \cdots, (k-1)q + r$. Cada um desses números irá para um e somente um dos conjuntos já formados anteriormente. Assim, ficamos com r conjuntos com $q+1$ elementos e $k-1-r$ conjuntos com q elementos com a propriedade de que os elementos deixam o mesmo resto na divisão por $k-1$.

Primeiramente, devemos determinar de qual conjunto vamos retirar nosso primeiro e último termo da PA. Como a resposta interfere nas escolhas subsequentes temos que aplicar o Princípio Aditivo. Há r possibilidades para escolhermos os conjuntos com $q+1$ elementos (caso 1) e $k-1-r$ possibilidades de escolha para os conjuntos com q elementos (caso 2).

No primeiro caso temos $q+1$ possibilidades para a_1 e q possibilidades para o termo a_k e pelo Princípio Fundamental da Contagem temos $r(q+1)q$ PA's com k termos obtidos dos conjuntos do caso 1. Agora, no segundo caso temos q possibilidades para a_1 e $q-1$ possibilidades para a_k totalizando assim $(k-1-r)q(q-1)$ PA's com k elementos obtidos com os conjuntos do caso 1.

Como o caso 1 e o caso 2 são disjuntos segue que o total de progressões aritméticas obtidas de I_n é dada por $q[(k-1-r)(q-1) + r(q+1)]$. Como queríamos demonstrar. $\square$

O importante não é decorar a fórmula, pois é fácil deduzi-la se você entendê-la. Por exemplo, suponha que queremos contar quantas progressões aritméticas com quatro termos tais que esses termos pertençam ao conjunto $I_{101} = \{1, 2, \cdots, 100, 101\}$. Sabemos que $|a_4 - a_1| = 3s$, portanto, múltiplo de 3. Note que, $101 = 3 \cdot 33 + 2$.

De 1 até 99 há 3 conjuntos que podemos chamar de R_0, R_1' e R_2' cada um com exatamente 33 elementos, onde o índice indica o resto que cada elemento dos conjuntos acima deixam na divisão por 3. Porém, ainda restam dois elementos não listados que são 100 e 101. Eles irão para conjuntos distintos, pois, $100 = 33 \cdot 3 + 1$ e $101 = 33 \cdot 3 + 2$. Logo, $R_1 = R_1' \cup \{100\}$ e $R_2 = R_2' \cup \{101\}$ ambos com cardinalidade 34. Portanto, o número de PA's com 4 termos obtidos de I_{101} é dado por

$$33 \cdot 32 + 2 \cdot 34 \cdot 33 = 3300.$$

De fato, escolher o último e o primeiro termo é criar uma PA bem definida, pois de imediato já definimos o termo inicial e, ao obtermos o último termo, determinamos assim a razão da PA. Uma progressão aritmética está bem definida com o termo inicial e uma razão. Observe ainda que a fórmula nos fornece as PA's crescentes e decrescentes.

Mudando as bases do problema

Vamos definir progressão geométrica, tal conceito será útil para a resolução dos próximos problemas.

Definição 1.2. Progressão geométrica é uma sequência numérica na qual cada termo é igual ao produto de seu antecessor com uma constante, chamada razão da PG são exemplos de progressões geométricas:

1. $(d_i)_{i\geq 1} = (\pi, 1, 1/\pi, \cdots)$
2. $(e_i)_{i\geq 1} = (2, 6, 18, \cdots)$
3. $(f_i)_{i\geq 1} = (\sqrt{2}, -2, 2\sqrt{2}, \cdots)$.

A primeira PG começa com π e sua razão é $1/\pi$, isto é, $d_{i+1}/d_i = 1/\pi$ para todo $i \in \mathbb{N}$. A segunda PG começa com 2 e sua razão é $e_{i+1}/e_i = 3$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por fim, a terceira PG tem termo inicial $\sqrt{2}$ e razão $f_{i+1}/f_i = -\sqrt{2}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Uma PG é bem definida pelo seu termo inicial e sua razão.

Problema 1.2. (Stolimpíadas 2021). Considere a sequência formada por potências de 3 ou somas de parcelas distintas de potências de três, isto é, $a_1 = 3^0 = 1, a_2 = 3, a_3 = 3 + 1 = 4, a_4 = 3^2 = 9, a_5 = 3^2+1 = 10, a_6 = 3^2+3 = 12, a_7 = 3^2+3+1 = 13, \cdots$. Determine o centésimo termo dessa sequência.

Também é possível resolver esse problema apenas listando os termos da sequência até obtermos o centésimo termo. Porém, existe um caminho muito rápido que envolve mudança de bases. Nosso sistema numérico tem base 10. Por exemplo, o número 215 na verdade é $2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 5 \cdot 10^0$.

Porém podemos representar qualquer número em outras bases como a base $2, 3, \ldots, n$. Os números da sequência na base 3 são do tipo $a_1 = (1)_3, a_2 = (10)_3, a_3 = (11)_3$, e assim por diante. São números que possuem só algarismos uns e zeros.

Mas, note que a sequência desses números formados por apenas zeros e uns é exatamente igual em qualquer base.

$$(1)_2 < (10)_2 < (11)_2 < (100)_2 < (101)_2 < \cdots$$

$$(1)_3 < (10)_3 < (11)_3 < (100)_3 < (101)_3 < \cdots$$

$$(1)_k < (10)_k < (11)_k < (100)_k < (101)_k < \cdots$$

para $k \geq 2$. Portanto, a representação do centésimo termo na base 2 é exatamente igual a representação do centésimo termo da sequência na base 3 ou mesmo k. Contudo, é mais simples achar o centésimo termo na base 2, pois ele representa justamente o 100 na base 10.

Note que, $(100)_{10} = (1100100)_2$. De fato, $1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 100$. Portanto, $a_{100} = (1100100)_3 = 3^6 + 3^5 + 3^2 = 981$. $\square$

E de modo geral, o centésimo termo de uma sequência composta por potências de k ou por somas de parcelas distintas de potências de k é dada por $k^6 + k^5 + k^2$. Neste caso, o Paradoxo do Inventor é surpreendente! A solução para o caso geral é tão simples quanto obter a solução para caso em que lidamos com potências de 2 ou $n = 2$. E o método de listar os termos tem maior custo computacional, além disso, só vale para um caso específico. Se mudarmos a base das potências é necessário realizar todo o processo de listagem novamente.

Lembrando que um número $x = (a_n a_{n-1} \cdots a_1)_k$ implica que $a_i \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, k-2, k-1\}$. Uma forma de converter certo número inteiro positivo em seu correspondente na base dois é realizar sucessivas divisões por dois e, escrever de baixo para cima os restos e o último quociente. Por exemplo o 9:

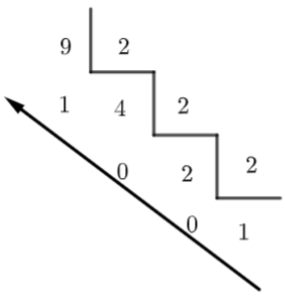


Figura 1.1: 9 na base 2

Assim, $(9)_{10} = (1001)_2$. Uma segunda possibilidade para a conversão é utilizarmos o dispositivo prático de Briot-Ruffini. É fácil ver que o método que utilizamos é muito mais eficiente do que apenas listar todos os elementos. De fato, é necessário listar 99 elementos até obtermos a oportunidade de calcular o centésimo termo.

A rigor, precisamos demonstrar que $(1)_k < (10)_k < (11)_k < (100)_k < (101)_k < \cdots$ é igual para todo $k \geq 2$.

Proposição 1.2. *A ordenação dos números formados com apenas algarismos zeros e uns em qualquer base é igual a ordenação desses números na base* 2.

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, todos com n dígitos na base dois, caso não existam serão preenchidos por zeros. Em notação $a = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$ e $b = b_n b_{n-1} \cdots b_2 b_1$. Inicialmente, note que, se $(a)_2 < (b)_2$ então existe um primeiro $j \leq n$ tal que $a_j = 0 < b_j = 1$.

Suponha por absurdo que para algum $x, y \in \mathbb{N}$ com a mesma representação (a e b respectivamente) em uma certa base $k > 2$ temos $(x)_k > (y)_k \Rightarrow x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1 > y_n y_{n-1} \cdots y_2 y_1$. Porém, na mesma posição j temos $x_j = 0 < y_j = 1$. Onde j é a primeira posição onde ocorre essa divergência observando o número da esquerda para a direita. Os algarismos $x_n = y_n, x_{n-1} = y_{n-1}, \cdots, x_{j+1} = y_{j+1}$ são todos iguais. Portanto,

$$x - y = x_{j-1} \cdots x_2 x_1 - 1 y_{j-1} \cdots y_2 y_1.$$

Porém, o j-ésimo termo de y vale k^j. Enquanto $x_{j-1} \cdots x_2 x_1 \leq k^{j-1} + k^{j-2} + \cdots + k + 1$. Por outro lado,

$$k^{j-1} + k^{j-2} + \cdots + k + 1 = \frac{k^j - 1}{k - 1} < k^j.$$

Consequentemente, $x - y < 0 \Rightarrow x < y$. Contradição, pois inicialmente dissemos que $x > y$. Portanto, a ordenação desses números na base k é idêntica ao da base 2. $\square$

Podemos justificar a igualdade $k^{j-1} + \cdots + k + 1 = (k^j - 1)/(k - 1)$ utilizando a fórmula da soma dos termos de uma PG finita. Seja $(f_i)_{i \geq 1}$ uma PG de razão q e com $f_1 = x$. Então a soma dos seus j-ésimos primeiros termos será denotada por

$$S = \sum_{i=1}^{j} f_i = x + qx + q^2 x + \cdots + q^{j-1} x \quad (1).$$

Multiplicando S por q obtemos,

$$qS = qx + q^2 x + q^3 x + \cdots + q^j x \quad (2).$$

Subtraindo a equação (1) da equação (2) obtemos,

$$qS - S = q^j x - x \Rightarrow S = x \cdot \left(\frac{q^j - 1}{q - 1} \right).$$

Tomando $x = 1$ e $q = k$ justificamos a igualdade. É possível generalizar a solução que demos. Você leitor poderá pensar em desafios diferentes como, por exemplo, e se fosse possível somar no máximo duas potências iguais como a solução ficaria? Agora vamos abordar rapidamente três definições importantes para a resolução dos próximos problemas.

Definição 1.3. Dados dois conjuntos X e Y diz-se que uma função $f : X \to Y$ é injetora ou injetiva quando elementos diferentes em X são associados por uma regra a elementos diferentes de Y. Ou seja, f é injetiva quando

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Com $x, x' \in X$ e $f(x), f(x') \in Y$, ou ainda, pela sua contrapositiva:

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

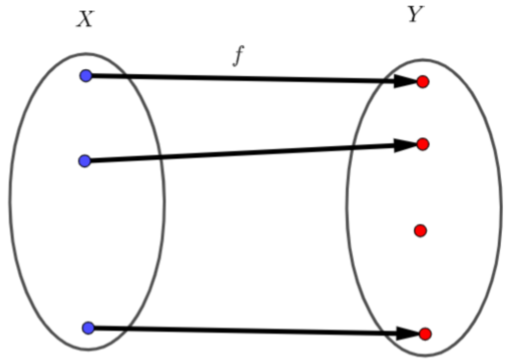


Figura 1.2: função injetiva

Definição 1.4. Dados dois conjuntos X e Y diz-se que uma função $f : X \to Y$ é sobrejetora ou sobrejetiva quando, para qualquer elemento de $y \in Y$ pode-se encontrar pelo menos um elemento x em X tal que $f(x) = y$.

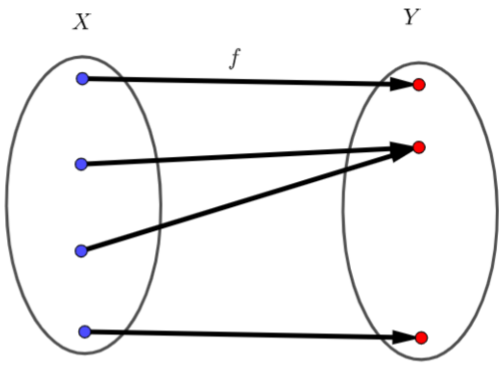


Figura 1.3: função sobrejetiva

Definição 1.5. Dados dois conjuntos X e Y diz-se que uma função $f : X \to Y$ é bijetora ou bijetiva quando f é injetora e sobrejetora.

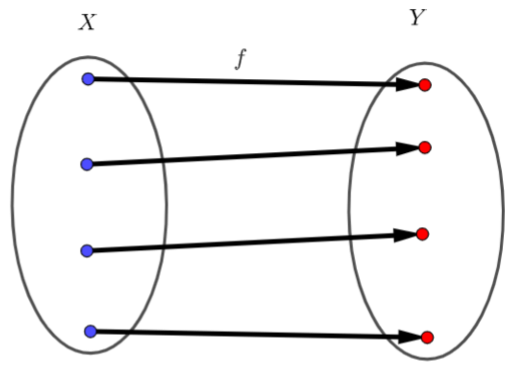


Figura 1.4: função bijetiva

1. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$ não é injetora e nem sobrejetora.

2. A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = x^2$ é sobrejetora, mas não é injetora.

3. A função $r : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, definida por $r(x) = x+1$ é injetora, mas não é sobrejetora.

4. A função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$, definida por $s(x) = x+1$ é injetora e sobrejetora, portanto, bijetora.

Problema 1.3. Ainda observando a sequência de potências de três e somas de parcelas distintas de potências de três: determine a soma dos termos até $a_{2^7-1} = 3^7$.

Uma possibilidade é listar todos os 127 termos e em seguida somar tudo. Contudo, isso é muito trabalhoso. E se observássemos os termos na base 2 novamente?

Outra possibilidade é explorar alguma fórmula. Para obter alguma inspiração, pensemos no problema de somar todos os inteiros positivos de 1 até 100. Chamemos essa soma de S.

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 99 + 100 \quad (3).$$

Por outro lado, pela comutatividade da adição podemos inverter os termos que teremos novamente S.

$$S = 100 + 99 + 98 + 97 + \cdots + 2 + 1. \quad (4).$$

Somando as equações (3) e (4) termo a termo obtemos,

$$2S = 101 + \cdots + 101 \Rightarrow S = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050.$$

Multiplicar e dividir é mais fácil do que realizar 99 somas com 100 parcelas distintas. Intuitivamente estabelecemos uma função bijetora entre I_{100} e I_{100}, $f : I_{100} \to I_{100}$.

Agora, considere o conjunto P formado por números de 5 algarismos ímpares distintos. Por exemplo, 13579 e o 97531 pertencem ao conjunto P. Novamente vamos tentar criar uma função bijetora de P em P. Nesse caso a regra de associação não é óbvia.

A cardinalidade de P é dada por $|P| = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ números permutados de $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Podemos listar todos e realizar a soma, mas note que para cada $x \in P$ existe um único $x' \in P$ tal que $x + x' = 111110$. Por exemplo, $13579 + 97531 = 111110$. Como podemos formar 60 pares desse tipo segue que,

$$\sum_{x \in P} x = 60 \cdot 111110 = 6666600.$$

De fato, se $x = a_1a_2a_3a_4a_5$ basta tomarmos uma permutação do tipo $x' = a'_1a'_2a'_3a'_4a'_5$ tal que $a_i + a'_i = 10$ para todo $i = 1, 2, 3, 4, 5$ e $a_i, a'_i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. E é único porque não existem $w, y, z \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ tais que $w + y = 10$ e $z + y = 10 \Rightarrow w + y = z + y \Rightarrow w = z$. Além disso, $x' \in P$ pois todos os seus dígitos são ímpares e distintos.

Agora, para atacarmos o problema 3 vamos observar os números na base três e utilizaremos o raciocínio heurístico de observar somas que dão sempre o mesmo valor.

O último termo da soma é do tipo $(10000000)_3$. Para chegarmos nele exaurimos todas as sequências possíveis de números formados por dígitos zeros e uns de comprimento 8. De fato, vamos considerar os números como uma sequência de oito dígitos: $A = \{00000000, 00000001, 00000010, \cdots, 10000000\}$. Isso sem perda de generalidade. O zero ser agregado a nossa sequência não altera o valor da soma.

Observe que para cada $x \in A$ existe um único $x' \in A$ tal que $x + x' = 11111111$. Como $|A| = 2^7$ elementos podemos criar $2^7/2 = 2^6$ pares do tipo $x + x'$. E soma de parcelas iguais pode ser vista como uma multiplicação. Portanto,

$$\sum_{x \in A} x = (2^6)_3 \cdot (11111111)_3.$$

Voltando para a base 10, temos

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{x \in A} x &= 2^6 \cdot (3^7 + 3^6 + 3^5 + 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1) \\ &= 2^6 \cdot \frac{(3^8 - 1)}{2} \\ &= 2^5 \cdot (3^8 - 1) = 209920. \end{aligned}$$

E de modo geral, para $k \geq 2$:

$$\sum_{x \in A} x = 2^6 \cdot \left(\frac{k^8 - 1}{k - 1}\right).$$

O problema fica um pouco mais difícil se não estamos lidando com uma potência perfeita de k. Por exemplo, para somarmos os 100 primeiros termos podemos aplicar o procedimento acima até o termo k^6. Depois disso, precisaremos listar os 36 termos restantes para posteriormente somá-los.

Nosso método tem menor custo computacional do que listar tudo e depois realizar as somas. Só na parte final é preciso realizar $2^n - 2$ somas, tem um crescimento exponencial. Enquanto nosso método necessita de $2n + 2$ operações aritméticas. Problemas que envolvem muitas somas são propícios para o uso do Paradoxo do Inventor.

Mais dois problemas interessantes

Em algumas ocasiões devemos atacar problemas mais fracos, isto é, casos mais simples com o intuito de obter a solução geral. Mesmo assim, a solução geral pode ser mais fácil de se obter do que o problema original.

Em outras palavras o problema não é resolvido por tempo hábil se valendo de ferramentas usuais. Por exemplo, para calcular 7^n precisamos realizar

$n-1$ multiplicações, para um n grande isso pode ser impraticável em uma Olimpíada de Matemática. Porém, se o problema quer algo mais específico do que o valor de 7^n como, por exemplo, o algarismo das unidades é certo que existe um caminho com menor custo computacional. No nosso problema esse custo é de apenas uma divisão.

Problema 1.4. (PIC adaptada). Determine o algarismo das unidades do número 7^{2023}.

É impraticável obter o valor de 7^{2023} para verificar o dígito das unidades. Mas, podemos observar o mesmo problema para $7^0, 7^1, 7^2, 7^3, 7^4$ e assim por diante.

n	7^n
0	1
1	7
2	49
3	$\cdots 3$
4	$\cdots 1$
5	$\cdots 7$
6	$\cdots 9$
7	$\cdots 3$
8	$\cdots 1$

Tabela 1: Potências de 7

Observando os 9 primeiros casos podemos conjecturar que se $7^n = a_k a_{k-1} \dots a_1$ então $a_1 \in \{1, 7, 9, 3\}$. Além disso, se n é múltiplo de 4 então $a_1 = 1$. Se n deixa resto 1 na divisão por 4 então $a_1 = 7$. Se n deixa resto 2 na divisão por 4 então $a_1 = 9$ e, por fim, se n deixa resto 3 na divisão por 4 então $a_1 = 3$.

Observe que, $2023 = 4 \cdot 505 + 3$. Então, podemos supor que 7^{2023} termina com o algarismo 3. Porém, precisamos justificar.

De fato, $n = 4q + r$ com $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Logo, $7^n = 7^{4q+r} = 7^{4q} \cdot 7^r = \left(7^4\right)^q \cdot 7^r$. Sabemos que 7^4 é uma potência que termina em 1. Então, não importa o valor de q que $\left(7^4\right)^q$ sempre terminará em 1.

A partir de agora podemos só trabalhar com os dígitos das unidades. De fato, quando aplicamos o algoritmo da multiplicação é suficiente observarmos a multiplicação dos algarismos das unidades para verificar qual será a unidade resultante da multiplicação principal.

Denotemos $\overline{a}$ como sendo o último algarismo do inteiro a. Portanto, $\overline{7^n} = \overline{1} \cdot \overline{7^r} = \overline{7^r}$. Logo, de fato, $\overline{7^{2023}} = \overline{1} \cdot \overline{7^3} = \overline{7^3} = 3$. O dígito das unidades de 7^{2023} é igual a 3. $\square$

O passo fundamental para a solução é que $\left(\overline{1}\right)^q = \overline{1}$, ou seja, uma invariante. Podemos resumir a Tabela 1 em um relógio de restos da divisão por 10, de fato, nosso problema se resume em determinar o resto da divisão de 7^{2023} por 10.

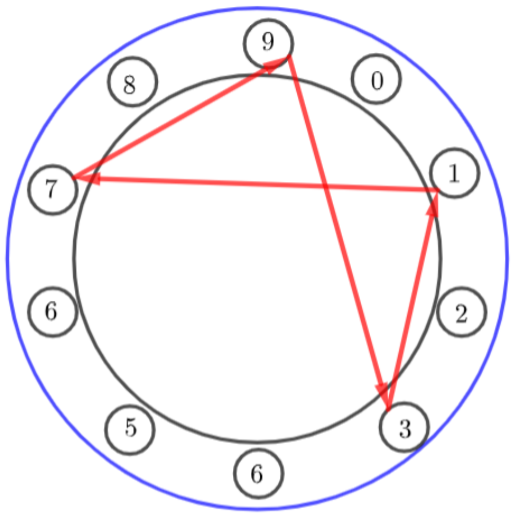


Figura 1.5: Relógio de restos

O relógio nos mostra que basta saber o estado atual $a_t = 7^t$ para determinar o estado subsequente $a_{t+1} = 7^{t+1}$. E que os estados possíveis são $\{1, 3, 7, 9\}$. Por exemplo, se $a_t = 1 \Rightarrow a_{t+1} = 7$, basta seguir a seta que sai de 1. Além disso, há apenas uma seta que chega nos números e uma única que sai. É útil se valer do Paradoxo do Inventor em problemas de Olimpíadas onde o método usual é impraticável por causa do tempo disponível.

Uma notação útil, e que tentei evitar, é a de congruência introduzida pela primeira vez pelo grande matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Dizemos que dois inteiros a e b são congruentes módulo $q \in \mathbb{Z}$ se, e somente se, a e b deixam o mesmo resto na divisão por q. Em notação temos $a \equiv b \mod q$. Com o uso dessa Aritmética o

Problema 4 fica ainda mais claro e simples. vamos definir nossa última ferramenta de contagem que é útil em diversos problemas.

Definição 1.6. Dizemos que há uma multijeção quando cada elemento de X se corresponde, relaciona ou é associado por uma regra a n elementos de Y.

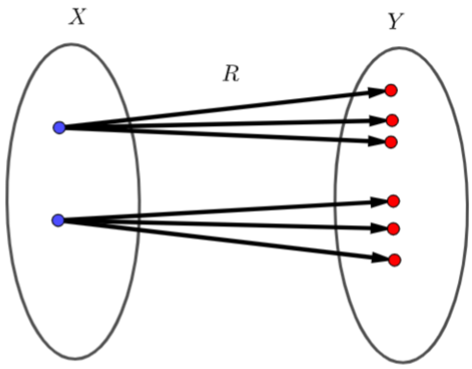


Figura 1.6: multijeção

Não podemos dizer que R é uma função. Além disso, é fundamental que todos os elementos de Y se correspondam com algum elemento de X, pois caso contrário uma contagem não seria possível. Também não pode haver elementos em X que se correspondem com k elementos de Y e elementos de X que se correspondem com n elementos de Y tal que $k \neq n$. Neste caso a contagem também é afetada.

Problema 1.5. (PIC Jr adaptada). Luísa e Sara retiram cada uma um bilhete de uma urna que contém bilhetes numerados de 1 a 201, sem reposição. Determine a probabilidade do número de Luísa ser maior que o de Sara.

Seja x o número do bilhete de Luísa e y o número do bilhete de Sara. Queremos determinar $P(x > y)$. Lembrando que, neste caso, a probabilidade pode ser dada por $P(x > y) = |A|/|S|$, onde S é o espaço amostral e A é o conjunto dos resultados favoráveis, isto é, $x > y$.

Uma possibilidade é contar ou listar todos os casos favoráveis e todos os casos possíveis e realizar a divisão. Existe uma possibilidade mais simples de resolução que se quer depende do número de bilhetes na urna.

Vamos considerar os eventos possíveis como pares ordenados $(x, y) \in S$. Para cada par ordenado do tipo (x', y'), onde $x' > y'$, existe um par ordenado (y', x'). Então, se há k pares ordenados do tipo (x', y') isso implica que há também k pares ordenados do tipo (y', x'). Totalizando $2k$ casos possíveis.

De fato, $|S| = 2k$, pois particionamos o conjunto S em dois conjuntos disjuntos e não ocorre o caso $x = y$. Logo, $P(x > y) = k/2k = 1/2$. Podemos praticar um raciocínio semelhante com uma n-upla.

Por exemplo, suponha que temos Luísa, Sara, Bernardo, Lamar, Lucas e Pedro para retirar um bilhete cada um sem reposição. Qual é a probabilidade de Luísa tirar o bilhete com o maior número dentre eles?

Podemos organizar os resultados como uma sêxtupla ordenada do tipo $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in S$. Suponha que, $x'_1 > x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6$. Podemos obter para cada sêxtupla do tipo $(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6)$ cinco sêxtuplas onde trocamos x'_1 por algum x'_i e x'_i por x'_1 com $i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Em outras palavras fazemos $x_1 = x'_i$ e $x_i = x'_1$ e deixamos o restante como está para $x_j = x'_j$ com $j \neq i$ e $j \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Como existem k sêxtuplas do tipo $(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6)$ onde $x'_1 > x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6$, isso implica que existem $5k$ sêxtuplas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, em que $x_1 < x_i$ para algum $i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Logo, $|S| = 6k$. Portanto, $P(x_1 > x_i, \forall i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}) = k/6k = 1/6$.

Na verdade podemos generalizar essa conclusão para uma ênupla com n ordenadas. Suponha que temos n pessoas e Luísa é a primeira, todos vão retirar um bilhete sem reposição da urna. A probabilidade de Luísa obter o bilhete com o maior número é de $1/n$.

De fato, para cada n-upla do tipo $(x'_1, x'_2, x'_3, \cdots, x'_n)$ onde $x'_1 > x'_i$ para todo $i \in I_n$ existem $n-1$ n-uplas distintas onde $x_1 < x_i$ para algum i, basta fazermos $x_1 = x'_i$, $x_i = x'_1$ e $x_j = x'_j$ para $j \in I_n$ onde $j \neq i, 1$. Como há k n-uplas onde x_1 tem o maior valor, isso implica que, existem $(n-1)k$ n-uplas onde x_1 não possui o maior valor. Temos então uma multijeção. Termo que não é muito usado no Brasil. Logo, $P(x_1 > x_i, \forall i \in I_n \setminus \{1\}) = k/(k+(n-1)k) = k/nk = 1/n$. $\square$

Utilizando a multijeção a solução do nosso problema torna-se quase instantânea e, portanto, com um custo computacional menor do que outros métodos. De fato, não importa o número de participantes e de bilhetes. Também não é fundamental listar ou mesmo usar outros métodos de contagem. O Paradoxo do Inventor pode lhe dar ferramentas adicionais para atacar determinados problemas e evitar, em algumas ocasiões, fórmulas difíceis.

Considerações finais

Em algumas situações, paradoxalmente, resolver um problema geral é mais fácil e plausível do que resolvê-lo de modo específico. Contudo, Pólya(1978) ressalta que ao buscarmos resolver problemas mais fortes esta busca não pode ser baseada apenas na mera pretensão, mas em uma visão que vai além.

De fato, as pessoas que resolvem problemas de Matemática necessitam de uma bagagem teórica. Por exemplo, nos problemas abordados aqui, foi preciso saber o que é uma PA, PG, invariante, probabilidade, mudança de bases e como encontrar, mesmo que de forma intuitiva, bijeções ou multijeções.

Exercícios

Exercício 1 (OBMEP 2010)**.** Cada um dos números $x_1, x_2, \cdots, x_{2004}$ pode ser igual a $\sqrt{2}-1$ ou a $\sqrt{2}+1$. Quantos valores inteiros distintos pode valer a soma

$$\sum_{k=1}^{1002} x_{2k-1}x_{2k} = x_1x_2 + x_3x_4 + \cdots + x_{2003}x_{2004}?$$

Exercício 2. Calcule o valor da soma dos 200 primeiros inteiros positivos.

Exercício 3. Encontre o valor de S :

$$S = \sum_{k=1}^{200}(-1)^k k^2 = -1^2 + 2^2 - \cdots - 199^2 + 200^2.$$

Exercício 4. Simplifique o produto de 200 fatores a seguir:

$$\prod_{k=1}^{200} a^k = a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot \ldots \cdot a^{200}.$$

Exercício 5 (Oxford math admission 2021)**.** Qual é o valor de E?

$$E = \sum_{i=1}^{90} \operatorname{sen}^2(i) = \operatorname{sen}^2(1) + \cdots + \operatorname{sen}^2(90)$$

Dica: se $0 \leq \alpha \leq 90$, então $\cos(\alpha) = \operatorname{sen}(90-\alpha)$ e $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

Exercício 6. Considere a sequência $(a_i)_{i\geq 1}$ onde a_i é a soma de no máximo duas potências distintas de 5. Os primeiros termos são $a_1 = 5^0 = 1, a_2 = 5^0 + 5^0 = 2, a_3 = 5^1, a_4 = 5+1, a_5 = 5+1+1$ e assim sucessivamente. Determine a_{152}.

Exercício 7. Ainda considerando a sequência anterior, determine a soma de todos os termos até 5^5.

Exercício 8. Considere o conjunto $A = \{2,3,4,5,6\}$. Seja P o conjunto de todos os números de 5 dígitos não necessariamente distintos onde $a_5a_4a_3a_2a_1 \in P$, então $a_i \in A$ para todo $i = 1,2,3,4,5$. Calcule o valor da soma dos elementos de P.

Exercício 9 (OBMEP adaptada)**.** Uma loja distribuiu 9999 cartões entre os seus clientes. Cada um dos cartões possui um número de 4 algarismos, entre 0001 e 9999. Um cartão é premiado se a soma dos dois primeiros algarismos for igual à soma dos dois últimos algarismos; por exemplo, o cartão 0743 é premiado. Calcule a soma dos cartões premiados.

Dica: Mostre que se $abcd$ é um cartão premiado, então, $a'b'c'd'$ tal que $abcd + a'b'c'd' = 9999$ também é um cartão premiado.

Exercício 10. Quantas progressões aritméticas de 6 termos podemos obter do conjunto $I_{100} = \{1,2,3,\cdots,99,100\}$? Quantas PA's decrescentes? Quantas PA's só com termos ímpares?

Exercício 11. Uma urna contém 60 bolas enumeradas de 1 até 60. Qual é a probabilidade de se retirar, sem reposição, 6 bolas com os valores crescentes em sequência?

Exercício 12 (OBMEP 2010)**.** Determine quais números naturais n entre 2001 e 2007 tornando o número $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ não é divisível por 5.

Dica: Um número é divisível por 5 se, e somente se, o algarismo das unidades for igual a 5 ou 0.

Referências

[1] NETO, AC Muniz. Tópicos de Matemática Elementar: Volume 4 Combinatória. SBM 2016.

[2] NETO, AC Muniz. Tópicos de Matemática Elementar: Volume 5 Teoria dos Números. SBM 2012.

[3] LIMA, Elon Lages et al. A matemática do ensino médio. Revista do Professor de Matemática, v. 44, p. 51, 2000.

[4] POLYA, George. A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: interciência, v. 2, p. 12, 1978.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao Comitê Editorial deste jornal pela oportunidade. Também quero agradecer aos professores do OBMEP na escola da minha região. Muitos dos problemas aqui abordados foram centro de calorosas e recompensadoras discussões sobre possíveis soluções.

2. Curiosidades

Palíndromos em Outras Bases

Gabriel Araújo Guedes[1]

Em nossa edição de número 17, publicada em dezembro de 2020, na seção “Quem pergunta, quer saber!” nos é apresentado os curiosos números palíndromos. Recordamos que a definição de um número palíndromo ou capicua é: se quando lido da esquerda para direita ou no sentido reverso obtemos o mesmo número. Por exemplo: 232 e 175571 são palíndromos. O grande desafio relacionado aos números palíndromos é o “algoritmo reverte-e-soma”, tradução livre para “reverse sum sequence”. Mas o que diz o algoritmo “reverte-e-soma”:

1. Inicie com um natural N;
2. Reverta os dígitos de N;
3. Some esses dois valores;
4. Se o resultado for um palíndromo exiba-o, Caso contrário repita o algoritmo.

Assim por exemplo se $N = 57$ temos $57 \Rightarrow 57+75 = 132 \Rightarrow 132 + 231 = 363$ que é palíndromo. E a grande pergunta é: Independente do inteiro positivo que tomamos inicialmente, esse algoritmo sempre termina? Ou de outra forma: Existe algum inteiro para o qual esse algoritmo não tem fim?

Aparentemente o número 196 é um desses números. O recorde atual nos diz que iniciando com o 196, após mais de 250 milhões de iterações do algoritmo obtemos um número com 115 milhões de dígitos que não é palíndromo.

Muito pouco se sabe sobre essas perguntas, do ponto de vista teórico, temos apenas evidências computacionais.

Mas o que faz um matemático quando se depara com um problema do qual ele não consegue progredir?
Uma boa estratégia é:
Responder problemas parecidos que são mais simples. Aumentar a quantidade de hipóteses. Mudar o ambiente do problema.

Nessa nova perspectiva temos um resultado muito curioso: Se trocarmos nosso ambiente dos números escritos em base 10 por números escritos na base 2 o que acontece com o “algoritmo reverte-e-soma”?

[1]Professor do Departamento de Matemática da UFRPE

Consideremos o seguinte número

$$N = 10\ [n * 1]\ 01\ [n * 0],$$

no qual o símbolo $[n * x]$ representa n ocorrências do dígito x, com $n \geq 2$. Convidamos o leitor a verificar que ao aplicarmos o algoritmo neste número obtemos:

$$\begin{aligned} 10\ [n * 1]\ 01\ [n * 0] \\ 11\ [(n-2) * 0]\ 1000\ [(n-2) * 1]\ 01 \\ 10\ [n * 1]\ 01\ [(n+1) * 0] \\ 11\ [n * 0]\ 10\ [(n-1) * 1]\ 01 \\ 10\ [(n+1) * 1]\ 01\ [(n+1) * 0]. \end{aligned}$$

Ou seja, o último número desse ciclo é o mesmo do número de entrada, trocando n por $n+1$. O leitor pode verificar usando indução em n, que a sequência toda é gerada por repetições desses 4 passos. Em outras palavras, o que acabamos de exibir é que na base 2 encontramos uma família de números para o qual o "algoritmo reverte-e-soma" entra em loop, isto é, fica se repetindo sem ter um fim. Respondendo ao desafio neste novo ambiente.
Nesta mesma linha de ideias podemos provar muito mais coisas. É possível encontrar sequências livres de palíndromos para números escritos na base 4, 8 e 16 etc. Isto é, podemos provar que um ciclo como este sempre existe quado o número é escrito numa base da forma 2^k e o tamanho do ciclo é exatamente $2k + 2$.
Alguns poucos exemplos são conhecidos para outras bases que não são potência de 2 e nenhum dos métodos parece ter aplicação análoga para o caso da base 10. Fica aqui o desafio ao leitor: O que acontece na base 3? E na base 5?

[1] SEQUENCE:A023108. **The Online Encyclopedia of Integers Sequences**, Disponível em: https://oeis.org/A023108, Acesso em: 11 de março de 2023.

[2] Brown, Kevin. Digit Reversal Sums Leading to Palindromes. **Mathpages**, disponível em: https://www.mathpages.com/home/kmath004/kmath004.htm, acessado em: 10 de março de 2023.

3. Indicações de Leituras

Deus é Matemático?

Severino Barros de Melo[2]

A indicação de leitura para esta edição é o livro Deus é Matemático? escrito por Mario Livio, físico e matemático de origem israelita, formado pela Universidade Hebraica de Jerusalém. Concluiu seu Ph.D. em astrofísica pela Universidade de Telavive. Foi chefe da divisão científica responsável pelo telescópio espacial Hubble e durante 24 anos coordenou pesquisas em cosmologia e astrofísica. Publicou centenas de artigos científicos e costuma dar palestras sobre ciência para o grande público. Dentre os vários livros publicados, ao menos dois foram traduzidos para a língua portuguesa: Razão Áurea e A Equação que ninguém conseguia resolver.

Fonte: Google imagens

Em junho de 2021 seu nome ganhou ainda mais notoriedade no nosso país pelo fato da Revista Veja (9/6/2021) ter publicado uma matéria sobre o lançamento no Brasil de uma biografia de Galileu Galilei, escrita por ele.
No livro Deus é Matemático? Livio retoma um argumento que sempre esteve presente ao longo da História da Matemática. De fato, há séculos houve inúmeras tentativas de procurar áreas de intersecção entre a Matemática e a Religião. A tal ponto que muitas pessoas perguntam aos matemáticos se

[2]Professor do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco

é possível provar a existência de Deus com a Matemática.

Nesse contexto vale lembrar a recorrência do tema com a célebre metáfora da aposta, escrita pelo matemático francês Blaise Pascal (1623-1662), e o debate público entre o matemático Leonhard Euler (1707-1783) e o filósofo francês Denis Diderot (1713-1784).

No texto de Pascal, ele usou conceitos da matemática por ele criados para apresentar sua convicção sobre a existência de Deus. Ele usa um argumento do cálculo das probabilidades, ao afirmar que se Deus existe ou não, é preciso apostar. Quando alguém aposta o faz pensando em ganhar. E, em síntese, considera que se alguém apostar que Deus existe e ele não existir, nada acontece. Mas se alguém apostar que Deus não existe e se ele existir, a pessoa está eternamente perdida.

Lancelot Hogben no seu livro Las Matemáticas al alcance de todos, narra o episódio envolvendo Euler e Diderot. Ele conta que certa ocasião, num debate público na corte russa, Euler com sólida formação religiosa e sabedor que Diderot não tinha muita intimidade com a álgebra e se dizia ateu, sentenciou: $\dfrac{a+b^n}{n} = x$, logo Deus existe. Sem ter condições de perceber que estava diante de uma brincadeira e que bastava atribuir valores para a, b e n, e assim encontrar x, contudo sem nada provar, Diderot retirou-se frustrado e não mais se arriscou a debater na corte russa.

Fonte: Google imagens

Em sua obra Mario Livio volta a tratar do supracitado tema. Deus é Matemático? é um livro com 331 páginas abordando em nove capítulos (Um mistério; Mística: o numerologista e o filósofo; Mágicos: o mestre e o herege; Mágicos: o cético e o gigante; Estatísticos e probabilistas: a ciência da incerteza; Geômetras: o choque do futuro; Lógicos: pensando sobre raciocínio; Inexplicável efetividade?; Sobre a mente humana, matemática e universo.), prováveis pontos de conexão entre a Matemática e a Religião. A obra passeia sobre períodos e personagens da História da Matemática e nessa incursão aqui e acolá se detêm em cenários nos quais a pergunta que dá nome ao livro vem mais em evidência. O livro contém riquíssimas citações de matemáticos, físicos e lógicos, dentre outros. Ao final da leitura constatamos que o trabalho de Mario Livio vai além do binômio Matemática e Religião, propiciando ao leitor uma visão ao mesmo tempo ampla e profunda da matemática.

Como Spoiler os editores apresentam na contracapa o seguinte texto: "Como podemos explicar os incríveis poderes da matemática? Como o preço de opções na bolsa de valores e o movimento de pólen suspensos na água podem ser descritos pela mesma equação? E em um nível ainda mais fundamental: estamos apenas descobrindo a Matemática como astrônomos descobrem galáxias distantes e desconhecidas? Ou a matemática é uma invenção humana? Essas e outras questões são feitas por Mario Livio. Deus é matemático? revisa as ideias de grandes pensadores como Platão, Arquimedes, Galileu, Descartes, Russel e Godel e oferece uma visão inovadora de assuntos atuais que permeiam da cosmologia às ciências cognitivas, da Matemática à Religião".

Para se ter uma ideia da repercussão do livro, o New Scientist, uma revista com sede em Londres, que aborda diversos aspectos da ciência e tecnologia, publicou: "Teologistas tem Deus; filósofos, a existência; e cientistas a Matemática. Mario Livio analisa como essas três ideias podem estar relacionadas. Ele não dá respostas definitivas, mas se baseia em descobertas sobre a Matemática, a natureza e o desenho (se é que há algum) do cosmos. Ele também retoma um antigo debate sobre termos realmente descobertos, teoremas matemáticos que já existiam ou se simplesmente construímos um sistema lógico e coerente. A enriquecedora história de

Livio dá à discussão força e verve".

A revista inglesa The Economist considera a obra "Fascinante". Livio escreve de maneira apaixonada sobre o papel da simetria na vida humana e nas artes".

Pelo exposto, é um livro que pode contribuir para se ter uma visão sempre mais ampla em relação à matemática, propiciando ao leitor uma maior consciência acerca da importância e da beleza da matemática.

4. Quem pergunta, quer saber!

Revista do Professor de Matemática (RPM, no 38, p.56)

Severino Barros de Melo[3]

O início do ano é marcado por diversas promoções no comércio e nas atividades de prestação de serviços. Nessa ocasião surge para o público em geral, dúvidas acerca de problemas envolvendo porcentagem. Nesse contexto, parece interessante revisitar uma pergunta sobre o tema apresentada na Revista do Professor de Matemática (RPM, no 38,p.56). Eis a pergunta:

"Um leitor de Marília, SP, nos pede a solução do seguinte problema: Uma empresa vende habitualmente café em pacotes de 1 quilo. Numa tentativa de aumentar suas vendas, passa a comercializar o café em embalagens contendo 20% a mais de café, mantendo o mesmo preço dos pacotes de 1 quilo. Em que porcentagem foi reduzido o preço do quilo de café"?

RPM: Durante a promoção, $1,2$ quilo de café passou a custar p, sendo p o preço de 1 quilo anterior à promoção. Assim

$$\begin{array}{ccc} 1,2 & \underline{\hspace{3cm}} & p \\ 1 & \underline{\hspace{3cm}} & p_1 \end{array}$$

E, portanto, $p_1 = \frac{1}{1,2}p = 0,8333\ldots \cdot p$. Logo, o preço do quilo foi reduzido em $16,666\ldots\%$.

[3]Professor do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco

Considerações da Equipe de redação do Jornal Oxente:

A forma sumária da resolução apresentada pela RPM pede alguns esclarecimentos. O problema envolve duas grandezas diretamente proporcionais, portanto, na armação de regra de três estamos lidando com a chamada "regra de três simples e direta". Como se trata de um abatimento, o percentual de redução será encontrado, subtraindo $0,83333\ldots$ de 1 (equivalente a 100%), encontrando-se assim o percentual de redução do preço por quilo.

5. Eventos

- **II WMM - Workshop de Mulheres na Matemática**
  - Local: Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)
  - Data: 13 e 14 de abril
  - Mais informações: http://mat.ufcg.edu.br/wmm/
- **XV EPEM – Encontro Paulista de Educação Matemática**
  - Local: UNESP - Guaratinguetá - São Paulo
  - Data: 28 a 30 de abril
  - Mais informações: https://www.even3.com.br/xv-epem-encontro-paulista-de-educacao-matematica-294768/

6. Problemas

Convidamos o leitor a responder alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Enviem as soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, o envio do arquivo (.tex), no modelo disponível no site, deve ser realizado até **26/06/2023**.

Problema 1. (32ª OCM - Nível 1) Se vale a soma $32^3 + 32^3 + 32^3 + 32^3 = 32^x$. Qual o valor de x?

Problema 2 (8ª OBMEP - 1ª FASE)**.** Pedro vai participar de um programa de prêmios em que há uma urna contendo quatro bolas com valores diferentes e desconhecidos por ele, que serão sorteadas uma a uma até que ele decida ficar com uma delas. Ele observa o valor das duas primeiras bolas sorteadas e as descarta. Se o valor da terceira bola sorteada for maior que os das duas primeiras, ele ficará com ela e, caso contrário, ficará com a bola que restou. Qual é a probabilidade de Pedro ficar com a bola de maior valor?

a) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{5}{12}$

Problema 3. (OBRL - 2021 2ª Fase Nível Ômega) Nesse quadrado mágico multiplicativo, o produto dos números de cada linha e de cada coluna dá sempre o mesmo resultado, podendo haver números repetidos. Considere a distribuição iniciada na figura abaixo.

8	4	R
W	6	8
6	U	G

Se as regras descritas forem todas obedecidas, $R + W + U + G$ será igual a:

a) 19 c) 33 e) 29.

b) 27 d) 22

7. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n. 24, setembro de 2022**.

Problema 1. Uma determinada colônia de bactérias se prolifera de tal maneira que a superfície que ela ocupa em uma lâmina de microscópio dobra de tamanho a cada 10 min. Após exatamente duas horas de observação, toda a superfície desta lâmina está coberta pela colônia. O tempo necessário para que a colônia cobrisse $\frac{2}{5}$ da lâmina foi entre:

(a) 10 min e 15 min;

(b) 30 min e 1 h;

(c) 1h e 1h e 30 min;

(d) 1h e 40 min e 1h e 50 min;

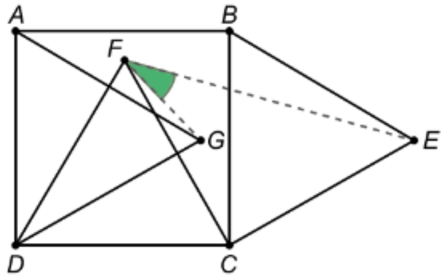
(e) 1h e 58min e 1h e 59 min.

Solução. Tendo em vista que a lâmina foi coberta pela colônia de bactérias em 2 horas e a superfície que ela ocupa dobra de tamanho a cada 10 min, passada 1h e 50 min de observação, metade da lâmina estava ocupada. Analogamente, concluímos que a colônia ocupava $\frac{1}{4}$ da lâmina depois de 1h e 40 min de observação. Como

$$\frac{1}{4} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2},$$

o tempo necessário para que a colônia cobrisse $\frac{2}{5}$ da lâmina foi entre 1h e 40 min e 1h e 50 min. $\square$

Problema 2 (17ª OBMEP - 1ª FASE- Nível 2)**.** Na figura, $ABCD$ é um quadrilátero e AGD, BEC e CDF são triângulos equiláteros. Quanto mede o ângulo GFE?



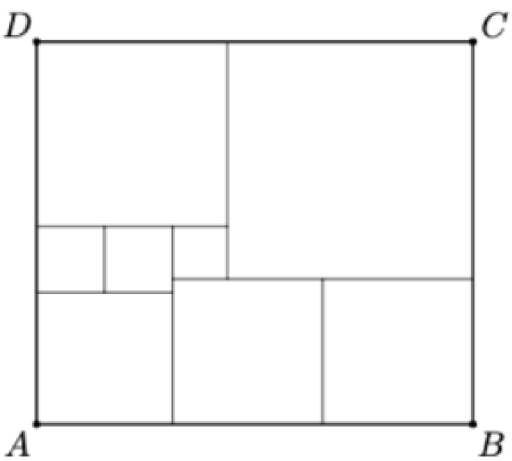
a) $15°$ c) $30°$ e) $45°$

b) $22,5°$ d) $36°$

Solução. Alternativa C

Observemos primeiro os ângulos com vértices D. Como o triângulo DFC é equilátero, temos CDF = 60º, e como CDA = 90º, segue que FDA = 30º. Analogamente, temos CDG = 30º e então GDF = 30º. Passemos ao triângulo GDF. Ele é isósceles, pois DG = DF, e segue que DFG = DGF = 75º. Logo, CFG = DFG - DFC = 75º - 60º = 15º. Agora, consideremos o triângulo CFE. Como acima, temos BDF = 30º e segue que ECF = 90º. Por outro lado, como CF = CE, esse triângulo também é isósceles, e temos então, CFE = 45º. Finalmente, temos GFE = CFE - CFG= 45º - 15º = 30º. □

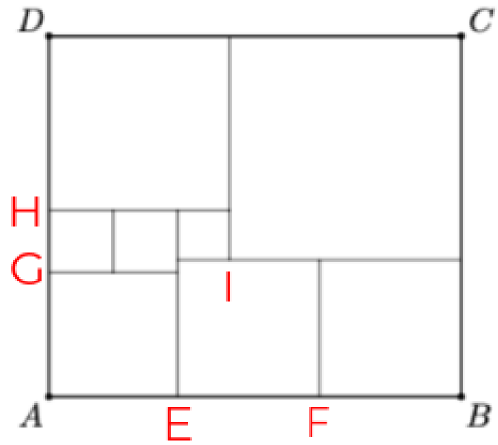
Problema 3. (OCM - 2021 Nível 3) O retângulo ABCD foi dividido em vários quadrados, como na figura. Sabe-se que o lado AB mede 16. Qual o comprimento do lado AD?



(a) $\frac{29}{2}$ (c) $\frac{105}{8}$ (e) $\frac{61}{4}$.

(b) 12 (d) 17

Solução. Suponha que $AB = 16$ e considere o retângulo conforme a imagem abaixo.



Observe que $AB = AE + EF + FB$, $EF = FB$, $AE = 2GH$ e $EF = 3GH - EI$. Assim, temos

$$16 = 2GH + 2(3GH - EI) \Leftrightarrow$$
$$EI = 4GH - 8. \tag{1}$$

Por outro lado, $AB = AE + EB$, $DH = 2GH + EI$ e $EB = DH + EI + EI = 2GH + 3EI$. Logo, utilizando a identidade (1), obtemos

$$16 = 2GH + 2GH + 12GH - 24 \Leftrightarrow$$
$$GH = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}. \tag{2}$$

Além disso, $AD = AG + GH + DH$ e $AG = 2GH$. Consequentemente, pelas identidades (1) e (2), notamos que

$$AD = 2GH + GH + 2GH + EI \Leftrightarrow$$
$$AD = 9GH - 8 = \frac{45}{2} - 8 = \frac{29}{2}.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (a). □