É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 25, volume 1, Dezembro de 2022
ISSN 2526-8651

Editorial

Caros Leitores,

Bem-vindos à edição de dezembro 2022 do jornal Oxente!

Chegamos ao final do ano com a sensação de termos dado o melhor de nós para que nosso projeto continuasse vivo, apesar dos ataques via corte de verbas, que a política governamental impôs às universidades brasileiras nos últimos anos. Nesse contexto, é sempre mais desafiador manter um projeto sem prazo para conclusão, como é o caso do nosso Jornal.

Nesta edição lhes oferecemos um painel onde cada parte do jornal ajuda a compor um quadro que ressalta a variedade e a beleza da matemática, sem perder de vista o objetivo principal; ou seja, servir de estímulo aos alunos que participam de olimpíadas.

A seção artigo traz um trabalho intitulado Equação de Pell e Frações Contínuas: Amigas inseparáveis, de autoria do professor Everton Henrique Cardoso de Lira. Trata-se de uma matemática superior numa abordagem que enriquece a matemática elementar.

A seção curiosidade gerou uma saudável discussão na comissão editorial, pelo fato do material disponibilizado superar o âmbito da curiosidade. Mesmo assim, ficou nessa seção. Trata-se de uma entrevista com a professora Maria Eulalia, cuja história se confunde em parte, com a história da Matemática em Pernambuco. Dentre as suas realizações, ela fez parte do grupo que iniciou o que hoje é o Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

A indicação de leitura apresenta ao nosso público o livro Na vida dez, na escola zero. Essa obra se insere na primeira fase das pesquisas em psicologia cognitiva, realizadas na Universidade Federal de Pernambuco e analisa, dentre outros aspectos, os motivos pelos quais muitas pessoas se dão bem ao lidar com a matemática fora do espaço escolar e apresentam um bloqueio com a matemática abordada na escola.

A seção Quem pergunta, quer saber, em sintonia com o período das provas do ENEM, traz uma questão onde se utiliza o MDC em uma situação prática.

Finalizamos a edição com as soluções dos problemas propostos na 23ª edição e informes sobre eventos.

Vale lembrar que no intervalo entre a edição anterior e a atual, tivemos no dia 10 de novembro, a live com o tema Vamos aprender a raciocionar?. Na ocasião a professora Isis Gabriella Quinteiro (UFAPE) aprofundou um artigo dela, publicado na 20ª edição do jornal Oxente. Esse material encontra-se no Youtube, no canal do Departamento de Matemática da UFRPE. Não podemos concluir o Editorial sem deixar nosso agradecimento a todos/as que nos ajudaram na elaboração dos conteúdos e na divulgação do nosso jornal durante o ano de 2022. Lembramos que temos um canal sempre aberto para a comunicação e contribuição dos nossos leitores. Aproveitamos a ocasião para desejar a cada um e cada uma um 2023 de êxito em todos os campos, com mais tolerância, paz e mãos dadas. Como diz a música do Beto Guedes, refletindo o paradoxo matemático nas relações humanas, “um mais um é sempre mais que dois.”

Boa leitura!

Sumário

1. Artigo

Equação de Pell e Frações Contínuas: Amigas inseparáveis

Everton Henrique Cardoso de Lira

Senac Pernambuco - everton.ufpe2@gmail.com

Caruaru - Pernambuco - Brasil

Considerações Iniciais

Equações são criaturas curiosas. Às vezes são dóceis e amigáveis como, por exemplo, as equações de segundo grau, as quais, são facilmente classificadas e resolvidas sem muito trabalho. Contudo, em outros momentos, e estes parecem ser em quantidade maior do que a que gostaríamos, as equações são ariscas e difíceis de domar, levando os matemáticos a “quebrarem a cabeça” na busca do seu entendimento e da sua resolução. Neste artigo iremos tratar de um tipo de equação, que podemos dizer, já foi “domesticada” pelos matemáticos, os quais, além de resolvê-la, foram capazes de encontrar, dentre outras coisas, uma bela relação entre as soluções desta equação com um interessante tópico da Teoria dos Números, conhecido como *frações contínuas.*

A equação que vamos considerar neste texto é a bela e curiosa *Equação de Pell*[1], a qual, é dada pela expressão $x^2 - dy^2 = 1$. O leitor com conhecimentos básicos de Geometria Analítica, a esta hora já percebeu, que esta equação tem a mesma expressão que a cônica conhecida como *Hipérbole*, porém, como diz o velho ditado “O diabo está nos detalhes!” e os detalhes aqui estão nos tipos de números que permitimos que x, y e d sejam.

Por exemplo, quando consideramos x e y números reais e d um número real positivo e diferente de zero, temos que $x^2 - dy^2 = 1$, representa uma relação entre pontos (x, y) do plano euclidiano, gerando a hipérbole, como mencionado anteriormente. Porém, vamos realizar duas leves modificações em x, y e d, as quais, farão toda a diferença na forma como lidamos com a expressão $x^2 - dy^2 = 1$.

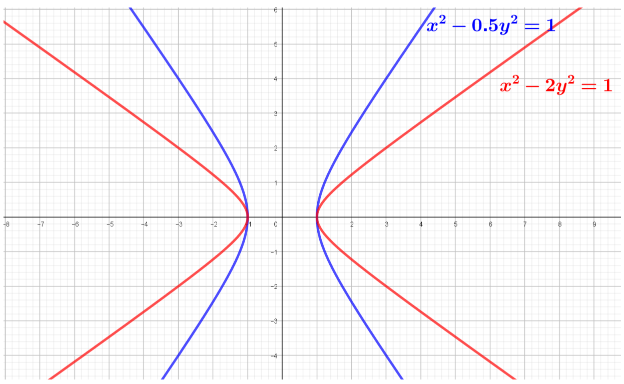


Figura 1.1: Hipérboles para $d = 0,5$ e $d = 2$.

Primeiramente, vamos exigir que x, y e d só possam assumir valores inteiros, além disso, imporemos também a condição de que d não seja um qua-

[1]Em homenagem ao matemático e linguista inglês John Pell (1611 - 1685). Para mais informações sobre sua vida e obra, ver: https://en.wikipedia.org/wiki/John_Pell_(mathematician).

drado perfeito. Sendo assim, nosso objetivo aqui se resume a obter as soluções inteiras da equação $x^2 - dy^2 = 1$.

Encontrando Soluções

Encontrar soluções para a equação $x^2 - dy^2 = 1$ consiste em encontrar pares $(x_i, y_i), i = 0, 1, \ldots, n$ de inteiros que satisfaçam $x_i^2 - dy_i^2 = 1$. Porém, se você atentar para o gráfico da hipérbole na Figura 1, você constatará que este é simétrico em relação aos eixos coordenados, o que será útil para facilitar a nossa vida, basta para isso buscarmos soluções apenas nos números inteiros positivos, sendo outras soluções obtidas destas por simetria. Outra coisa que você também já deve ter percebido, é que o par $(1, 0)$ sempre é solução da equação $x^2 - dy^2 = 1$, logo, descartaremos esta solução da nossa busca, por sua obviedade, assim a chamaremos de *solução trivial*.

Vamos deixar outra coisa clara já no início da nossa conversa: d não pode ser igual a 1! Pense um pouco sobre isso. E já que estamos falando do d, aí vai o motivo do porque dele não poder ser um quadrado perfeito. De fato, caso d fosse um quadrado perfeito, existiria um número inteiro c, tal que $d = c^2$, assim, nossa equação ficaria $x^2 - c^2y^2 = 1 \Rightarrow x^2 - (cy)^2 = 1$. Fazendo $x = X$ e $cy = Y$, obtemos $X^2 - Y^2 = 1$, e isso não pode acontecer, porque neste caso, teríamos $d = 1$. Na seção dos exercícios o leitor será convidado a provar porque o d não pode ser igual a 1.

Feitas estas observações, a pergunta que se coloca diante de nós agora é: "como procedemos para encontrar as soluções desta equação?" A primeira e mais decepcionante resposta é: através do "inovador" método da tentativa e erro! A parte boa deste método, é que não temos que pensar muito para aplicá-lo, basta escolher dois valores, um para x e um para y, e verificar se eles satisfazem a equação $x^2 - dy^2 = 1$. A parte ruim, é que para encontrar soluções desta forma, precisamos de muito tempo livre e paciência para ficarmos registrando todas as tentativas que deram errado até encontrarmos uma resposta correta. Dado este incoveniente, é certo que não vamos focar nesse método de encontrar soluções para a nossa equação.

Uma outra abordagem, um pouco mais preguiçosa, diga-se de passagem, é recorrer a algum recurso computacional para fazer o trabalho "sujo" para nós. Podemos utilizar, digamos, o site WolframAlpha[2], colocar uma dada equação lá e esperar pelo resultado. Por exemplo, se digitarmos na barra de entrada da tela inicial do site, "solve $x^2 - 2y^2 = 1$ over integers", em poucos segundos teremos como resultado um grande número de soluções, as quais, seguem das mais simples e fáceis de se obter como $(3, 2)$, até as mais complexas e quase impossíveis de serem calculadas manualmente, como é o caso de $(1180872205318713601, 835002744095575440)$, cuja até a simples verificação de que é uma solução é complicada de ser feita sem uma calculadora científica ou um computador. O problema óbvio com esta abordagem, é que embora obtenhamos várias soluções, nós aprendemos pouco sobre a natureza da equação geral $x^2 - dy^2 = 1$ e de suas soluções, e questões interessantes como, por exemplo: "As soluções são infinitas?", "Toda equação possui solução?" e "Existe algum método que nos permita obter uma solução sempre que ela existir?", não são devidamente respondidas.

Tendo em vista que as duas abordagens anteriores não são tão satisfatórias como desejaríamos que fossem, passaremos de agora em diante a pensar em uma forma inteligente e satisfatória de encontrar as soluções da equação $x^2 - 2y^2 = 1$ e a partir daí, avançarmos para a solução da equação geral $x^2 - dy^2 = 1$. Pois bem, como visto anteriormente, o par $(3, 2)$ é uma solução de $x^2 - 2y^2 = 1$, na verdade, é fácil ver que a mesma é a menor solução não trivial desta equação, por este motivo, a chamaremos de *solução minimal*.

Dito isto, note que podemos reescrever a equação $x^2 - 2y^2 = 1$ como $(x - y\sqrt{2})(x + y\sqrt{2}) = 1$,

[2]Se você ainda não conhece este site, incentivamos fortemente que você dê uma "olhada" no mesmo: https://www.wolframalpha.com

substituindo a solução $(3,2)$ nesta expressão, obtemos $(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})=1$. Agora vamos elevar esta expressão ao quadrado, obtendo $(3-2\sqrt{2})^2(3+2\sqrt{2})^2=1 \Rightarrow (17-12\sqrt{2})(17+12\sqrt{2})=1$, ou seja $(17,12)$ também é uma solução de $x^2-2y^2=1$. De forma análoga, percebe-se que $(3-2\sqrt{2})^3(3+2\sqrt{2})^3=1 \Rightarrow (99-70\sqrt{2})(99+70\sqrt{2})=1$, logo $(99,70)$ é outra solução, e isso está de acordo com as soluções que o WolframAlpha apresenta. Segue daí que, ao darmos um passo além e elevarmos a expressão $(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})=1$ a n-ésima potência, com $n \geq 1$, inteiro, é de se esperar que $(3-2\sqrt{2})^n(3+2\sqrt{2})^n=1$ também nos fornecerá um par de soluções (x_n,y_n). Ou seja, o que intuímos aqui é que se conhecermos a equação minimal da equação $x^2-2y^2=1$, então seremos capazes de obter todas as outras soluções e, além disso, estas são infinitas, pois, n pode assumir infinitos valores.

Entretanto, neste ponto duas perguntas surgem imediatamente: 1) "esse procedimento é possível de ser realizado com a equação geral $x^2-dy^2=1$?" e 2) "existe uma forma de obtermos a solução minimal para a equação $x^2-dy^2=1$, para qualquer d dado?" Só de acompanhar nosso raciocínio até aqui, fica claro que a resposta para a primeira pergunta é um sonoro sim! Ou seja, sempre que conhecermos a solução minimal é possível obter todas as outras soluções a partir dela. No que diz respeito à segunda pergunta, nós também temos uma resposta afirmativa, a qual justificará o título deste artigo, ou seja, é possível obter a solução minimal e para isso recorreremos às frações contínuas.

Uma discussão mais aprofundada sobre a resposta para a pergunta 1) está além dos objetivos que temos com este artigo, porém, estaremos satisfeitos com o que o seguinte teorema nos oferece.

Teorema 1.1. *Todas as soluções da equação de Pell $x^2-dy^2=1$ são da forma $x_n+y_n\sqrt{d}=(x_0+y_0\sqrt{d})^n$, sendo $x_0+y_0\sqrt{d}$ a solução minimal.*

A demonstração deste teorema, juntamente com considerações mais aprofundadas sobre as soluções da Equação de Pell, podem ser obtidas em [1], contudo, para nós será suficiente entendermos o teorema e utilizá-lo quando necessário.

Considerando o teorema anterior e os cálculos que realizamos com a equação $x^2-2y^2=1$, podemos concluir que as soluções da mesma são dadas por $(x_n+y_n\sqrt{2})=(3+2\sqrt{2})^n$. Note ainda que as expressões da forma $(x_n-y_n\sqrt{2})=(3-2\sqrt{2})^n$ também geram soluções da equação $x^2-2y^2=1$, na verdade, se considerarmos a equação $x^2-dy^2=1$, é possível verificar que $x_n-y_n\sqrt{d}=(x_0-y_0\sqrt{d})^n$ também é solução. Verifique isso! Assim sendo, podemos somar as expressões $x_n+y_n\sqrt{d}=(x_0+y_0\sqrt{d})^n$ e $x_n-y_n\sqrt{d}=(x_0-y_0\sqrt{d})^n$, obtendo uma expressão que fornece os valores de x em função da solução minimal: $x_n=\frac{(x_0+y_0\sqrt{d})^n+(x_0-y_0\sqrt{d})^n}{2}$. Partindo desta expressão para x_n, se obtém facilmente uma expressão que fornece os valores de y, a partir da solução minimal, a saber: $y_n=\frac{(x_0+y_0\sqrt{d})^n-(x_0-y_0\sqrt{d})^n}{2\sqrt{d}}$. Este resultado, embora simples, pode ser bastante útil na resolução de problemas.

Frações Contínuas e a Solução Minimal

Após o que vimos na seção anterior, podemos dizer que a pergunta 1) está totalmente respondida, ou seja, se conhecermos a solução minimal (x_0,y_0) é possível obtermos todas as soluções da equação $x^2-dy^2=1$, as quais, além disso, são infinitas. A pergunta que fica agora é a 2), ou seja, "como encontrar a solução minimal?" Para isso, recorreremos às já mencionadas, frações contínuas.

Para entendermos melhor estes belos objetos matemáticos começaremos com uma definição.

Definição 1.1. Uma expressão da forma

$$a_0+\frac{b_0}{a_1+\frac{b_1}{a_2+\frac{b_2}{a_3+\cdots}}}$$

é chamada de fração contínua. Em geral, os números $a_0,a_1,\cdots,b_0,b_1,\cdots$ podem ser complexos ou reais e o número de termos na expressão acima pode ser finito ou infinito.

Por simplicidade e tendo em vista nosso objetivo neste texto, podemos considerar que os números $a_0,a_1,\cdots,\ b_0,b_1,\cdots$ serão sempre reais, e com excessão de a_0, que pode ser negativo ou zero, todos os números $a_1, \cdots,\ b_0, b_1, \cdots$ serão positivos. Mais ainda, vamos considerar frações contínuas em que os números $b_i, i = 0, 1, 2, \ldots$, são todos iguais a 1, dessa forma, trabalharemos apenas com as chamadas *frações contínuas simples*, as quais, têm a seguinte forma

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ldots}}}.$$

Assim, sempre que falarmos em frações contínuas daqui em diante estaremos nos referindo às frações contínuas simples, sejam elas finitas ou infinitas.

Nos exemplos a seguir mostraremos que números racionais podem ser representados através de frações contínuas finitas, enquanto que números irracionais por meio de frações contínuas infinitas. Para um maior aprofundamento sobre estes fatos recomendamos ao leitor a consulta de [2], no qual tais fatos são exemplificados de forma intuitiva e elementar ou [3] e [4], para uma segunda e mais aprofundada leitura sobre o tema.

Exemplo 1.1. Escreva o número $\frac{89}{12}$ como uma fração contínua.

Solução: Note que na divisão de 89 por 12, nós obtemos quociente 7 e resto 5, logo, podemos escrever $\frac{89}{12} = 7 + \frac{5}{12} = 7 + \frac{1}{\frac{12}{5}}$. Procedendo de forma análoga para a divisão de 12 por 5, nós obtemos $\frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5}$, assim, segue que $\frac{89}{12} = 7 + \frac{1}{2+\frac{2}{5}} = 7 + \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{5}{2}}}$. Fazendo a divisão de 5 por 2, obtemos quociente 2 e resto 1, assim, escrevemos $\frac{89}{12} = 7 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$, note que deste ponto em diante não é mais possível realizar divisões como anteriormente, pois o denominador da última fração é maior que o seu numerador, assim, encerramos o processo aqui, o que resolve a questão.

O leitor mais atento, neste momento já deve ter percebido que para obter as sucessivas parcelas da fração contínua acima, nós repetidamente utilizamos o algoritmo euclidiano da divisão de dois inteiros. Isso não foi uma mera coincidência, na verdade, o processo de escrita de uma fração contínua está intimamente relacionado com o algoritmo da divisão euclidiana. Para o leitor interessado em uma demonstração desta relação, recomendamos as leituras de [2] ou [5].

Exemplo 1.2. (OBMEP-2018) Na igualdade abaixo, a, b e c são números inteiros positivos. Qual é o valor de c?

$$\frac{10}{7} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}$$

Solução: Esta questão se resolve de forma muito rápida quando temos o conhecimento das frações contínuas, tendo em vista que em vez de tentar manipular o lado direito da igualdade, vamos reescrever a fração $\frac{10}{7}$ por meio de uma fração contínua. De fato, $\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{3}}$. Segue daí que o valor de c é igual a 3.

Exemplo 1.3. Calcule $\sqrt{2}$ como uma fração contínua.

Solução: Existem duas formas distintas de fazer o que se pede, uma apresentada em [1] e a outra em [2], vamos utilizar o procedimento apresentado em [1] e recomendamos ao leitor tentar o procedimento apresentado em [2]. Pois bem, note que $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, utilizando mais uma vez o fato de que $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$, nós obtemos $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}$, procedendo dessa forma sucessivamente, é fácil concluir que $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}}}$.

Trabalhar com frações contínuas infinitas pode ser uma tarefa um tanto quanto complicada, por este motivo, é comum lidarmos com esta dificuldade de duas formas. A primeira é por meio da adoção de uma notação mais simples, dessa forma, a fração contínua

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ldots}}}.$$

vai ser representada como $[a_0; a_1, a_2, \cdots]$, assim, temos no Exemplo 1, $\frac{89}{12} = [7; 2, 2, 2]$ e no Exemplo 2, $\sqrt{2} = [1; 2, 2, \cdots] = [1; \overline{2}]$. Já a segunda forma, geralmente utilizada para as frações contínuas infinitas, é através da utilização das *convergentes* de uma fração contínua, as quais são definidas como segue.

Definição 1.2. Dada a fração contínua infinita

$$[a_0; a_1, a_2, \cdots],$$

aos números $c_i, i = 0, 1, \cdots,$ tais que $c_0 = [a_0] = a_0, c_1 = [a_0; a_1], c_2 = [a_0; a_1, a_2], \cdots, c_n = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$, damos o nome de convergentes da fração contínua.

Agora, vamos calcular algumas das convergentes da fração contínua para $\sqrt{2}$ e observar um fato interessante. Pois bem, temos que

- $c_0 = a_0 = 1$
- $c_1 = [a_0; a_1] = [1; 2] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
- $c_2 = [a_0; a_1, a_2] = [1; 2, 2] = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = \frac{7}{5}$
- $c_3 = [a_0; a_1, a_2, a_3] = [1; 2, 2, 2] = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}} = \frac{17}{12}$,

continuando este processo, é fácil ver que

- $c_4 = \frac{41}{29}$
- $c_5 = \frac{99}{70}$
- $c_6 = \frac{239}{169}$
- $c_7 = \frac{577}{408}$
- $c_8 = \frac{1393}{985}$
- $c_9 = \frac{3363}{2378}$
- $c_{10} = \frac{8119}{5741}$

e assim por diante[3].

Voltando às soluções da equação $x^2 - 2y^2 = 1$ obtidas pelo WolframAlpha, notamos que as cinco primeiras soluções positivas são $(3, 2), (17, 12), (99, 70), (577, 408)$ e $(3363, 2378)$, as quais estão relacionadas com as convergentes de índice ímpar c_1, c_3, c_5, c_7 e c_9, de sorte que a solução (x_n, y_n) está associada com a fração $\frac{x_n}{y_n}$, para n ímpar. Mais ainda, note que calculando a razão $\frac{x_n}{y_n}$ em cada um destes pares ordenados nós obtemos: $1,5; 1,4166666; 1,4142857; 1,4142156;$ e $1,4142136$, as quais são sucessivas aproximações para $\sqrt{2}$, o que nos leva a concluir que conforme os valores (x_n, y_n), soluções da equação $x^2 - 2y^2 = 1$, se tornam maiores, mais próxima a razão $\frac{x_n}{y_n}$ fica de $\sqrt{2}$.

O que acabamos de verificar para $\sqrt{2}$ e a equação $x^2 - 2y^2 = 1$ não é uma feliz coincidência. Na verdade este resultado é um caso particular do teorema[4] a seguir.

Teorema 1.2. *Seja d um inteiro positivo não quadrado perfeito. Então a fração contínua de $\sqrt{d}$ é da forma $[a_0; \overline{a_1, a_2, \cdots, a_r, 2a_0}]$. Além disso, a solução minimal (x_0, y_0) da equação de Pell $x^2 - dy^2 = 1$ é obtida a partir de*

$$\frac{x_0}{y_0} = \begin{cases} [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_r] & \text{se } r \text{ é ímpar} \\ [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{2r+1}] & \text{se } r \text{ é par} \end{cases}$$

em que $a_{r+1}, \cdots, a_{2r+1}$ é parte do próximo período.

Para encerrar esta seção consideremos alguns exemplos interessantes, sendo o primeiro deles uma aplicação direta do Teorema anterior.

Exemplo 1.4. Encontre todas as soluções positivas da equação $x^2 - 7y^2 = 1$.

Solução: Para utilizar o teorema anterior, primeiramente devemos determinar a fração contínua para $\sqrt{7}$, para poupar o leitor de cálculos tediosos, podemos partir do fato de que $\sqrt{7} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]$. Pela notação do teorema anterior, temos $a_0 = 2, a_1 = a_2 = a_3 = 1$ e $a_4 = 2a_0 = 4$, note também que aqui temos $r = 3$ ímpar, logo, $\frac{x_0}{y_0}$ será obtido pela fração contínua $[a_0; a_1, a_2, a_3]$, logo, $\frac{x_0}{y_0} = [2; 1, 1, 1] = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$. Assim, a solução minimal da equação é dada por $x_0 = 8$ e $y_0 = 3$, logo, todas as outras soluções são dadas por $x_n + y_n\sqrt{7} = (8 + 3\sqrt{7})^n$.

Exemplo 1.5. (USAMO, 1996) Qual é o menor inteiro n, maior do que 1, para o qual a média quadrática dos n primeiros inteiros positivos é um inteiro?

Solução: Notando que a média quadrática dos inteiros positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ é dada por $\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$, segue que o que estamos buscando é

[3]Para facilitar nossa vida, estes cálculos foram realizados utilizando o site: https://pt.planetcalc.com/8456/, o qual converte frações normais em frações contínuas e vice versa.

[4]Uma demonstração deste teorema (embora apresentado de forma diferente) pode ser encontrada no capítulo 3 de [7].

o valor de n para o qual exista um inteiro m, tal que $\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n} = m^2$ o que implica em $\frac{(n+1)(2n+1)}{6} = m^2$.

Desenvolvendo o produto do lado esquerdo da igualdade e multiplicando toda a equação por 48, nós obtemos: $8(2n^2 + 3n + 1) = 48m^2 \Rightarrow (4n + 3)^2 - 1 = 3(4m)^2 \Rightarrow (4n+3)^2 - 3(4m)^2 = 1$. Fazendo $4n+3 = x$ e $4m = y$, nós obtemos a equação de Pell $x^2 - 3y^2 = 1$, a qual possui solução minimal $(2, 1)$ e cuja solução geral é dada por $x_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2}$ e $y_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$, as quais nos permitem obter as soluções $(7, 4), (26, 15), (97, 56), \cdots$. Note porém, que por $x = 4n + 3$ e $y = 4m$, nós precisamos de uma solução em que x deixa resto 3 na divisão por 4 e que y seja múltiplo de 4, o que não é o caso de nenhuma das soluções anteriores. Contudo, um pouco mais de paciência nos leva à solução $(1351, 780)$ que satisfaz as condições impostas sobre x e y, de sorte que o menor valor de n procurado é $n = 337$.

Observação 1.1. As fórmulas para x_n e y_n utilizadas na resolução acima, não são práticas quando lidamos com valores altos para n. O leitor que procurou as soluções por si só deve ter notado isso! Uma solução para esse contratempo está no fato de que as soluções x_n e y_n podem ser obtidas por meio de recorrências lineares, porém este é um tópico que está além do nossos objetivos neste texto. Para o leitor interessado recomendamos a consulta de [3] nas referências.

Exemplo 1.6. Mostre que existem infinitos números que são simultaneamente quadrangulares e triangulares.

Solução: Para resolver esta questão, nós devemos mostrar que existem infinitos números da forma $\frac{n(n+1)}{2}$ que também são da forma m^2, para m, n inteiros positivos. Pois bem, dito isto, consideremos a igualdade $\frac{n(n+1)}{2} = m^2$, a qual, é equivalente a $(2n + 1)^2 - 2(2m)^2 = 1$. Fazendo $2n + 1 = x$ e $2m = y$, obtemos a equação de Pell $x^2 - 2y^2 = 1$, cujas soluções conhecemos bem e sabemos que são infinitas. Sendo assim, podemos concluir que existem infinitos números que são ao mesmo tempo triangulares e quadrados.

Considerações Finais

Caro leitor, o assunto relativo à equação de Pell e às frações contínuas é muito mais amplo do que podemos abordar aqui neste breve artigo. Contudo, entendemos que nossa proposta é de apenas escavar a superfície desta incrível mina de infindáveis prazeres e belezas matemáticas. Para o leitor interessado em se aprofundar no estudo deste belo tópico, recomendamos a leitura das referências apresentadas ao final do artigo e a discussão sobre os tópicos lá abordados com os seus colegas e professores.

Exercícios

Exercício 1.1. (CMRJ - 2008 - Adaptada) Determine x, y e z de forma que a fração $\frac{37}{13}$ seja escrita como $2 + \frac{1}{x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}}$.

Exercício 1.2. Encontre a fração contínua para o número $\sqrt{5}$.

Exercício 1.3. Encontre a fração contínua para o número Φ.

Exercício 1.4. (Olímpiada Paulista de Matemácia - 2013 - Adaptada)

a) Escreva a representação de $\frac{2017}{41}$ como fração contínua.

b) Escreva a representação de $\sqrt{11}$ como fração contínua e conclua que $\sqrt{11} \approx \frac{199}{60}$.

Exercício 1.5. (Putnam - 1995) Calcule $\sqrt[8]{2207 - \frac{1}{2207-\frac{1}{2207-\ldots}}}$. Escreva sua resposta na forma $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$, em que a, b, c e d são inteiros.

Exercício 1.6. Mostre que além de 0 e 1 não existem dois inteiros não negativos cuja diferença dos quadrados seja igual a 1.

Exercício 1.7. Encontre todas as soluções positivas da equação $x^2 - 12y^2 = 1$.

Exercício 1.8. Encontre todas as soluções positivas da equação $x^2 - 19y^2 = 1$.

Exercício 1.9. (Olímpiada Matemática da Bulgaria - 1999) Mostre que a equação $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 1999$ possui infinitas soluções inteiras. (Dica: Note que se $(10, 10, -1, 0)$ é uma solução, então $(10+u, 10-u, v-\frac{1}{2}, -v-\frac{1}{2})$ com u, v inteiros também é uma solução.)

Exercício 1.10. Determine todos os triângulos cujos lados são inteiros consecutivos e cuja área é inteira. (Dica: fórmula de Herão.)

Exercício 1.11. Prove que existem infinitos inteiros positivos n tais que $\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n}$ é um quadrado perfeito.

Referências

[1] Shine, Carlos Yuzo. 21 Aulas de Matemática Olímpica. - Rio de Janeiro: SBM, 2009.

[2] Carneiro, João Paulo Q. Um Processo Finito para Raiz Quadrada. *Revista do Professor de Matemática - RPM*, n° 34. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/34/7.htm, acessado em 12/11/2021.

[3] Moreira, Carlos Gustavo T. de A. Frações Contínuas, Representações de Números e Aproximações Diofantinas. In: 1º Colóquio da Região Sudeste, Abril, 2011.

[4] Andrade, Eliane Xavier Linhares de; Bracciali, Cleonice Fátima. Frações Contínuas: algumas propriedades e aplicações. - In: II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática: Salvador, 2004.

[5] Olds, Carl Douglas. Continued Fractions. - New York: Random House, 1963.

[6] Andreescu, Titu; Gelca, Razvan. Mathematical Olympiad Challenges. - New York: Birkhäuser Boston, 2009.

[7] Andreescu, Titu; Andrica, Dorin. Quadratic Diophantine Equations. - New York: Springer, 2015.

2. Curiosidades

Entrevista com a professora Maria Eulalia de Moraes Melo

Lorena Brizza Soares Freitas
Maité Kulesza
Michele Novais [5]

Trazemos nessa seção uma conversa entre a professora Maria Eulalia de Moraes Melo e a professora Maité Kulesza ocorrida em 2019, logo após a indicação da primeira para representar a UFRPE e a UFPE na exposição “Um olhar singular: contribuições de mulheres à matemática brasileira”[6]. Essa conversa foi organizada em conjunto pelas professoras Lorena Brizza Soares Freitas, Maité Kulesza e Michele Mendes Novais do Departamento de Matemática da UFRPE, com a ajuda da professora Maria Eulalia a quem agradecemos a disponibilidade.

Maité - [Professora] Maria Eulalia, vamos fazer uma retrospectiva da sua vida. Eu não sei se você quer começar falando um pouco de como você se interessou por matemática ou se você gostaria de começar a falar da sua infância mesmo. Fique à vontade.

Maria Eulalia - Vou começar falando sobre como foi que eu me dirigi para a matemática. Na verdade,

[5] Professoras do Departamento de Matemática da UFRPE
[6] https://smoraes2000.wixsite.com/simonemoraes/umolharsingular
[7] Atualmente, equivale ao 8º ano do Ensino Fundamental.

eu era aluna do 3º ano do Ginásio[7], quando comecei a tirar notas péssimas em matemática. [risos] Meu pai me botou para estudar no Curso Araújo, do professor Valdeci Araújo. Ele tinha um cursinho particular de matemática na Avenida Conde da Boa Vista. Quando terminei o 4º ano, fui fazer o Científico[8], no Rio. [...] Minha família me matriculou no Colégio Santa Úrsula que estava começando um curso muito moderno, com uma pedagogia diferente, com objetivos diferentes. Era um curso experimental. E esse curso no qual ingressei, não tinha matemática. Aí, eu botei para chorar e minha mãe me transferiu às pressas para outro colégio lá no Rio mesmo. O Bennett. Lá fiz o 1º e o 2º anos do Colegial[9]. [...] Voltei ao Recife para fazer o 3º ano aqui. No 3º ano, eu estava no Vera Cruz, já no Científico, era bem fraquinho naquela época, e não só em matemática, mas nas outras disciplinas também. A SUDENE[10], então, abriu um curso pré-vestibular para futuros estudantes de Engenharia, porque não havia engenheiros suficientes para o mercado. Eu me candidatei, fui aprovada na seleção e comecei a cursar como se fosse fazer Engenharia, mas eu queria fazer Matemática. Fiz vestibular. Passei na Licenciatura em Matemática da Federal [UFPE] que funcionava naquela época no Departamento de Filosofia.

M. - Lá no CFCH, não é?

M. E. - Não. Nessa época, ainda era na Nunes Machado. Lá foi que eu me encantei de vez mesmo porque fui aluna de José Morgado e Ruy Luís Gomes, os fundadores do nosso Instituto de Matemática e Física da Federal.

M. - Agora, quando você passou no vestibular, esse curso já era de Licenciatura e depois tinha o Bacharelado?

M. E. - Quando ingressei não tinha Bacharelado. Só Licenciatura. [...] O Bacharelado em Matemática começou a existir justamente por conta da minha turma. O professor Ruy Luís Gomes entrou na antiga Congregação, com o pedido de abertura do curso. Então, deixamos a Licenciatura e ingressamos no Bacharelado. Foi uma maravilha. Quando terminei o Bacharelado, a Congregação da Faculdade de Filosofia me contratou como professora auxiliar de ensino.

M. - Lembra o ano disso?

M. E. - Foi no ano de 1967. Em 1969 terminei o Mestrado que eu tinha já começado ainda quando estudante do Bacharelado.

M. - Quem foi seu orientador?

M. E. - Ruy Luís Gomes. Na verdade, naquela época, o Mestrado era um pouco diferente. O IMPA, que orientava tudo naquela época, exigiu um exame final de qualificação, com uma banca composta por doutores em Matemática. Lembro que o Manfredo [do Carmo] fez parte dessa banca, lembro das provas. Concluímos o mestrado, Antônio Mário Sette e eu [se bem me lembro, havia outros alunos]. Fomos contratados como professores assistentes. Quer dizer: passamos de auxiliares de ensino, para professores assistentes, havia essa regra. Hoje em dia existe ainda, penso, promoção por titulação. Em 1971, abriram concurso para adjunto e eu fiz.

[...]

M. - E como era a sua rotina? Como professora. Primeiro, auxiliar...

M. E. - No começo, no comecinho mesmo, eu primeiro fazia as aulas para Morgado e Ruy Gomes verem, depois eu fazia aula para os alunos.

M. - Você preparava, apresentava para eles e depois que apresentava para os alunos? E como era? Eles assistiam?

M. E. - Assistiam, comentavam, acrescentavam coisas. Depois eu fui ganhando independência. Quando aconteceu em 1974 a Revolução dos Cravos em Portugal, eles voltaram para o Porto e eu substituí Ruy Gomes no curso de matemática. Foi então, que fui professora de Francisco Brito, de Fre-

[8]Equivalente ao Ensino Médio.

[9]Corresponde atualmente aos 1º e 2º do Ensino Médio.

[10]Superintendência do Desenvolvimento do Nordeste. Autarquia criada em 1959 com a missão de "promover o desenvolvimento includente e sustentável de sua área de atuação e a integração competitiva da base produtiva regional na economia nacional e internacional". Foi extinta em 2001.

derico Xavier, de Paulo Santiago, de Joaquim Tavares... Marcos Vinícius também foi meu aluno, várias outras pessoas também, Lícia Souza Leão Maia, que foi pró-reitora na UFPE. Hebe Cavalcanti, Márcia Pragana, Socorro Brasileiro, Ângela Didier... Muita gente boa. Houve uma época em que a SUDENE concedia bolsas para alunos de matemática. O curso de matemática chegou a ter 70 alunos, mas depois a SUDENE também foi derrubada.

M. - Era muito bom, então. Houve um incentivo muito grande.

M. E. - Houve. Eu mesma, no 2º ano do curso de matemática, já tive uma bolsa de iniciação científica do CNPq. Também fiz o mestrado com bolsa de mestrado do CNPq.

M. - E a sua dissertação de mestrado foi em que tema?

M. E. - A minha dissertação de mestrado foi sobre funções de variação total limitada. Foi publicada, mas não foi apresentada a uma banca julgadora. Houve o tal exame final de qualificação. [...]

M. - Você lembra o nome da revista?

M. E. - Gazeta de Matemática.

[...]

M. E. - E junto comigo quem também fez publicações nesta revista foi Aron Simis. Aron era mais adiantado do que eu, dois anos ou três.

[...]

M. - E aí você entrou no curso, e depois ficou no lugar de Ruy Gomes, né?

M. E. - Sim. Em Variável Complexa. Diz Brito que sofreu horrores com meu curso. [risos] Muitos exercícios pesados. Mas é a vida, não?

M. - Mas aí, naquele tempo, tinha uma grade de disciplinas?

M. E. - Tinha sim. E por sinal, digamos assim, tinha poucas disciplinas e muitas aulas em cada disciplina. O cálculo, os quatro cálculos, cada um deles tinha oito horas de aula por semana. E depois a Análise, a Álgebra também. Poucas disciplinas, basicamente Álgebra, Análise e Geometria.

[...]

M. - E você teve alguma dificuldade nesse primeiro momento, por ser mulher?

M. E. - Nunca tive. Nunca senti. Quero dizer, as dificuldades que eu tive, são dificuldades da vida de qualquer mulher, não foram dificuldades específicas por querer matemática, por querer fazer ciência. Eu tinha dificuldade porque eu tive que cuidar de crianças, dar conta da casa, do marido, da família, como todas nós, não é? Não era porque eu queria fazer matemática, não.

M. - Não era assim uma carreira... Vamos dizer que socialmente achassem, por exemplo, pouco conveniente para uma mulher na época? As pessoas não comentavam isso em seu entorno?

M. E. - No meu entorno, não. Minha família era muito ligada à universidade. Meu pai era professor universitário, meu irmão mais velho também era. Meu irmão mais velho foi fazer doutorado no exterior, na Inglaterra. Quer dizer, ninguém achava ruim, não.

M. - Seu pai era professor?

M. E. - Sim. Da Faculdade de Medicina.

[...]

M. - E eram quantos irmãos?

M. E. - Nós somos quatro. [...] Sou a segunda. [...] Francisco Antônio, Maria Eulália, Antônio Henrique e Silvia. [...] Henrique é proprietário, junto com a esposa, de uma firma de viagens. E Silvia, que é arquiteta, é casada com Frederico Katz, irmão de Getúlio Katz. Havia muita gente que frequentava nossa casa. Airton Costa Carvalho, Pelópidas Silveira, Newton Sucupira, Maria do Carmo Miranda, meu tio Evaldo, que é fantástico. Evaldo Coutinho, filósofo de peso. E inclusive, uma coisa curiosa é que eu, os filhos de Dr. Airton, e os de Dr. Hélio Mendonça, fomos fazer um curso de português, perto do vestibular, com Paulo Freire. Fui aluna de Paulo Freire, por umas aulas. Pense na honra!

M. - Que coisa. Tem alguma lembrança?

M. E. - Se tenho alguma lembrança dessas aulas? Tenho. Mas não guardei nenhum documento. Só memórias. [...] As aulas eram muito informais.

Eram realizadas na casa do Dr. Airton Costa Carvalho, que era diretor da Faculdade de Arquitetura na época, eu acho. Não, era diretor do IPHAN. Eu não sei bem. Era arquiteto. Havia uma mesa assim bem grande no terraço e nós, crianças, quer dizer adolescentes, entre 13 e 16 anos, sentávamos em volta e ele falava, contava coisas, lia pra gente, fazia a gente escrever. Beleza, não é? Mas, na época, naturalmente, eu não me dava conta da importância do trabalho de Paulo Freire, para mim era somente um amigo de Papai. Talvez já tivesse desenvolvido a teoria dele, a pedagogia. Mas eu acho que ele ainda não tinha saído do país. Eu achava essas aulas muito boas, muito legais. O carro do Dr. Airton me apanhava em casa e a gente ia pra lá.

[...]

M. - E com a chegada das suas filhas, você teve muita dificuldade para se adaptar ao trabalho?

M. E. - Eu não tive dificuldade muito grande, não, mas eu também me concentrei exclusivamente nessas duas coisas, família e trabalho. Não fazia mais nada. Aliás, quando eu comecei, com as minhas duas primeiras filhas, Anita e Maria Luiza, eu trabalhava só meio expediente, tinha contrato de 20h. Depois surgiu a obrigatoriedade do contrato em tempo integral. Aí, ficou mais difícil. Por outro lado, me deu mais tempo para estudar matemática. Porque a gente não dava aula o tempo todo. Todo o tempo restante, eu usava para estudar. Estudei muito lá na Federal.

M. - Você é versátil, né?! Gosta de todas as áreas. Mas, inicialmente, você começou com Álgebra. Depois que você foi migrando... Como foi esse processo? Essa descoberta?

M. E. - A descoberta foi exatamente por ser aluna de Ruy Gomes. Na verdade, de Ruy Gomes e de Fernando Cardoso que, na época, era assistente dele também. Principalmente Ruy Gomes. Ruy Gomes me dava coisas de Análise para estudar, teoremas, parte de textos, e depois, eu apresentava para ele. Foi aí que surgiu aquele meu artigo sobre funções de variação total limitada. Ele me deu pra estudar um resultado e eu não entendi a demonstração. Então, fiz uma, diferente, e ele disse "essa demonstração é original", "não tem em canto algum". Mandou escrever e, seguida, foi publicada em Portugal. Eu ainda estava no terceiro ano da faculdade. Não tinha nem me graduado ainda. Foi muito bom. Hoje em dia, não tem como fazer isso, mas devíamos voltar a fazer. Devíamos ter revistas que publicassem artigos de alunos, e dar valor a esse tipo de contribuição. Mesmo pequeno, mesmo iniciante, mesmo não sendo original, entende?

[...]

M. E. - Eu trabalhava como substituta na UFPE. Neste concurso da Rural havia candidatos que eram antigos alunos meus.

M. - Passaram Marcelo Gama, Ângela e Jorge. Eu fiz esse concurso.

M. E. - Mas eu não fiz, eu não quis fazer. Não preencheram todas as vagas, não sei o porquê.

M. - Eu acho que deve ter aposentado mais gente.

M. E. - Verdade, porque no meu contrato consta que entrei na vaga de fulano de tal que tinha se aposentado. Quando abriu essa segunda oportunidade, me liga Hebe e me chama. "Por favor, venha, não tem ninguém e está quase fechando e ninguém se apresenta porque agora estão pedindo o título de doutor". Abriram para adjunto. Era requisito ser doutor. Sabia que não tinha nenhum antigo aluno meu, com título de doutor, concorrendo comigo. Assim, resolvi fazer esse concurso. Fiz sozinha. A banca foi Hildeberto [Cabral], Socorro [Brasileiro] e não lembro quem foi. O resto lhe contei já. Fiz. Passei bem. Passei direitinho. Tinha terminado em 92, eu acho, o doutorado. Ou 94, nem sei.

[...]

M. - Você fez o doutorado na UFPE?

M. E. - Sim. Na UFPE, e fui orientada por Jorge Hounie, o melhor orientador do mundo. Na verdade, eu fiz o doutorado de uma maneira "não *standard*". Porque me matriculava em disciplinas isoladas, porque tinha uma carga horária grande no Departamento. O Departamento disse logo que não iria liberar de carga horária para aluno de doutorado. Aí, eu tinha uma carga horária grande e umas turmas enormes. Então, eu fazia como podia, duas disciplinas por semestre. Não fazia a disciplina de verão, por causa das férias das filhas. Houve disciplinas que eu comecei, depois deixei porque achei o professor ruim. Levei uns 3 anos nisso, mas consegui fazer o número de 12 disciplinas com nota boa. Todas as que eram necessárias. Aí, quando eu já tinha feito todos os créditos, eu pedi matrícula, a matrícula foi concedida e, então, Jorge Hounie pediu ao CNPq uma bolsa de doutorado para mim. Fui um ano bolsista do CNPq porque infelizmente em um ano acabei a tese.

[...]

M. E. - Podia ter guardado mais tempo da bolsa, não é? Foi um ano só. Esta época de escrever tese, participar dos cursos finais, foi uma maravilha para mim. Eu me sentia no céu. Ia pra lá, passava a manhã estudando. Voltava tarde, 17h horas eu ia para casa. Não dava aula. Estava no período de interstício. Quem é professor substituto por dois anos tem que passar dois anos sem voltar, para não criar vínculo empregatício. E depois entrei de novo, como substituto [sic], tendo terminado o doutorado, defendido tese, remetido para publicação, tudo.

M. E. - Quando eu ainda estava como professor substituto [sic], apareceu esse concurso aqui na Rural [UFRPE]. Pedi rescisão de contrato lá para vir para cá. Entrei em 2002.

[...]

M. - Mas nessa questão da família era uma coisa muito difícil para você coordenar tudo, né?

M. E. - Eu acho que fazia como dava, não sendo muito exigente comigo mesma. Nos primeiros anos minhas filhas eram pequenas. Até Mariana ter uns 10 anos, acho, morava comigo aqui uma tia adotiva. Uma moça que foi adotada por minha avó, criou-se com minha mãe, então, ela já tinha idade. Ela ficava em casa supervisionando tudo quando eu ia trabalhar. Eu vinha tranquila. Ela me deu esse apoio, o apoio familiar feminino, o apoio de mulheres para outras, tão precioso.

[...]

M. - Quando você terminou seu doutorado sua mãe era viva? Ela foi à defesa?

M. E. - Era viva sim. Eu não chamei ninguém para assistir a defesa. Realmente eu nunca achei que fosse celebração. Acho que ela ficou contente, eu diria. Mas sempre valorizando mais as coisas abstratas, morais, afetivas do que as profissionais. Dizendo parece estranho, mas é natural. E sempre gostei disso.

[...]

M. - Mas, além de tudo isso, você ainda tem a sua veia artística, né? Que nunca lhe abandonou... Quando começou essa coisa de arte?

M. E. - Começou por acaso. Eu tenho uma filha, como você sabe, recentemente inclusive foi feito o diagnóstico dela, ela é autista mas é um tipo de autismo não extremamente grave. Mas houve uma época em que ela estava com muita dificuldade motora e, então, a psicóloga que cuida dela desde pequenininha disse assim: "Por que você não leva ela para um ateliê, onde ela possa trabalhar com argila?" Descobri que existia o Ateliê do Poço, onde havia umas aulas de escultura. Eu fui lá, mas o lugar era meio esquisito para mim; eu não ia deixar minha filha pequena sozinha naquele lugar. Matriculei-me junto com ela. Como resultado, ela não gostou muito da argila, mas eu adorei...

M. - Você lembra quem era que dava aula?

M. E. - Sim. É uma artista que se chama Maria Helena Assis. Que é minha querida amiga, grande amiga, até hoje.

[...]

M. - Ela expõe aqui?

M. E. - Não. Mas já expusemos juntas. Na Fundação Joaquim Nabuco na Galeria Baobá. As esculturas dela, em pedra, em ferro fundido, e em cerâmica, são extraordinárias. Esse anel é dela também.

M. - É lindo! Quantas exposições você já fez?

M. E. - Eu já fiz umas 10 a 12, mas não me lembro direito. Mas eu tenho um currículo artístico separado. [risos]

[...]

M. E. - Esse interregno que fiz, de buscar uma coisa artística, foi muito interessante. Fui estudar no CAC, na UFPE, lá eu conheci Maria do Carmo Nino. Ela é uma professora fantástica. Fiz alguns cursos com ela, matriculada como aluna.

M. - Aluna especial?

M. E. - Não, aluna sei lá o nome, aluna ouvinte, acho? Enfim tem uma terminologia, não lembro. Em torno de 2000, acho que foi de 1998 a 2002, eu estudava desenho com um grande artista japonês que passou aqui um período. Professor Shunichi Yamada. Nós, seus alunos [Maria Helena Assis, Tatiana Moes, Bruno Vilela, Rosinha Queiroz, Rodrigo Costa, Kilian Glasner, Célia Bivar, e outros], o chamávamos Shangui. [...] A versão portuguesa do nome dele, eu não sei porquê. Chamam ele de Shangui, mas o nome dele é Shunichi, não sei como é que se escreve. Ele é do norte do Japão, é da cidade de Kanazawa. [...] Não sei, não sei pronunciar direito. Shangui tem uma trajetória incrível. Fez cursos de arte no Japão, arte tradicional japonesa. Ele pinta sobre seda aquelas aquarelas tradicionais de pessoas com kimono, retratos de uma perfeição absurda. Depois ele foi para a Rússia, Hungria, França, Portugal. De Portugal veio para o Brasil. Aqui, primeiro, trabalhou na UFPE, no curso de desenho de modelo vivo, na extensão do CAC. Depois, abriu um curso particular com os alunos que ele tinha angariado e nós avidamente fomos estudar com ele. Um artista completo. O trabalho dele é muito ousado. [...] As telas ele fazia aqui e vendia no Japão. Nunca vendeu aqui porque aqui não tinha quem pagasse. [...] Recentemente foi publicado o livro de Clarissa Diniz, "A Persistência da Luz", sobre a trajetória do artista Bruno Vilela, aluno de Shanghi. Vale a pena, pelo artista e pelo texto maravilhoso. Quando estava estudando com Shangui, fiquei muito amiga de Rosinha Queiroz, que trabalha com ilustração de livros infantis, na Usina de Imagens. Entramos juntas numa seleção e fomos escolhidas para uma exposição no 46º Salão Pernambucano, e fizemos outras exposições.

[...]

M. - E a chegada na Rural, como foi?

M. E. - Foi ótima porque encontrei Hebe que eu não via há muitos anos, tinha sido minha aluna, e eu gostava muito, e admirava. Eu tive tanto aluno bom que eu fico feliz quando lembro. [...] Porque quando eu vim para cá, eu disse logo à Hebe: Não quero ensinar nos cursos de Engenharia, nem de Física, nem de Química. Eu gostaria de trabalhar na Licenciatura, porque, lá na UFPE, eu não tive oportunidade, sempre fiquei na Área II. [...] Houve uma época em que as turmas da Área II eram imensas. Em torno de 120 alunos, 112.

M. - Aí você chegou, já foi dar aula na Licenciatura. Em que cursos? Lembra? Os primeiros cursos?

M. E. - Eu acho que foi Geometria Euclidiana, que eu nunca tinha ensinado. Hebe me deu o livro. Aquele amarelinho, de quem é?

M. - É do João Lucas [Barbosa].

M. E. - João Lucas, pronto. Aí eu comecei a estudar aquilo, gostei. Acho que ensinei uns 3 períodos ou 4, mas ensinava também Cálculo.

M. - Aí não foi logo para Análise, não?

M. E. - Não, Cálculo.

M. - Porque quando eu cheguei aqui você dava aula de Análise, não?

M. E. - É, mas foi bem depois. No começo foi Analítica, dei Analítica para a turma dos meninos. Primeiro para a turma de Adriano, depois para a turma de Deibsom, Leon, Tiago e Filipe.

M. - Foi, mas aí eu já estava aqui porque eu fui professora de Análise deles. Aí, eu dei Análise 1. [...] Você deu Análise 2 para eles. Que eu entrei de licença [maternidade], aí você deu. E você já tinha sido professora de Adriano Regis também, né?

M. E. - Adriano acho que foi da primeira turma. Um ponto singular. [...] Gostei muito de pegar a turma daqueles meninos aí, do Leon, Deibsom, Tiago...

M. - [...] Me lembro até que eles chegaram a fazer um trabalho com você. Não foi? Apresentaram e tudo. Acho que era de cônicas, não foi?

M. E. - A questão é interessante. Havia definido superfície cônica, especificada por uma curva diretriz C num plano, um ponto P fora do plano, e o feixe de retas geratrizes passando por P e por um ponto de C. Comecei a perguntar: por que não existe um cone parabólico? Uma superfície assim feito uma telha, apoiada numa parábola diretriz? Não existe? De fato, não existem cones parabólicos, nem cones hiperbólicos, todos os cones são elípticos. A questão foi resolvida, via geometria diferencial. O mais interessante foi que Tiago Veras, Deibsom, Leon e Filipe desenvolveram um programa que traçava em 3 dimensões e construía a superfície no computador. Quando a superfície gerada fechou formando o cone elíptico, todo mundo aplaudiu, foi uma beleza, muito bacana mesmo.

M. - Mas era bom, então?

M. E. - Era, gostei muito de trabalhar aqui. E aqui tive oportunidade de trabalhar com Márcia, Socorro, Hebe, você, Gabriel, Rodrigo, DK, Jorge [os três volumes de Números Reais]. De encontrar antigos alunos: Ângela, Deibsom, Leon, Tiago, Eberson. De conhecer novos e promissores matemáticos: Bárbara, Marcelo, Ricardo, Clessius, Tarciana, Anete... não vou ser capaz de mencionar todos, me desculpem.

[...]

M. E. - Houve um momento em que parecia que o Departamento de Matemática iria se tornar uma sucursal do Departamento de Educação. A gente se rebelou contra essa ideia, e foi uma luta com lances assim bem estranhos. Só conseguimos tomar rédeas do destino do Departamento por causa dos alunos que a gente tinha naquela época, destaco Adriano Regis, Deibsom, Leon, Tiago Veras e depois Teófilo já na turma seguinte. Sem o apoio desses alunos realmente não teríamos tido sucesso para fundar aqui, realmente, um Departamento de Matemática, com a vocação de produzir e estudar matemática. Não que eu pense que a educação não seja importantíssima, mas já havia um Departamento de Educação aqui na Rural, que cumpria muito bem o seu destino, sua tarefa.

[...]

M. - Quer falar mais alguma coisa?

M. E. - Eu quero dizer que eu fiquei muito orgulhosa com o livro que o pessoal lançou do IMPA agora, Leon, Ricardo e Marcelo. Quero dizer isso. [risos] De ver que as produções daqui do Departamento já estão sendo aceitas, né?

M. - É. Hoje decorrente de tudo isso tem OPEMAT, É Matemática, Oxente! Tem vários projetos, um que teve essa semana do Laboratório de Matemática que fizeram uma interação: Eudes, Bárbara, Anete, Tarciana, Clessius.

M. E. - Eu queria terminar destacando todo o time feminino daqui do Departamento. [...] Muito bacana isso aqui!

M. - É, eu acho também. A gente conseguiu construir uma coisa bem plural mesmo, harmônica.

M. E. - Eu queria citar que você me sucedeu na OBMEP. Aceitou! [...] E depois de você, ficou com Jorge até agora.

[...]

M. E. - Mas é isso, eu tenho que dizer que o apoio do meu marido foi fundamental em tudo. Da família, em particular, do meu marido. Nunca bloqueou minhas escolhas. Sempre apoiou e, o mais engraçado, ele sempre apoiou matemática com certeza. Matemática é uma coisa muito minha, mas, a parte artística, ele volta e meia se empolgava. Durante muito tempo. ele foi o fotógrafo do meu grupo, depois ele largou a fotografia.

[...]

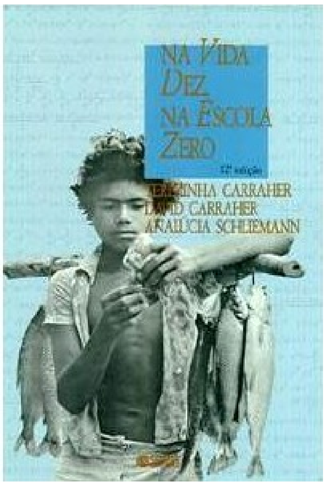
M. E. - Agora, veja bem, o trabalho de pesquisa em matemática é um trabalho que exige um empenho, uma fixação naquilo, um esforço muito grande que, às vezes, cega as pessoas para outras coisas. No entanto, este trabalho da pesquisa é necessário, é importante, é assim que o conhecimento avança. Deve, portanto, ser disseminado, apregoado, valorizado. Não importando a área ou o nível, certo? Ou o mérito do resultado, ou o público a que se destina o trabalho. Cada área tem a sua própria importância, não é? Nenhuma é mais importante do que a outra. Inclusive porque a pesquisa puríssima e de altíssimo nível em matemática realmente só é entendida, de início, por umas 1000 pessoas no planeta. No entanto, quando você faz um texto didático, quando você dá uma aula para uma criança, você está atingindo um público e um futuro muito grande e isso é muito importante também!

[Atualmente a professora Maria Eulalia tem participado de exposições virtuais na M.A.D.S. Gallery (https://www.madsgallery.art/item/2e8b626b-4ccb-4cda-ad26-629178563ff5/artist/maria-eulalia). Toda quinta feira ela posta as aquarelas que pinta no Instagram (<https://www.instagram.com/eulalia_moraes/>). Algumas delas podem ser vistas nos sites <https://www.artsy.net/>, ou <https://www.artsper.com/> (buscar por Maria Eulalia).]

3. Indicações de Leituras/Filmes

Na vida dez, na escola zero

Michele Mendes Novais[11]



Uma pergunta que grande parte dos professores de matemática costuma escutar de seus alunos ao ensinar determinados conteúdos é: onde eu vou utilizar isso? A depender do nível escolar, ou até mesmo do conteúdo, esta pode não ser uma pergunta fácil de responder. Entretanto, a pergunta sugere que a abordagem dada ao ensino, pode não ter sido contextualizada com um problema cotidiano. Mas, será que sempre é possível compreender a matemática através de problemas do dia a dia e sem conhecimento prévio da matemática abstrata? Ao se ensinar conteúdos das séries iniciais, por exemplo, pode vir o seguinte questionamento: O que deve vir primeiro: Os números ou a quantidade? Para apresentar quantidades, usamos números, e para entender os números, usamos quantidade. O livro *Na Vida Dez, Na Escola Zero* foi escrito na década de 80 pela pernambucana *Terezinha Nunes* (e colaboradores), é uma coletânea de estudos que investiga o desempenho matemático de crianças e adolescentes ao resolver problemas no contexto da vida real, de maneira informal, e problemas matemáticos mais abstratos no ambiente escolar.

Alguns dos estudos realizados no livro, indicam que alunos que aprendem matemática de maneira informal adquirem excelentes habilidades ao pensar em quantidades e que essas habilidades poderiam ser utilizadas em sala de aula. Através de testes pode-se inferir que, muitas vezes o ensino sistematizado da matemática tende a confundir os estudantes e acaba não sendo efetivo na aprendizagem.

Como compreender, no contexto do ensino-aprendizagem de matemática, uma criança que, trabalhando numa feira, consegue realizar operações matemáticas como: adição, multiplicação, subtração, divisão e proporção, mas não consegue realizar essas mesmas operações no âmbito escolar? Crianças que trabalham, se saíram bem em testes informais relacionados aos seus ambientes de trabalho. Foram feitas perguntas como por exemplo: se um coco custa determinado valor, quanto custam 10 cocos? Se eu eu te dou um valor x, quanto você me dá de troco? As crianças criavam sua forma de raciocínio e respondiam bem essas perguntas, entretanto nem sempre conseguiam se sair bem, quando tinham que resolver as mesmas operações, porém de forma abstrata e no ambiente escolar. Os autores observam que é comum associar o fracasso escolar, principalmente em matemática, à inteligência ou à falta de inteligência e que este julgamento acaba ocasionando a evasão e afeta, essencialmente, crianças de famílias mais pobres.

[11]Professora do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco

Comparado com a década de 80, a educação hoje, pode ter uma realidade diferente, uma vez que existem mais investimentos e muito mais acesso às tecnologias, entretanto a leitura do livro auxilia no planejamento didático e contribui para uma importante autorreflexão a respeito do ensino de matemática, contribuindo para uma melhor transmissão de conhecimento.

Referências

[1] Carraher, Terezinha Na vida dez, na escola zero. Terezinha Nunes, David Carraher, Analucia Schleimann - 16 ed. - São Paulo: Cortez 2011.

4. Quem pergunta, quer saber!

Revista do Professor de Matemática (RPM, nº 62)

Por Severino Barros de Melo[12]

Revisitando a Revista do Professor de Matemática (RPM), desta vez encontramos no número 62 (primeiro quadrimestre de 2007) a pergunta de um leitor da cidade de Picos (PI) intitulada "De tirar o sono?". O problema apresenta semelhança com as questões presentes nas recém- aplicadas provas do ENEM, caracterizadas pelo uso da matemática nas situações do cotidiano das pessoas.

Leitor: Por favor! Gostaria de saber se posso contar com vocês para uma dica ou a própria resolução da questão de um concurso. Pois a questão vem me tirando o sono e venho brigando com ela há dias.

Questão: A tabela abaixo apresenta as dimensões do papel enrolado em duas bobinas B1 e B2 .

	comprimento(m)	largura(m)	espessura(mm)
B1	23,10	0,18	1,5
B2	18	0,18	1,5

Todo o papel das bobinas será cortado de modo que tanto o corte feito em B1 como em B2 resulte em folhas retangulares, todas com a mesma largura do papel. Nessas condições, o menor número de folhas que se poderá obter é:

A) 135 B) 137 C) 140 D) 142

Resposta da RPM:

Na B1 há 2310 cm de papel. Na B2 há 1800 cm de papel.
Como o MDC (2310, 1800) = 30, então:
B1 fornecerá 2310/30 =77 folhas de 30 cm.
B2 fornecerá 18000/30 = 60 folhas de 30 cm.
O total das folhas será 77+60 = 137.

[12]Professor do Departamento de Educação da UFRPE

5. Eventos

Nos meses de janeiro e fevereiro muitas universidades realizam escolas de verão.Trazemos algumas indicações destes eventos.

- **Programa de Verão da UFS**
  - Local: UFS
  - Data: De 09 de janeiro a 28 de fevereiro
  - Mais informações: https://www.verao.mat.ufs.br/
- **Programa de Verão - UAMat/UFCG**
  - Local: Atividades na modalidade híbrida
  - Data: De 02 de janeiro a 28 de fevereiro de 2023
  - Mais informações: https://mat.ufcg.edu.br/verao2023/
- **Programa de Pós-doutorado Verão 2023**
  - Local: IMPA, Rio de Janeiro
  - Data: De 02 de Janeiro a 28 de Fevereiro de 2023
  - Mais informações: https://impa.br/eventos-do-impa/2022-2/2023-post-doctoral-summer-program/

- **Programa de Verão em Matemática do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) da Universidade de São Paulo (USP - campus São Carlos)**
  - Local: USP - Campus São Carlos
  - Data: De 3 de janeiro a 28 de fevereiro de 2023
  - Mais informações: `http://verao.icmc.usp.br/verao2023/index.html`
- **Programa Verão UFSCAR**
  - Local: UFSCAR
  - Data: 09 de janeiro a 17 de fevereiro de 2023
  - Mais informações: `https://www.dm.ufscar.br/ppgm/index.php/extensao/77-programa-de-verao/1299-programa-de-verao-2023?highlight=WyJ2ZXJcdTAwZTNvIl0=`
- **Programa de Verão UFJF**
  - Local: Modalidade Virtual
  - Data: Início 10/01/2023
  - Mais informações: `https://www2.ufjf.br/mestradomatematica/eventos/programa-de-verao/2023-2/`
- **Programa de Verão do LNCC**
  - Local: Evento remoto
  - Data: De 16 de janeiro a 17 de fevereiro de 2023
  - Mais informações: `http://veraolncc.kinghost.net/`
- **XV seminário Nacional de História da Matemática.**
  - Local: Maceió-Alagoas
  - Data: 2 a 5 de abril de 2023.
  - Mais informações: `https://www.sbhmat.org/`

6. Problemas

Para concluir, convidamos o leitor a responder alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Problema 1 (OBMEP 2015)**.** Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

Problema 2 (17ª OBMEP - 1ª FASE)**.** Sejam a e b inteiros positivos tais que $a+2$ é múltiplo de b e $b+2$ é múltiplo de a. Qual é o maior valor possível para $a+b$?

a) 2

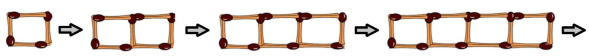
b) 4

c) 6

d) 10

e) 14

Problema 3 (OBRL - 2021 2ª Fase Nível Ômega)**.** Usando palitos de fósforos inteiros é possível construir uma sucessão de figuras compostas por quadrados.



Observe a tabela que relaciona a correspondência entre o número de quadrados em função da quantidade de palitos.

Nº QUADRADOS	1	2	3	4	...	20	...	K	...	48
Nº PALITOS	4	7	10	W	...	61	...	97	...	Y

Descubra o valor da soma dos números que substituem corretamente as letras W, K e Y, sendo estes referentes à quantidade de palitos ou de quadrados necessária para a construção de figuras compostas.

a) 190

b) 214

c) 145

d) 177

e) 233.

Enviem as soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, o envio do arquivo (.tex), no modelo disponível no site, deve ser realizado até **20/03/2023**.

---

7. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n. 23, Junho de 2022**.

Problema 1 (OBM-22, Nível 2)**.** Uma tripla de inteiros positivos (a, b, c) é dita *miranha* se:

- $a \mid bc + 1$;
- $b \mid ac + 1$;
- $c \mid ab + 1$;

Determine todas as triplas miranhas.

Solução. Essa não é uma questão difícil, mas com muito detalhes, por isso é preciso atenção.
Primeiramente vamos verificar 1) $mdc(a, b) = mdc(b, c) = mdc(a, c) = 1$
Suponha que $mdc(a, b) = d > 1$ assim $d \mid a$ e $d \mid b$ o que implica que $a = d \cdot a_1$ e $b = d \cdot b_1$.
Como $a \mid bc + 1 \Rightarrow d \cdot a_1 \mid d \cdot b_1c + 1 \Rightarrow d \mid 1$ Chegando a um absurdo pois não podemos ter um inteiro maior que 1 e que divide 1.
Segunda observação: Sejam $r, s, t, w \in \mathbb{N}$ tais que, $r \mid s$ e $t \mid w$ então $r \cdot t \mid s \cdot w$. Aplicando isso a questão, obtemos $abc \mid (ab + 1)(ac + 1)(bc + 1)$ e expandindo chegamos a

$$abc \mid a^2b^2c^2+a^2bc+ab^2c+abc^2+ab+ac+bc+1. \quad (1)$$

Terceira observação: Sejam $f, g, h \in \mathbb{N}$ tais que $f \mid g$ e $f \mid g + h$ então $f \mid h$.
Aplicando isso a (1) temos que $abc \mid ab+ac+bc+1$.
Quarta observação: Se $a, b \in \mathbb{N}$ e $a \mid b$ então $a \le b$. Logo $abc \mid ab + ac + bc + 1$ implica em $abc \le ab + ac + bc + 1$ dividindo por abc temos que

$$1 \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc}. \quad (2)$$

Perceba que a questão é toda simétrica em relação às variáveis, então podemos supor $a \le b \le c$. Com isso conseguimos uma limitação nas variáveis, pois se $4 \le a \le b \le c$. Substituindo em (2)

$$1 \le \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} \Rightarrow 1 \le \frac{49}{64}$$

Absurdo. Portanto para que as hipóteses da questão sejam atendidas $a \le 3$.
Vamos separar em casos:
1)Caso $a = 1$ temos que

1. $1 \mid bc + 1$;
2. $b \mid c + 1$;
3. $c \mid b + 1$;

No caso analisado $1 \le a \le b \le c$ do item 3 temos que $c \le b + 1$ o que implica $b \le c \le b + 1$ isto é $b = c$ ou $c = b + 1$. Se $c = b$ então $b \mid b + 1$ o que implica que $b = 1$, assim achamos a primeira solução $(1, 1, 1)$.
Se $c = b + 1$ então $b \mid b + 2$ o que implica que $b = 1$ e $c = 2$ ou $b = 2$ e $c = 3$ o que nos dá as soluções $(1, 1, 2)$ e $(1, 2, 3)$.

2)Caso $a = 2$ temos que

1. $2 \mid bc + 1$;
2. $b \mid 2c + 1$;
3. $c \mid 2b + 1$;

Do qual concluímos que b e c são ímpares. Se $b = 3$ as condições se tornam:

1. $2 \mid 3c + 1$;

ISSN 2526-8651

2. $3 \mid 2c+1$;

3. $c \mid 7$;

De $c \mid 7$ concluímos que $c = 1$ ou $c = 7$. O caso $c = 1$ é a solução $(1, 2, 3)$ com os elementos permutados, a nova solução é $(2, 3, 7)$. E se $5 \leq b \leq c$. Então em (2) temos $1 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50} \Rightarrow 1 \leq \frac{23}{25}$ Absurdo. Assim não temos outas soluções para o caso $a = 2$.

Caso $a = 3$. Note que $(3, 3, 3)$ não é solução. E que para qualquer tripla com $c \geq 4$ temos pela equação (2) que $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{36} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9} \leq 1$. O que é um absurdo.

Portanto não temos novas soluções para $a = 3$.

Assim as únicas soluções possíveis são

$$\{(1, 1, 1); (1, 1, 2); (1, 2, 3); (2, 3, 7)\}.$$

□

Problema 2 (Canguru de Matemática Brasil 2021 - Nível J)**.** No intervalo de um jogo de handball, o placar era 9:14, ou seja, o time visitante estava ganhando com 5 gols de diferença. Com as instruções do técnico no intervalo, o time da casa dominou o jogo no segundo tempo e então marcou o dobro do número de gols que o time visitante marcou no segundo tempo e acabou vencendo o jogo com um gol de diferença. Qual foi o placar final do jogo?

a) 20:19

b) 21:20

c) 22:21

d) 23:22

e) 24:23

Solução. No final do segundo tempo, o placar era $9+2x : 14+x$, sendo x o número de gols do visitante no segundo tempo. Como o time da casa ganhou por 1 gol de diferença, temos $9 + 2x = 14 + x + 1 \Leftrightarrow x = 6$. Portanto, o placar final foi 21:20. □

Problema 3 (OBMEP-2019 Nível 3)**.** Uma função f é tal que $f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x}$ para todo número real x diferente de 0 e 1. Qual é o valor de $f(3)$?

Solução. Para calcularmos $f(3)$, precisamos resolver a equação $\frac{2x+1}{x-1} = 3$. E isto equivale a $2x+1 = 3x-3$, que por sua vez resulta em $x = 4$.

Portanto, $f(3) = \frac{1}{4}$. □