É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 24, volume 1, Setembro de 2022
ISSN 2526-8651

Editorial

Caros Leitores,
É com alegria e entusiasmo que lhes oferecemos o número 24 do nosso jornal. Alegria pelo fato de podermos dar continuidade a um projeto importante na perspectiva da divulgação Matemática. Considerada por muitos uma disciplina para poucos, qualquer ação que visa a democratização desse conhecimento é sempre bem-vinda. O entusiasmo justifica -se pelas manifestações de apoio verbalizadas nos contatos pessoais, quando da participação de algum evento relativo às Olimpíadas de Matemática e nos mais de 39.000 acessos de nossa página na internet.

No presente número destacamos o artigo "Grafos, Números de Ramsey e o Método Probabilístico" assinado pelo professor da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Iesus Carvalho Diniz.

A seção curiosidade aborda a medalha Fields (uma espécie de prêmio Nobel da Matemática), na perspectiva da participação feminina, contribuição das professoras Maité Kulesza, Lorena Brizza e Michele Novais do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco. Por falar em medalhas Fields, trazemos uma entrevista com a professora Miriam Pereira, da Universidade Federal da Paraíba, que esteve presente na última cerimônia de premiação.

Na indicação de filme trazemos a proposta da obra "Escritores da Liberdade", uma oportunidade para refletir educação.

A seção quem pergunta quer saber esclarece sobre a validade de propriedades da potenciação em relação a alguns campos numéricos.

Como já é esperado, propostas e resolução de questões de Olimpíadas não podem faltar. Portanto, estamos com um número rico de novidades.

Atualmente, sempre que possível, queremos entre uma edição e outra, incorporar as lives como parte integrante de nosso projeto. No dia 12 de julho, tivemos uma sobre os polinômios de Tchebyshev (ver artigo na 14ª edição) apresentada pelo professor Carlos Gomes da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, a qual está disponível em https://www.youtube.com/watch?v=EdJLCFLl_uw. Informamos ainda que em novembro teremos mais uma live, desta vez com a professora Ísis Quinteiro da Universidade Federal do Agreste de Pernambuco também colaboradora do nosso jornal.

Boa leitura!

Sumário

1. Artigo

Grafos, Números de Ramsey e o Método Probabilístico

Iesus Carvalho Diniz
Universidade Federal do Rio Grande do Norte- Departamento de Matemática
Campus
(Lagoa Nova) - Natal-Rn - Brasil

Introdução e Definições Básicas

Muitas situações do dia a dia podem ser modeladas e estudadas a partir de representações em um conjunto V de vértices e arestas ou elos E que conectam cada par de vértices:

- uma rede de refinarias e as estradas que as conectam;
- um grupo de pessoas e quais destas se conhecem;
- centrais de geração elétrica e linhas de transmissão;
- indivíduos de uma população e a contaminação destes por um vírus.

A teoria dos grafos é fortemente presente em áreas como matemática discreta, probabilidade, análise, teoria combinatória dos números, álgebra... além de muitos outros variados problemas em modelos epidemiológicos e sociais. Muitos problemas cuja solução é representada por uma configuração específica num grafo podem ser resolvidos a partir do uso de técnicas como o *Princípio da Casa dos Pombos*, [5], ou outros mecanismos de contagem, mas à medida que o número de vértices aumentam, os problemas ganham uma maior complexidade em que ferramentas mais sofisticadas se mostram necessárias em lugar de técnicas tradicionais de contagem. Mostraremos neste artigo aplicações do *Método Probabilístico* em colorimento de grafos e no *Número de Ramsey*, além de problemas envolvendo grafos.

Definição 1.1. Um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto abstrato V de pontos chamados vértices e elos E em que cada elo é formado por um segmento de reta com extremidades em dois vértices. A ordem de um grafo é a cardinalidade do seu conjunto de vértices e o grau de cada vértice é a quantidade de elos que nele incidem.

Definição 1.2. (Grafo Completo K_n e Clique) Um grafo de n vértices em que cada par de vértices é conectado por um elo é dito ser um grafo completo de ordem n e indicamo-lo por K_n. O clique de um grafo $G = (V, E)$ é um subgrafo de G que seja completo.

Definição 1.3. (Grafo Aleatório $G(n, p)$) É um grafo de n vértices em que cada par de elos possíveis ocorre independentemente dos demais com probabilidade p.

Definição 1.4. (Grafo k-Colorido) É aquele no qual são usadas k cores no colorimento de seus elos com cada elo colorido por uma única cor.

Grafos e o Número de Ramsey

Nesta seção apresentaremos alguns resultados e problemas sobre grafos finitos e o *Número de Ramsey*.

Proposição 1.1. *A soma dos graus de todos os vértices de um grafo é par.*

Demonstração: Dado que dois vértices quaisquer de um grafo determinam o mesmo elo, segue-se que a soma dos graus dos vértices é o dobro do número de elos, e portanto par. □

Teorema 1.2. *O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par.*

Demonstração: Da Proposição 1.1 tem-se que a soma dos graus de todos os vértices (vértices de grau par mais vértices de grau ímpar) é par. A soma dos graus dos vértices de grau par é par, independentemente de a quantidade de vértices somada ser par ou ímpar. Desde que a soma de inteiros é par, se e somente se, a quantidade de inteiros ímpares somados for par, segue-se que a quantidade de vértices do grau ímpar deve ser par.

□

Exemplo 1.1 (Veja [9])**.** Prove que o número de pessoas que vivem na Terra e que apertaram mãos um número ímpar de vezes em suas vidas é par.

Solução: Imaginando cada pessoa na Terra como um vértice de um grafo e um elo deste grafo se duas pessoas se cumprimentam, do Teorema 1.2 segue-se que a quantidades de vértices (pessoas) de grau ímpar (número ímpar de cumprimentos) é par.

□

Exemplo 1.2 (Veja [9])**.** É possível existirem exatamente 100 estradas em um reinado no qual existem 3 estradas saindo de cada cidade?

Solução: Representando as cidades e estradas, respectivamente, por vértices e elos em um grafo, segue-se que cada cidade será um vértice de grau ímpar e igual a 3. Do teorema 1.2 tem-se que o número x de cidades conectadas por três estradas deve ser par, entretanto não existe nenhum x par satisfazendo $\dfrac{3x}{2} = 100$.

□

Exemplo 1.3 (Veja [9])**.** É possível desenhar 9 segmentos de reta no plano de tal forma que cada um intersecta exatamente 3 outros?

Solução: Consideremos o grafo em que cada segmento de reta é representado por um vértice e se dois segmentos de reta se interceptarem, o ponto da interseção representa um elo. Neste modelo para que cada segmento de reta interceptasse outros três segmentos, seria o equivalente a ter um grafo de 9 vértices cada um deles com grau 3, o que pelo Teorema 1.2 é impossível.

□

O exemplo a seguir, o problema das *setes pontes de Königsberg* resolvido por Leonhard Euler (Basiléia 1707-1783) em 1736 que foi considerado como um precursor da *Teoria dos Grafos*.

Exemplo 1.4 (Sete pontes de Königsberg)**.** A cidade de Königsberg, atual Kaliningrado, é cortada por um rio que tem duas ilhas. Existem sete pontes ligando as diversas partes da cidade. É possível passear pela cidade cruzando cada ponte exatamente uma vez?

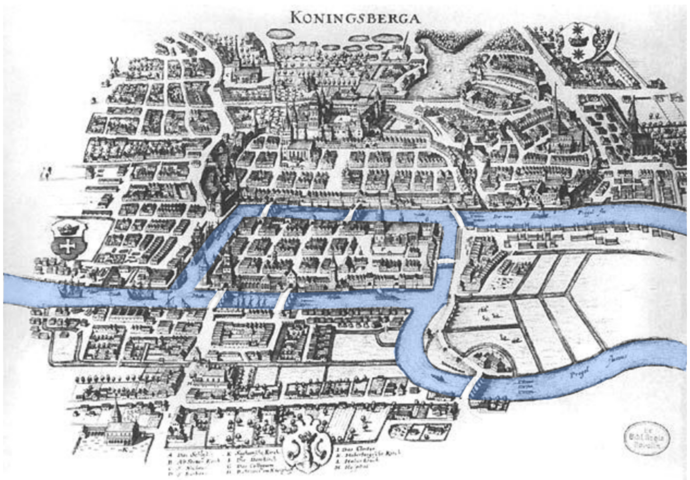


Figura 1.1: fonte: https://en.wikipedia.org/

Solução: Representando as ilhas e as margens por vértices, i_1, i_2, m_1 e m_2, e as pontes por elos, $e_1, e_2, \ldots, e_7$ de um grafo tem-se, necessariamente, que todos os vértices devem ter grau par (no caso que o caminho é iniciado e finalizado no mesmo vértice) ou no máximo dois vértices têm grau ímpar (no caso em que o caminho é iniciado e finalizado em vértices diferentes). Com a representação dada tem-se que devemos encontrar um caminho contendo todos os elos, mas isso é impossível em quaisquer uma das duas situações: caminho fechado em que a origem coincide com o destino ou um caminho em que a origem e o destino são diferentes; uma vez que o grafo que modela o problema tem quatro vértices de grau ímpar.

□

Exemplo 1.5 (USAMO 1989)**.** Os 20 membros de um clube de tênis agendaram 14 partidas entre eles (cada partida é entre dois jogadores apenas), com cada jogador participando de pelo menos uma partida. Mostre que podemos encontrar 6 partidas envolvendo 12 jogadores distintos.

Solução: Suponhamos, por absurdo, que exista uma configuração com menos do que 6 jogos e com jogadores distintos, isto é, seja um conjunto $V = \{v_1, \ldots, v_{10}\}$ (jogadores) e $E = \{v_1v_2, \ldots, v_9v_{10}\}$ (partidas). Seja $V^c = \{v_{11}, \ldots, v_{20}\}$ e desde que cada jogador disputa no mínimo uma partida, particionemos $V^c = V_1 \cup V_1^c$ em que V_1 :=conjunto das partidas em que ao menos um dos elementos de V^c enfrenta algum outro elemento de V^c. Se $V_1 \neq \emptyset$, então há um novo elo formado com os elementos de V^c e que juntamente com os outros 5 elos de E representam 6 partidas com jogadores distintos. Se $V_1 = \emptyset$ então todos os jogadores de V^c enfrentam jogadores de V, ou seja, existem 10 mais novos elos e que somados aos 5 elos de E formam um conjunto de 15 elos (15 jogos), o que novamente é absurdo pela condição de haver 14 jogos.

□

Exemplo 1.6 (Itália 2007)**.** Seja n um inteiro ímpar. Há n computadores conectados por cabos em que cada computador é ligado aos demais por um único cabo. Prove que é possível com n cores obtermos uma configuração em que computadores ligados por um mesmo cabo são de cores diferentes entre si e do cabo que os conecta.

Solução: É suficiente considerar os n computadores como vértices de um polígono regular e o conjunto de cabos os lados do grafo completo K_n, ademais defina a cor de cada cabo (elos do grafo completo) igual a do vértice que pertence a mediatriz que o intercepta.

□

Exemplo 1.7 (IMO 2007)**.** Em uma competição matemática alguns competidores são amigos. Admita a relação de amizade sempre recíproca. Um grupo de competidores é chamado de clique se quaisquer dois elementos do grupo são amigos (admita que um grupo de um único competidor forma um clique). O número de membros de um clique é o tamanho do clique. Dado que em uma competição o clique de tamanho máximo é par, prove que os competidores podem ser alocados em duas salas tais que o clique máximo em uma das salas é o mesmo que o clique máximo contido na outra sala.

Solução: Seja $2n$ o maior clique entre o conjunto de todos os competidores. Sejam S_1 e S_2 duas salas onde os competidores serão alocados com a seguinte dinâmica. Inicialmente todos os competidores são colocados em S_1, em seguida move-se para S_2 todos os elementos de S_1 à exceção dos que pertencem ao clique máximo de $2n$ elementos. Posteriormente cada elemento do clique maximal de S_1 é transferido um a um para S_2. Considere os seguintes lemas, os quais deixamos as provas como exercício:

Lema 1.3. *Se um competidor é transferido de S_1 para S_2, então o clique máximo de S_1 decresce de 0 ou decresce de 1 e em S_2 o clique máximo aumentará em 0 ou 1 unidade.*

Lema 1.4. *Se em S_1 e S_2 o maior clique tem, respectivamente, tamanhos m e n, então o clique máximo de todos os competidores é menor ou igual do que $m + n$.*

Transfira os competidores de S_1 para S_2 até o instante em que (clique máximo de S_1 - clique máximo de S_2)= 0 ou 1. Esta regra de parada é possível pelo Lema 1.7.

Se (clique máximo de S_1 - clique máximo de S_2)$= 0$ o problema está resolvido.

Consideremos agora o caso em que clique máximo de $S_1 =$ clique máximo de $S_2 + 1$ e as seguintes situações:

Se ao mover um competidor de S_1 (clique máximo de S_1 necessariamente diminuirá de uma unidade) para S_2 e o clique máximo de S_2 permanecer constante, então o problema está resolvido.

Considere agora um competidor em S_2 que não é amigo comum de todos os competidores em S_1 (observe que existe tal competidor, do contrário pelo Lema 1.8. teríamos um clique máximo com um número ímpar de elementos em contradição da hipótese) e mova-o de S_2 para S_1. Tem-se então que o clique máximo de S_1 não se alterará e o clique máximo de S_2 diminuirá de uma unidade, passando então a termos a igualdade entre os dois cliques máximos.

□

Exemplo 1.8 (Putnam 1953)**.** Um grafo completo com 6 vértices e 15 elos são coloridos com elos em azul e ou vermelho. Mostre que - sempre - podemos encontrar um triângulo cujos lados têm a mesma cor.

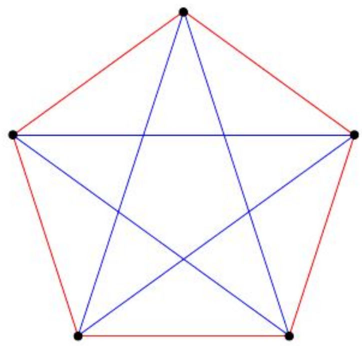
Solução: Devemos mostrar que existe um K_3 azul ou um K_3 vermelho. Sem perda de generalidade seja v um vértice qualquer de K_6 e v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 os demais vértices que formam os 5 elos vv_1, vv_2, vv_3, vv_4 e vv_5 com o vértice v. Pelo *Princípio da Casa dos Pombos* podemos dizer que há, no mínimo, 3 elos de uma mesma cor conectados a v, suponhamos azul e que os elos sejam vv_1, vv_4 e vv_5. Particionando o conjunto dos elos com vértices em v_1, v_4 e v_5 em:

- todos os elos v_1v_4, v_1v_5 e v_4v_5 são vermelhos. Então há um K_3 vermelho de vértices v_1, v_4 e v_5;
- existe ao menos um elo v_1v_4, v_1v_5 e v_4v_5 que é azul, por exemplo, v_1v_4. Neste caso existe um K_3 azul no triângulo de vértices v, v_1 e v_4.

□

Exemplo 1.9. Num grafo completo 2-colorido de 5 vértices, é - sempre - possível encontrar triângulo monocromático?

Solução: Não! A quantidade de 5 vértices não é suficiente para sempre garantir a existência de um triângulo monocromático. O pentágono com o 2-colorimento abaixo é um contraexemplo.



□

Parafraseando os exemplos 1.8 e 1.9 com a convenção que as pessoas são vértices de um grafo e cada aresta colorida de azul ou vermelho representa, respectivamente, se um par de pessoas se conhece ou não, admitindo ainda que a relação de conhecer seja simétrica, que o menor número de pessoas em que podemos garantir que ao menos 3 se conhecem mutuamente ou 3 se desconhecem mutuamente é 6 e é o que foi definido como o *Número de Ramsey* $R(3,3)$ em homenagem ao matemático Frank Ramsey (Cambridge 1903-1930).

As bases da teoria de Ramsey foram apresentadas em 1930, [1], e o principal objeto da teoria é o estudo de grafos completos nos quais subgrafos completos apresentam determinados padrões, em particular, serem monocromáticos. Os números de Ramsey são - incrivelmente - surpreendentes por se conhecer pouquíssimo sobre eles, ademais, por meios computacionais disponíveis hoje, os problemas envolvendo os números de Ramsey não podem ser resolvidos até hoje por simulações pelas limitações das máquinas em função da quantidade exponencial $O(c^{n^2})$ de colorimentos dos elos de um grafo completo com c cores e também pela necessidade do desenvolvimento de novas ferramentas teóricas.

Definição 1.5 (O Número de Ramsey $R(s,t)$)**.** É a ordem do menor grafo completo 2-colorido, com elos de azul e vermelho, que deve conter um K_s azul ou um K_t vermelho. Se $s = t$, então temos o número de Ramsey na forma diagonal $R(s,s) = R(s)$.

Como consequência da definição tem-se

Proposição 1.5. *Para todo $s,t \geq 2$ tem-se que:*

1. $R(s,2) = s$;

   Demonstração: *Se imaginarmos um K_{s-1} com todos os elos azuis, então não existe um K_s azul, precisamos de no mínimo s vértices, e não existe um K_2 vermelho. O que implica $R(s,2) > s-1$.*

   Por outro lado, se tivermos um grafo qualquer de n vértices, podemos fazer a partição de seus elos em: (i) todas os elos são azuis, o que implica que existe um K_s azul ou (ii) há pelo menos um elo vermelho, o que implica que existe um K_2 vermelho. Portanto $R(s,2) \leq s$.

   De $R(s,2) > s-1$ e $R(s,2) \leq s$ tem-se que $R(s,2) = s$. □

2. $R(s,t) = R(t,s)$

   Demonstração: *Basta simplesmente trocar as cores dos elos do grafo.* □

Definição 1.6 (O Número de Ramsey Generalizado $R(n_1, \ldots, n_c)$)**.** É a ordem do menor grafo completo c-colorido, cada elo colorido de uma dentre c cores, em que para algum $i \in \{1, \ldots, c\}$ há um K_{n_i}, grafo completo de n_i vértices, da cor c_i.

O número $R(s,t)$ é um caso particular de $R(n_1, \ldots, n_c)$ com $c = 2$, $n_1 = s$ e $n_2 = t$. Há apenas dois valores conhecidos para colorimentos com mais de duas cores que são $R(3,3,3) = 17$ e $R(3,3,4) = 30$, veja [8].

Finalizaremos esta seção com um breve histórico dos principais números de Ramsey já descobertos e uma famosa citação de Paul Erdös (Budapeste 1913-1996) a respeito dos números de Ramsey.

- Apenas 16 valores são conhecidos para $s,t \geq 3$, sendo o maior deles $R(9,3) = 36$ e o menor deles $R(3,3) = 6$;
- Pode-se determinar $R(3,4) = 9$, $R(3,5) = 14$ e $R(4,4) = 18$ a partir de teoremas que foram apresentados primeiramente no ano de 1955 em [2];
- Em 1968 foram mostrados $R(3,6) = 18$ e $R(3,7) = 23$ em [3];
- Em 1982 foram mostrados $R(3,8) = 28$ e $R(3,9) = 36$ em [4];
- Em 1995 foi mostrado que $R(4,5) = 25$ em [6];
- Para $s,t \in \{5,6,7,8,9,10\}$ há apenas estimativas intervalares;
- Em 1997 mostrou-se que $R(4,6) \leq 41$, $R(5,5) \leq 49$ e conjecturou-se via simulações computacionais que $R(5,5) = 43$ em [7].

Paul Erdös sobre $R(5,5)$ e $R(6,6)$: "imaginemos que uma força alienígena, muito mais poderosa do que nós, pousando na Terra e exigindo o valor de $R(5,5)$ ou eles destruirão nosso planeta. Nesse caso, devemos organizar todos os nossos computadores e todos os nossos matemáticos e tentar encontrar o valor. Mas suponha, em vez disso, que eles peçam $R(6,6)$. Nesse caso, devemos tentar destruir os alienígenas."

O Número de Ramsey e o Método Probabilístico

Nesta seção apresentaremos alguns resultados clássicos para $R(s,t)$ dados na Definição 1.5. Esses resultados foram apresentados primeiramente em [2]. Em alguns resultados usaremos o *Método Probabilístico*, ferramenta matemática que nos possibilita mostrar a existência (de maneira não construtiva) de determinadas propriedades de um objeto em estudo a partir da definição de um evento de probabilidade positiva ao que estamos interessados em verificar a existência [10].

Teorema 1.6. *Sejam $s,t > 2$, então $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que $R(s,t) > R(s-1,t) + R(s,t-1) := n$, isto é, existe um K_n que não contém um K_s azul e não contém um K_t vermelho. Seja v um vértice qualquer desse grafo e particionemos seus vértices nos conjuntos N_A e N_V, respectivamente, que estão ligados ao vértice por elos azuis e vermelhos. Tem-se que

$$|N_A| + |N_V| = n - 1. \tag{1}$$

Por outro lado notemos inicialmente que pelas definições de N_A e N_V não existem K_s azul em N_V e K_t vermelho em N_A. Ademais, $|N_A| \leq R(s-1,t)-1$, pois se houvesse $R(s-1,t)$ vértices em N_A acarretaria que $N_A \cup \{v\}$ formaria um K_s azul. De maneira análoga tem-se que $|N_V| \leq R(s,t-1)-1$. Assim,

$$\begin{aligned} |N_A| &\leq R(s-1,t) - 1 \\ |N_V| &\leq R(s,t-1) - 1. \end{aligned} \tag{2}$$

De (1) e (2) segue-se que

$$\begin{aligned} n - 1 &= |N_A| + |N_V| \\ &\leq R(s-1,t) + R(s,t-1) - 2 \\ &= n - 2 \quad \text{(absurdo!)} \end{aligned}$$

Logo, $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$.

□

Observação 1.1. O Teorema 1.6 nos garante que existe um número $R(s,t)$ ao qual é sempre possível obter um grafo 2-colorido K_n, $n \geq R(s,t)$, que contém um K_s monocromático azul ou K_t monocromático vermelho.

Corolário 1.7. *Se $R(s-1,t)$ e $R(s,t-1)$ são pares, então $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1) - 1$.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que $R(s,t) = R(s-1,t) + R(s,t-1)$. Seja $n = R(s-1,t) + R(s,t-1) - 1$ e desde $R(s,t) > n$ existe um K_n que não contém K_s azul e não contém K_t vermelho. Sejam v um vértice qualquer de K_n, N_A e N_V o conjunto dos vértices ligados a v, respectivamente, por elos azuis e vermelhos.

Desde que $\nexists K_s$ azul e $\nexists K_t$ vermelho segue-se que $|N_A| \leq R(s-1,t)-1$ e $|N_V| \leq R(s,t-1)-1$. Por outro lado, se $|N_A| < R(s-1,t)-1$ e $|N_B| < R(s,t-1)-1$, então o grau de v será menor que $R(s-1,t)-1+R(s,t-1)-1 = n-2$ o que é absurdo pois o grau de qualquer vértice de K_n é $n-1$. Logo, cada vértice de K_n é conectado com $n-1$ outros em que $|N_A| = R(s-1,t)-1$ são azuis e $|N_V| = R(s,t-1)-1$ são vermelhos.

Por último observe que a quantidade de elos azuis ou vermelhos é um número inteiro. Ademais, tem-se $R(s-1,t)-1$ é ímpar, $R(s,t)-1$ é ímpar e $n = R(s-1,t)+R(s,t-1)-1$ é ímpar, sendo portanto impossível $|N_A| = \frac{n(R(s-1,t)-1)}{2} \notin \mathbb{Z}$ ou $|N_V| = \frac{n(R(s,t-1)-1)}{2} \notin \mathbb{Z}$. □

Corolário 1.8. *Para $s,t \geq 2$, então $R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$.*

Demonstração: Para $s \geq 2$ e $t = 2$ o resultado é verdadeiro, pois desde que $R(s,2) = s$ tem-se que

$$R(s,2) = s \leq \binom{s+2-2}{s-1}.$$

Admitamos como hipótese de indução que o resultado vale para $R(s-1,t)$ e $R(t,s-1)$. Do teorema 1.6

$$\begin{aligned} R(s,t) &\leq R(s-1,t) + R(s,t-1) \\ &\leq \binom{s-1+t-2}{s-2} + \binom{s+t-1-2}{s-1} \\ &= \binom{s-1+t-1}{s-1}. \end{aligned}$$

□

Apresentaremos agora um limitante superior e inferior para o número de Ramsey $R(s,s) = R(s)$.

Corolário 1.9 (Limitante superior para $R(s,s)$).

$R(s,s) \le 4^{s-1}$.

Demonstração: Do corolário 1.8 tem-se que

$$R(s,s) \le \binom{s+s-2}{s-1} = \binom{2(s-1)}{s-1}.$$

Note que $\binom{2k}{k} \le 2^{2k}$ (o número de subconjuntos tamanho k de um conjunto de $2k$ elementos é sempre menor ou igual ao total de subconjuntos). Assim

$$R(s,s) \le 2^{2s-2} = 4^{s-1}.$$

Este resultado foi apresentado por Paul Erdös [12] e usa o Método Probabilístico.

Teorema 1.10 (Limitante inferior para $R(s,s)$)**.** *Se* $\binom{n}{s}2^{1-\binom{s}{2}} < 1$, *então* $R(s,s) > n \ \forall \ s, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Para mostrar que $R(s,s) = R(s) > n$ é suficiente mostrarmos que existe um 2-colorimento dos elos de K_n em que não há um K_s monocromático azul. Considere que cada elo azul ou vermelho seja colorido independentemente com probabilidade $\frac{1}{2}$ para cada cor, isto é,

$$\mathbb{P}(\text{elo ser azul}) = \mathbb{P}(\text{elo ser vermelho}) = \frac{1}{2}.$$

Sejam os eventos $E_i, \forall i \in \left\{1, \ldots, \binom{n}{s}\right\}$ que o i-ésimo K_s é monocromático (azul ou vermelho). Tem-se que

$$\mathbb{P}(E_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{s}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{s}{2}} = 2^{1-\binom{s}{2}}.$$

O evento $E = \cup_{i\in\left\{1,\ldots,\binom{n}{s}\right\}} E_i$ representa a existência de ao menos um grafo monocromático K_s e desde que os E_i são eventos disjuntos segue-se que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{Há } K_s) &= \mathbb{P}(\cup_i E_i)\\ &= \sum_i \mathbb{P}(E_i) = \binom{n}{s}2^{1-\binom{s}{2}}.\end{aligned} \tag{3}$$

Por hipótese tem-se que $\mathbb{P}(\text{Há } K_s)$ monocromático dada em (3) é menor que 1. Assim, desde que eventos complementares têm soma 1, resulta que $\mathbb{P}(\text{não há } K_s) > 0$ e a prova está completa.

□

Corolário 1.11. *Se* $s \ge 3$, *então* $R(s,s) > 2^{\frac{s}{2}}$.

Demonstração: Seja $n := \lfloor 2^{\frac{s}{2}} \rfloor$. Tem-se que

$$\begin{aligned}\binom{n}{s}2^{1-\binom{s}{2}} &\le \frac{n^s}{s!}2^{1-\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}} \le \frac{\left(2^{\frac{s}{2}}\right)^s}{s!}2^{1-\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}}\\ &= \frac{1^{1+\frac{s}{2}}}{s!} < 1 \ \forall s \ge 3.\end{aligned}$$

Problemas Propostos

Problema 1.1 (IMO 1964)**.** Dezessete pessoas comunicam-se por cartas uma com a outra (cada pessoa comunica-se com todas as outras). Em cada carta, apenas um de três assuntos distintos são tratados. Se A manda uma carta falando sobre um determinado assunto x a B, B responde esta carta falando sobre o mesmo assunto. Prove que pelo menos três pessoas escreveram uma para outra uma carta tratando do mesmo assunto.

Problema 1.2 (IMO 1978)**.** Uma sociedade internacional tem membros de 6 países diferentes. A lista de membros contém 1978 nomes, numerados $1, 2, ..., 1978$. Prove que existe pelo menos um membro cujo número é a soma dos números de dois membros de seu próprio país, ou é igual ao dobro do número de um membro de seu próprio país.

Problema 1.3 (IMO 1983)**.** Os lados de um triângulo equilátero são coloridos utilizando as cores azul e vermelha (cada lado é pintado de apenas uma cor). Existe um triângulo retângulo cujos vértices tenham a mesma cor e estejam localizados sobre os lados do triângulo equilátero?

Problema 1.4 (APMO 1990 - adaptado)**.** Um grupo de n pessoas em uma festa tem a propriedade que cada par de pessoas é considerada amiga ou inimiga. As seguintes características também são satisfeitas: ninguém é amigo de todas as pessoas, todo par de inimigos tem exatamente um amigo comum e não há um grupo de três pessoas mutuamente amigas. Prove que todas as pessoas tem o mesmo número de amigos.

Problema 1.5 (APMO 1989)**.** Seja G um grafo com n vértices e m elos. Prove que este grafo contém $\frac{m(4m-n^2)}{3n}$ ciclos de comprimento 3.

Problema 1.6 (IMO 2002 Shortlist)**.** Há 120 pessoas numa sala em que cada par de pessoas são classificadas como amigas ou estranhas. Define-se um quarteto como fraco como um conjunto de 4 pessoas onde exatamente duas são amigas. Encontre o maior número possível de quartetos fracos na sala.

Problema 1.7 (Romênia)**.** Dados n pontos no plano com quaisquer três deles não colineares, prove que existe um conjunto de pelo menos $\sqrt{n}$ pontos tal que não há três pontos no conjunto formando um triângulo equilátero.

Problema 1.8 (IMO 1991)**.** Seja G um grafo conexo com m elos. Prove que esses elos podem ser numerados com inteiros positivos $1, \ldots, m$ tais que para cada vértice com grau pelo menos dois, o máximo divisor comum entre os números dos elos incidentes neste vértice é 1.

Problema 1.9 (IMO 2005)**.** Em uma competição matemática seis problemas foram propostos aos participantes e cada dois desses problemas foram resolvidos por mais de $\frac{2}{5}$ dos competidores. Além disso, nenhum concorrente resolveu todos os seis problemas. Mostre que há pelo menos dois competidores que resolveram exatamente cinco problemas cada.

Problema 1.10 (São Petersburgo)**.** Sejam $n = 3$ e $k = 2$ inteiros positivos. Dentro de um grupo de n alunos, a cada k dias, um grupo de pelo menos dois alunos vão juntos comprar sorvete, de modo que cada par dos alunos foram juntos tomar sorvete exatamente uma vez. Prove que $k = n$.

Referências

[1] Ramsey, F. P. *On a Problem of Formal Logic* Proceedings of the London Mathematical Society, 30:264-286, 1930.

[2] Greenwood, R. E., Gleason, A. M.*Combinatorial Relations and Chromatic Graphs* Canadian Journal of Mathematics, 7:1-7, 1955.

[3] Graver J. E., Yackel J. *Some graph theoretic results associated with ramsey's theorem.* Journal of Combinatorial Theory, 4(2):125 - 175, 1968.

[4] Grinstead, C. M., Roberts S. M. *On the ramsey numbers r(3, 8) and r(3, 9)* Journal of Combinatorial Theory, Series B, 33(1):27 - 51, 1982.

[5] Junior, R. N. M. *O Princípio da Casa dos Pombos.* É matemática, Oxente! Número 9, Volume 1, Dezembro-2018.

[6] McKay, B. D., Radziszowski, S. P. *R(4, 5) = 25.* Journal of Graph Theory, 19(3):309-322, 1995.

[7] McKay, B. D., Radziszowski, S. P. *Subgraph Counting Identities and Ramsey Numbers* Journal of Combinatorial Theory. Series B. 69 (2): 193-209. doi:10.1006/jctb.1996.1741. (1997).

[8] https://www.combinatorics.org/ Acessado em 13/07/22

[9] Fomin D., Genkin S.,Itenberg V. *Mathematical circles: Russian experience* American Mathematical Society - 1996.

[10] Diniz, I. C. *O Método Probabilístico e o Lema Local de Lovász* Dissertação de Mestrado. https://doi.org/10.11606/D.45.2005.tde-20210729-141104.

[11] Souza, A. L. *Teoria dos grafos e aplicações* Dissertação de Mestrado. https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/4788.

[12] Erdös, P. (1947). Some remarks on the theory of graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.* **53**: 292-294.

2. Curiosidades

$\frac{2}{64}$: Qual a relação dessa fração com a medalha Fields?

Michele Mendes Novais
Lorena Brizza Soares Freitas
Maité Kulesza[1]

Figura 2.1: Fotografia do anverso da Medalha Fields feita por Stefan Zachow para a União Matemática Internacional.

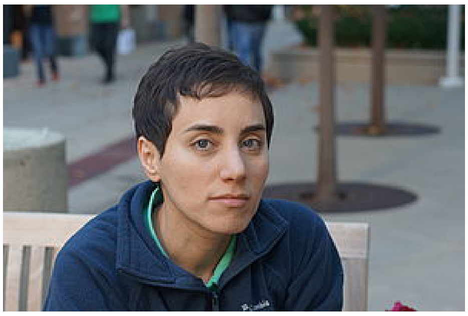
Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0c/FieldsMedalFront.jpg

Nesse texto, vamos falar de TODAS as mulheres que ganharam a medalha Fields ao longo dos seus 86 anos de existência. Mas vocês sabem o que é a medalha Fields? Pois, vamos contar um pouco sobre ela para você. Também conhecida como Medalha Internacional de Descobrimentos Proeminentes em Matemática (International Medal for Outstanding Discoveries in Mathematics), a medalha Fields é a maior honraria concedida a jovens pesquisadores matemáticos. Foi criada em 1936, pelo matemático canadense John Charles Fields com o objetivo de reconhecer e apoiar pesquisadores matemáticos com idade máxima de 40 anos. O prêmio é entregue a cada 4 anos, durante o ICM - Congresso Internacional de Matemática, promovido pela União Internacional de Matemática (IMU) para até 4 matemáticos. Além disso, é oferecida uma quantia em dinheiro que, desde 2006, tem sido de 15 mil dólares canadenses.

Em suas 20 edições, foram premiados 64 matemáticos, entre eles, duas mulheres. A primeira mulher a conquistar a Field foi a iraniana Maryam Mirzakhani, em 2014, mesma edição em que tivemos o primeiro brasileiro condecorado. Em 2022, tivemos a segunda mulher da história a receber a medalha Fields, a ucraniana Maryna Viazovska.

E agora que já sabemos um pouco sobre a medalha, que tal conhecer também sobre essas matemáticas que quebraram a barreira de gênero ao receberem esse prêmio?

Figura 2.2: Fotografia de Maryam Mirzakhani.



Fonte: https://www.mathunion.org/imu-awards/fields-medal/fields-medals-2014

Maryam Mirzakhani nasceu em 1977, em Teerã, capital do Irã. Ela começou a se interessar por matemática no Ensino Médio. Sua paixão pela área fez com que ela se tornasse a primeira mulher iraniana a ganhar uma medalha de ouro na Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) de Hong Kong em 1994. No ano seguinte, ela recebeu duas medalhas de ouro e foi a primeira pessoa do Irã a conseguir uma nota perfeita. Seu bacharelado em matemática foi obtido na Universidade Tecnológica de Sharif em Teerã. Em seguida, mudou-se para os Estados Unidos e, sob a orientação de Curtis McMullen, um medalhista Fields, a iraniana concluiu, em 2004, o doutorado em Harvard defendendo a tese "Simple Geodesics on Hyperbolic Surfaces and Volume of the Moduli Space of Curves", em tradução livre: "Geodésica Simples em Superfícies Hiperbólicas e Volume do Espaço de Moduli de Curvas". Entre 2004 e 2008, trabalhou no Clay Mathematics Institute e foi professora na Universidade de Prin-

[1]Professoras do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco

ceton. Em 2008, passou a ser professora na Universidade de Stanford. Maryam ganhou a medalha Fields em 2014 por seu trabalho em geometria complexa e sistemas dinâmicos. Sua trajetória também chama a atenção pois, após a Revolução Islâmica no Irã, em 1979, a educação nesse país foi separada por gêneros e, como consequência, as meninas passaram a receber uma educação mais precária. Por isso, sua premiação se torna ainda mais admirável e serve de inspiração para meninas e mulheres de todo o mundo. Infelizmente, em 2017, aos 40 anos, Maryam faleceu ainda muito jovem, vítima de um câncer de mama.

Figura 2.3: Fotografia de Maryna Viazovska feita por Matteo Fieni para a União Matemática Internacional.

Fonte: https://www.mathunion.org/imu-awards/fields-medal/fields-medals-2022

Nossa segunda medalhista Fields, Maryna Viazovska nasceu em 1984 em Kiev, capital da Ucrânia e estudou, desde os 14 anos, em uma escola especializada em ciências exatas e tecnologia para alunos de alto desempenho: o Natural Science Lyceum. Durante esse tempo, Viazovska participou de várias olimpíadas regionais. Em uma das competições nacionais, que selecionava os 12 melhores participantes para formar a equipe de 6 membros da IMO ficou em 13º lugar nacional. Ao terminar o Ensino Médio em 2001, iniciou a graduação em matemática na Universidade Nacional Taras Shevchenko de Kiev. Durante a graduação foi premiada diversas vezes no Concurso Internacional para Estudantes Universitários. Ela obteve mestrado pela Universidade de Kaiserslautern em 2007 e doutorado (Dr. rer. Nat.) pela Universidade de Bonn em 2013. Sua tese de doutorado, "Modular Functions and Special Cycles" (tradução livre: "Funções Modulares e Ciclos Especiais"), trata da teoria analítica dos números e foi orientada por Don Zagier e Werner Müller. Desde janeiro de 2018, ela ocupa a Cátedra de Teoria dos Números como professora titular na École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL) na Suíça, após um curto período como professora assistente permanente. Foi a resolução do centenário problema de empacotamento optimal de esferas de dimensão 8, e em colaboração com alguns colegas, na dimensão 24 que lhe rendeu a medalha Fields. Maryna levou 13 anos resolvendo esse problema e recebeu o prêmio numa cerimônia na Finlândia, lamentando as diversas pessoas mortas e exiladas do seu país por causa da guerra que a Rússia trava com a Ucrânia.

Agora, por que temos tão poucas mulheres a conquistar essas medalhas? E por que tivemos duas medalhas em um curto espaço de tempo? Não temos a resposta precisa para essas perguntas, mas temos pistas que nos ajudam a entender porque ainda somos tão poucas. Uma delas já foi citada pela professora Christina Brech no artigo ([1]): "O ambiente é masculino porque somos poucas, ou somos poucas porque o ambiente é masculino?" De fato, os casos de sucesso só confirmam a regra. No nosso artigo ([6]) e na última coluna "Curiosidades" ([7]) aqui no Oxente também trouxemos alguns fatores que influenciam essa diferença. O que já se sabe é que demoramos a ter acesso a espaços de educação e científicos e, mesmo após conquistar esses espaços, ainda precisamos superar a invisibilidade a que somos submetidas. Daí a importância de trazermos à tona a trajetória dessas mulheres e de estimular a entrada de mais meninas e mulheres na nossa área, bem como de buscar condições para que elas possam se manter nas carreiras.

Referências

[1] BRECH, Christina O "dilema Tostines" das mulheres na Matemática. Revista Matemática Universitária, 54, 2018. Disponível em <https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018

/08/kika_final.pdf>.Acesso em 8 de Agosto de 2022.

[2] Quem é a matemática Maryna Viazovska, 2ª mulher a levar a Medalha Fields. 06 de julho de 2022. Disponível em <https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/noticia/2022/07/quem-e-matematica-maryna-viazovska-2-mulher-levar-medalha-fields.html>. Acesso em: 8 de Agosto de 2022.

[3] FABRO, Nathalia Conheça Maryam Mirzakhani, primeira mulher a receber o maior prêmio da matemática. 22 de agosto de 2019. Disponível em <https://revistagalileu.globo.com/Sociedade/noticia/2019/08/conheca-maryam-mirzakhani-primeira-mulher-receber-o-maior-premio-da-matematica.html>. Acesso em: 8 de Agosto de 2022.

[4] KLARREICH, Erica A Tenacious Explorer of Abstract Surfaces. 12 de agosto de 2014. Disponível em <https://www.quantamagazine.org/maryam-mirzakhani-is-first-woman-fields-medalist-20140812/>. Acesso em: 8 de Agosto de 2022.

[5] KLARREICH, Erica. et al. In Times of Scarcity, War and Peace, a Ukrainian Finds the Magic in Math. 5 de julho de 2022. Disponível em <https://www.quantamagazine.org/ukrainian-mathematician-maryna-viazovska-wins-fields-medal-20220705/>. Acesso em: 8 de Agosto de 2022.

[6] FREITAS, Lorena Brizza Soares. et al. A OPEMAT como ponto de partida para falar da sub-representatividade feminina na Matemática. É Matemática, Oxente!, Recife, v. 1, n. 22/especial, p. 7-13, abr. 2022. Disponível em <http://ematematicaoxente.com.br/wp-content/uploads/2022/04/jornal_22ed.pdf>. Acesso em: 8 de Agosto de 2022.

[7] FREITAS, Lorena Brizza Soares. et al. Contribuições de mulheres para a matemática. É Matemática, Oxente!, Recife, v. 1, n. 23, p. 10-12, jun. 2022. Disponível em <http://ematematicaoxente.com.br/index.php/edicao-atual/>. Acesso em: 8 de Agosto de 2022.

3. Entrevista

Nesta seção trazemos uma entrevista com a Professora Doutora Miriam Pereira da Universidade Federal da Paraíba que vai nos contar um pouco sobre a experiência de participar da cerimônia de premiação da Medalha Fields deste ano, na qual tivemos a premiação da matemática ucraniana Maryna Viazovska. Acreditamos que esta entrevista complementará o tema abordado na curiosidade bem como trará uma visão da Profa. Miriam sobre o mesmo.

Figura 3.1: Delegação brasileira na assembléia da IMU

(1) *Como você participou da cerimônia de premiação? Como foi o processo para essa sua participação?*

Eu recebi o convite, via e-mail, enviado pela Profa. Jaqueline Mesquita, atual vice-presidente da Sociedade Brasileira de Matemática. O convite era para participar da Delegação Brasileira na Assembléia Geral da IMU. Além disso, os delegados foram gentilmente convidados para assistir a cerimônia de entrega da Medalha Fields e das palestras que seriam proferidas pelos laureados.

(2) *Como você se sentiu estando presente num momento tão importante (premiação da segunda mulher) para as mulheres e matemáticas?*

Foi um privilégio muito grande poder participar deste momento. Sabemos que a Matemática ainda é um ambiente predominantemente masculino e que muita movimentação tem sido feita para mudar esta realidade. Apesar de avanços, como por exemplo, a inclusão da Licença Maternidade no currículo Lattes, há muito o que se avançar. Neste sentido, acredito que uma das contribuições de ver uma mulher laureada é o exemplo para a nova geração. Vendo que é possível, que há mulheres produzindo matemática de alta qualidade pode inspirar meninas a decidir pela carreira matemática. Deste modo, estar presente num momento tão significativo foi realmente muito emocionante.

(3) *O que você pode elencar de mais interessante que ocorreu na cerimônia? E o porquê disso ter chamado a sua atenção?*

Há diversos aspectos interessantes que estão relacionados a eventos como estes. Inicialmente, você perceber um pouco da engenhosidade usada pel@s matemátic@s para resolver determinados tipos de problema. É claro que muitos detalhes não ficam claros para a audiência, mas a forma como os problemas são apresentados para assembleia é algo muito interessante. Paralelo a isso, é interessante destacar que a pesquisadora Maryna Viazovska é ucraniana e sabemos que neste momento este país está em guerra com a Rússia. No seu vídeo de apresentação ela começa com a seguinte frase: "Whenever we have something good in our life, often we take that for granted. And peaceful is what I always took for granted. And now I understand how wrong I was about that." Esta frase me emocionou muito e lembra que a matemática não é uma ciência morta e sem corpo. Quem faz matemática são pessoas e o trabalho destas pessoas é diretamente afetado pela realidade na qual elas estão inseridas. Para mim, foi uma fala extremamente marcante.

(4) *Como você avalia o prêmio e o fato de termos tão poucas mulheres premiadas ao longo dos anos?*

Sabemos que a medalha Fields é o reconhecimento da comunidade matemática para trabalhos de reconhecido mérito acadêmico. Dessa forma, para que os resultados de algum@ pesquisador@ de uma pessoa seja considerad@, el@ precisa ser conhecido e divulgado. Ao longo da história o trabalho de muitas mulheres acabaram sendo invisibilizados ou mesmo publicados ou apresentados como se fossem de autoria de outra pessoa.

Acredito que a diferença entre o número de homens e mulheres lauread@s reflete o quão séria é a questão da desigualdade de gênero dentro da Matemática e, de maneira mais geral, dentro das grande área das Ciências Exatas. Um painel com a foto de todos os laureados no decorrer dos anos, é uma forte evidência de quanto a matemática ainda reflete as desigualdades existentes na sociedade moderna, não apenas a de gênero.

(5) *Como você avalia a premiação da segunda matemática a receber essa honraria?*

É um grande mérito da laureada conseguir o reconhecimento merecido por todo seu trabalho na matemática. Por outro lado, acho que é importante que toda a comunidade matemática reflita sobre esta diferença expressiva entre o número de homens e mulheres lauread@s e que esta seja uma oportunidade para proposições de ações para minimizar as desigualdades existentes em nossa sociedade que a comunidade matemática tende a refletir.

(6) *O que poderia ser feito para melhorar essa representatividade (de mulheres matemáticas)?*

Sinto que os primeiros passos já estão sendo dados. A primeira coisa é pautar a discussão. Até muito recentemente, da perspectiva histórica, apesar do ativismo de diversas mulheres matemáticas, era muito difícil pautar esta questão na academia. Hoje, vemos editais específicos financiando projetos que estimulam a participação de meninas nas ciências, a maioria das Sociedades Científicas internacionais e nacionais têm comitês que tratam de questões relacionadas à questão de gênero e diversidade dentro da comunidade matemática. Acredito que estas conquistas são ecos do trabalho silencioso feito por muitos anos por mulheres matemáticas.

Porém, sabemos que em muitas outras questões a realidade não mudou muito. Durante a pandemia da COVID-19 estudos mostram que a produtividade afetou de forma diferente a população. Resultados obtidos por pesquisa realizada pela Parent in Science revelam que, em relação à produtividade acadêmica, mulheres negras e mulheres brancas com filhos são os grupos mais afetados pelos efeitos da pandemia. É preciso entender quais as razões que estão por trás destes dados e traçar estratégias a curto, médio e longo prazo para minimizar estes efeitos.

(7) *Qual a importância para o Brasil, para o Nordeste e para você nesta participação?*

O Brasil é um país que compõe o Grupo V da IMU cujos países que fazem parte produzem matemática com excelência reconhecida a nível internacional. Fazer parte deste grupo comprova o excelente trabalho desenvolvido pelos cientistas brasileiros que em sua maioria trabalham em universidades públicas e o alto grau de comprometimento e seriedade dos nossos profissionais.

Poder representar a região nordeste juntamente com o professor Yuri Lima (UFC) atesta que o país numa reunião tão importante é uma honra e um desafio.

Do ponto de vista simbólico, estar na Assembléia Geral da IMU e na cerimônia de entrega da Fields é muito representativo. Primeiro porque como já comentamos, mulheres na matemática são minoria. Se fazemos intersecção com gênero, mulheres negras na matemática estão em menor número ainda. Desta forma, foi extremamente representativo e mostra que as discussões que se têm feito dentro da academia sobre esta temática têm surtido algum efeito.

(8) *Quais os impactos oriundos de sua participação na cerimônia de premiação?*

Foi uma oportunidade excelente para entender melhor o funcionamento da IMU e das ações realizadas por esta importante sociedade. Além disso, conversar com matemáticos de diferentes partes do mundo, poder ter um pouco de contato com os desafios e conquistas alcançadas foi enriquecedor. Além disso, uma das coisas mais importantes para mim foi a representatividade. Acredito que muitas alunas que me viram participando do evento, puderam se imaginar também. E, de certa forma, isso é importante para avançarmos no campo da diversidade na matemática, já que você não pode se imaginar num lugar onde não vê pessoas parecidas com você.

4. Indicações de Leituras/Filmes

Escritores da Liberdade

Christiana Granja do Nascimento[2]

A indicação de filme desta edição fica por conta do longa-metragem Escritores da Liberdade (2007).

[2]Licencianda do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco

Tal obra relata a história verídica da professora Erin Gruwell, recém formada, cujo primeiro contato no ambiente escolar é acometido com diversos desafios ao se deparar com uma turma de alunos famosa por seus problemas intrínsecos socioeconômicos. Durante o filme é inspirador ver a paixão, dedicação e esforço da professora Gruwell na busca de entender os alunos diante de suas individualidades e necessidades, visando meios e modos de transmitir o conhecimento através de experiências vivenciadas no cotidiano dos estudantes, visto que os mesmos se encontram descrentes quanto a necessidade de estudar inglês e literatura no cenário violento, e de grandes conflitos raciais. Mas o que então isso tem em comum com a Matemática?

Nós enquanto professores e futuros professores de Matemática já paramos para nos questionar qual o motivo do número tão significativo de alunos relatarem não gostar da disciplina de Matemática? Qual seria o motivo de matérias que utilizam conhecimentos matemáticos como Física ou Química serem igualmente desprezadas durante a vivência escolar dos alunos? Por qual motivo não vemos um alto número de insatisfação por parte de matérias do eixo de humanas ou linguagens? Bom, ao ouvir diversos relatos de alguns estudantes ou até mesmo após a leitura de alguns artigos e dissertações sempre vemos algumas respostas recorrentes tais como: ?Não consigo entender o modo como meu professor repassou o conteúdo?, ?Qual a finalidade de aprender isto? Irei usar isso ao longo da minha vida??, e por fim a mais frequente das respostas ?Matemática é muito difícil, não gosto desta matéria!?.

A história de Gruwell é bem parecida com esse cenário vivenciado por nós atuais/futuros educadores, onde os estudantes do filme a questionavam sobre o propósito de aprender ou ler livros de literatura inglesa se não iriam usar isso dentro de sua vivência no mundo das gangues. Esse momento é onde entra a inspiração, perseverança e dedicação em ser um Educador, e assim como Descartes menciona em suas obras ser um paidagogo, em ser um alguém não detentor supremo de sabedoria, mas um guia que juntamente com o aluno encontra o saber almejado. Interessante, esta reflexão pois muitas vezes durante a graduação nos deparamos com a dificuldade em dominar tantos conhecimentos, lemas, teoremas e definições matemáticas e nos esquecemos muitas vezes que tais aprendizados virão a ser repassados para os nossos futuros discentes e será que estaremos de fato preparados? Ou será que viremos a ser mais um membro da estatística enorme de professores de matemática cujas aulas foram tidas como chatas ou desinteressantes?

Referências

[1] PACHECO, V. Desafios da Ensino/Aprendizagem Matemática. X Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2009.

[2] PAGNI, P.; SILVA, D.; BROCANELLI, C. Introdução à filosofia da educação. Tradução. São Paulo: Avercamp, 2007.

5. Quem pergunta, quer saber!

Revista do Professor de Matemática (RPM, no 61, p.60-61)

Por Severino Barros de Melo[3]

Nessa edição voltamos a visitar a Revista do Professor de Matemática (RPM, no 61, p.60-61), transcrevendo um diálogo interessante entre um leitor e um consultor da RPM. O leitor aborda uma situação frequente, aparentemente simples, mas que merece nossa atenção na hora de fazer as contas. Inicialmente a revista faz um resumo da carta: " uma preocupação manifestada pelo leitor Nelson O.F. Correa é a identificação dos números naturais com os inteiros positivos e, como exemplo, dá a definição de multiplicação como uma soma de uma mesma parcela um certo número de vezes. Definição esta que perde o sentido no caso de multiplicação de números negativos. Considera que esse fato

[3]Professor do Departamento de Educação da UFRPE

invalida a identificação dos inteiros positivos com os naturais e apresenta como um outro exemplo, que refletiria bem o que chama de incoerência dessa identificação, a necessidade de se convencionar que a raiz de índice par de um número deva ser sempre positiva. Conta que pensa nessa incoerência desde que leu que em potência de potência multiplicam-se os expoentes. E levanta a dúvida quanto ao valor da expressão $\{[(-3)^2]^{\frac{1}{2}}\}^{-1}$ que se calculada de uma forma, daria $\dfrac{1}{3}$ e, pelo produto dos expoentes daria $-\dfrac{1}{3}$."

Em seguida a RPM esclarece a dúvida: " O leitor tem razão quando afirma que a expressão número de vezes não faz sentido quando esse número é negativo. Não faz sentido para qualquer número real não natural. Com efeito, em $\sqrt{2} \times \pi$ o que seria somar $\sqrt{2}$ ou π vezes? O fato é que, quando se generaliza algum conceito, usualmente, conservam-se algumas propriedades e perdem-se outras. Por isso, novas definições precisam ser apresentadas e suas propriedades precisam ser revistas no novo contexto. Algumas delas permanecem, outras deixam de valer.

Quanto às raízes, é preciso lembrar que qualquer número, positivo ou negativo que elevado à potência n resulte A se diz uma raiz de ordem n de A. O **símbolo** $\sqrt[n]{A}$ é que indica só a raiz positiva. Então, no caso de $A > 0$ e n par, os números $\pm\sqrt[n]{A}$ são, ambos, raízes n-ésimas de A. Assim, nesse contexto, $+3$ e -3 são raízes quadradas de 9, mas o símbolo $\sqrt{9}$ representa apenas o $+3$. Quanto à propriedade do produto dos expoentes na potência de potência, ela é um exemplo do que dissemos acima: essa regra vale para potências com base positiva, mas não se estende, em geral, para bases negativas. O valor da expressão acima é, de fato, $\dfrac{1}{3}$, pois o cálculo deve ser feito diretamente, na ordem em que aparecem as potências. Não há incoerência porque a regra do produto dos expoentes não é válida para a base -3 que é negativa."

6. Eventos

- **Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacionais (CNMAC) 2022**
  - Local: Unicamp
  - Data: 26 a 30 de setembro de 2022
- **XXII Semana da matemática e XII semana da estatística**
  - Local: Universidade Federal de Uberlândia
  - Data: 03 a 08 de outubro de 2022
- **IV Congresso de Jovens Pesquisadores em Matemática Pura, Aplicada e Estatística**
  - Local: Universidade Federal da Paraíba (UFPB), Campus I - João Pessoa – PB
  - Data: 05 a 07 de outubro de 2022
- **Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional**
  - Local: Universidade Federal do Espírito Santo
  - Data: 19 a 21 de outubro de 2022
- **VI ENAPHEM - Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática**
  - Local: Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC - Florianópolis)
  - Data: 09 a 11 de novembro de 2022
- **5º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática**
  - Local: UFSM- Santa Maria, RS
  - Data: 04 a 06 de novembro de 2022
- **V Colóquio de Matemática da Região Nordeste**

- Local: Universidade Federal da Paraíba – João Pessoa PB
- Data: 07 a 11 de novembro de 2022

7. Problemas

Para concluir, convidamos o leitor a responder alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Problema 1. Uma determinada colônia de bactérias se prolifera de tal maneira que a superfície que ela ocupa em uma lâmina de microscópio dobra de tamanho a cada 10 min. Após exatamente duas horas de observação, toda a superfície desta lâmina está coberta pela colônia. O tempo necessário para que a colônia cobrisse $\frac{2}{5}$ da lâmina foi entre

(a) 10 min e 15 min;

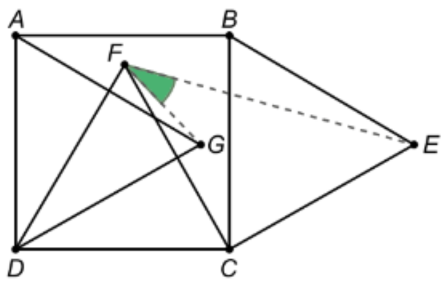
(b) 30 min e 1 h;

(c) 1h e 1h e 30 min;

(d) 1h e 40 min e 1h e 50 min;

(e) 1h e 58min e 1h e 59 min.

Problema 2 (17ª OBMEP - 1ª FASE- Nível 2)**.** Na figura, $ABCD$ é um quadrilátero e AGD, BEC e CDF são triângulos equiláteros. Quanto mede o ângulo GFE?



a) $15°$

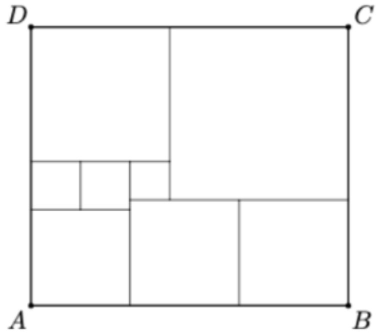
b) $22,5°$

c) $30°$

d) $36°$

e) $45°$

Problema 3 (OCM - 2021 Nível 3)**.** O retângulo $ABCD$ foi dividido em vários quadrados, como na figura. Sabe-se que o lado AB mede 16. Qual o comprimento do lado AD?



a) $\frac{29}{2}$

b) 12

c) $\frac{105}{8}$

d) 17

e) $\frac{61}{4}$.

Enviem as soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, o envio deve ser realizado até **02/12/2022**.

8. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n. 21, Abril de 2022**.

Problema 1 (XXX OMU - 2014)**.** A soma de dois números naturais é 145. Dividindo-se o maior pelo menor o quociente é 5 e o resto 7. Quais são os números?

Solução. Vamos denotar por x e por y esses dois números naturais, com $y > x$. Desse modo, temos:

$$x + y = 145$$

$$y = 5x + 7.$$

Efetuando as substituições, temos:

$$x + 5x + 7 = 145 \iff 6x = 138 \iff x = 23.$$

Finalmente, substituindo $x = 23$ na segunda equação, obtemos $y = 122$. □

Problema 2 (OCM-2021 Nível)**.** "Pedra, papel e tesoura" é o nome de jogo disputado por dois participantes onde cada um escolhe (secretamente) um dos objetos dentre pedra, papel e tesoura. Depois, o objeto que cada um escolheu é revelado. Se ambos escolheram o mesmo objeto então o resultado é um empate. Se um escolhe pedra e o outro tesoura, ganha quem escolheu pedra, pois (segundo o jogo) "a pedra amassa a tesoura". Se um escolhe tesoura e o outro papel, quem escolheu tesoura ganha, pois tesoura corta o papel. Por fim, se um escolhe papel e o outro pedra, ganha quem escolheu papel, pois papel cobre a pedra.

Marília e João disputam "Pedra, papel e tesoura" por três rodadas, sendo que houve um empate e cada um venceu uma vez. Nas três rodadas,

Marília escolheu o mesmo objeto. Sobre as três escolhas de João, podemos afirmar corretamente que:

a) João escolheu o mesmo objeto duas vezes.

b) João escolheu o mesmo objeto três vezes.

c) João escolheu três objetos distintos.

d) João escolheu pedra na primeira rodada.

e) João escolheu papel na última rodada.

Solução. Sabe-se que Marília escolheu o mesmo objeto nas três rodadas e que houve empate em uma e cada um venceu uma vez. Sendo assim, temos as seguintes possibilidades:

Marília	João
Pedra	Pedra
Pedra	Tesoura
Pedra	Papel

Marília	João
Papel	Papel
Papel	Pedra
Papel	Tesoura

Marília	João
Tesoura	Tesoura
Tesoura	Papel
Tesoura	Pedra

Logo, em qualquer uma das situações possíveis, João escolheu três objetos distintos e assim a alternativa correta é a letra c) □

Problema 3 (Coletânea de problemas- Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 7, Setembro 2008)**.** A mãe de Ana Margarida vende doces e pediu-lhe que embrulhasse 2003 bombons de 5 cores diferentes em pacotes com 3 de forma que em cada pacote os bombons fossem da mesma cor. Como recompensa prometeu-lhe que poderia comer os que restassem quando já não fosse possível fazer mais embrulhos. Sabendo que dos 2003 bombons, 388 eram brancos, 396 amarelos, 406 verdes, 405 vermelhos e 408 castanhos, quantos bombons pôde a Ana Margarida comer e de que cor eram?

Solução. Sabemos que dos 2003 bombons, 388 eram brancos, 396 amarelos, 405 vermelhos, 406 verdes e 408 castanhos. Como $396, 405$ e 408 são múltiplos de três, não sobraram bombons amarelos, vermelhos e castanhos. Mas, como $388 = 129 \cdot 3 + 1$, $406 = 135 \cdot 3 + 1$, sobrou-lhe um bombom branco e um verde. Então Ana Margarida comeu dois bombons, um branco e um verde.

□