É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 23, volume 1, Junho de 2022

ISSN 2526-8651

Editorial

Caros Leitores,

É com satisfação que lhes oferecemos o número 23 do nosso jornal, É Matemática, Oxente!.

No intervalo entre o número anterior, marcado pela comemoração dos 5 anos do jornal, e esta edição, foi possível constatar - e isto nos estimula - a importância do nosso trabalho para além do objetivo olímpico. De fato, até mesmo estudantes do curso de matemática têm acessado nosso banco de edições em busca de uma variedade de temas que servem de subsídios para as diversas disciplinas que estão cursando.

Ainda sobre as comemorações dos 5 anos, vale destacar que o evento ocorreu nos dias 28 e 29 de abril no qual tivemos a realização da palestra intitulada Aplicando Pick em questões de Olimpíadas proferida pela Profª Dra. Jacqueline Rojas, a realização do minicurso de Introdução ao LATEX: Como se tornar um colaborador do "É Matemática, Oxente!" e da oficina Matemática e arte por meio das obras do artista Escher, desenvolvidos, respectivamente, pelo Prof. Me. Reginaldo Junior (IFPB) e pelo Prof. Dr. Renato Diniz e o discente Allan dos Santos. Além disso, apresentamos, com a participação dos docentes Prof. Dr. Carlos Gomes (UFRN), Prof. Dra. Elaine Silva (UFAL) e Prof. Dra. Michele Novais (UFRPE), uma mesa-redonda sobre os Desafios e Perspectivas das Olimpíadas Regionais coordenadas por tais docentes, a saber, Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte (OMRN), Olimpíada Alagoana de Matemática (OAM) e Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT).

Na presente edição a seção artigo oferece um trabalho intitulado Recorrências Lineares, tema frequente nas olimpíadas de matemática.

A seção Curiosidade aborda um assunto cada vez mais atual; ou seja, as Contribuições das Mulheres para a Matemática, que faz um link com o artigo da nossa edição comemorativa dos 5 anos do nosso jornal. A indicação de leitura apresenta ao nosso público o livro A vida misteriosa dos matemáticos, obra de um matemático brasileiro reconhecido internacionalmente.

A seção Quem pergunta, quer saber!, aproveitando a cruel invasão da Ucrânia, e a existência de outros focos de guerra, apresenta uma resposta do matemático alemão Albrecht Beutelspacher à seguinte pergunta: a matemática é uma ciência bélica?

Na penúltima seção trouxemos os enunciados e as resoluções da OPEMAT 2021, nível 1, da nossa tão querida olimpíada estadual.

A última parte da presente edição é dedicada, como sempre, às questões propostas e resolvidas, fruto da contribuição dos nossos leitores.

Agradecemos mais uma vez a todos/as que nos ajudaram na elaboração dos conteúdos e na divulgação do nosso jornal. Não é demais ressaltar que temos um canal sempre aberto para a comunicação e contribuição dos nossos leitores.

Boa leitura!

Sumário

1. Artigo

Recorrências Lineares

Hellen Priscila de Souza Santos e Yane Lísley Ramos Araújo
UFRPE- CEGEN - Departamento de Matemática
Campus Recife
(52171-900) - Recife-Pernambuco - Brasil

Introdução

A sequência de Fibonacci é um conteúdo abordado comumente em problemas de provas olímpicas. Estudada pelo matemático italiano Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, a sequência de Fibonacci foi descrita pela primeira vez no ano de 1202 no livro Liber Abaci, como consequência de um problema sobre a população de coelhos. O que torna essa sequência mais interessante é a diversidade de locais na natureza em que ela aparece, como: as folhas de árvores, nas pétalas de rosas, nos frutos, etc. As relações que surgem ao trabalharmos com este tema são classificadas como recorrências lineares. Além desta sequência, outras sequências conhecidas também surgem ao utilizar as recorrências lineares são elas: a dos números ímpares, a progressão aritmética, a progressão geométrica, entre outras. Apresentaremos nesse artigo o que são as recorrências lineares de 1ª e 2ª ordem, assim como suas implicações, métodos de resolução e consequências; dando ênfase às suas aplicabilidades nas resoluções de questões olímpicas principalmente em problemas envolvendo as sequências de Fibonacci. O objetivo deste artigo é instigar a percepção dos leitores a desenvolver estratégias de resolução de problemas com o uso do raciocínio recursivo juntamente com o emprego das propriedades das recorrências.

Conceitos e Exemplos

Nesta seção definiremos as recorrências lineares que nada mais são que sequências numéricas definidas de maneira recursiva.

Definição 1.1 (Sequências)**.** Uma sequência x_n de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Denotamos a imagem $x(n)$ por x_n a qual denominamos de termo geral.

Definição 1.2 (Recorrências)**.** Dizemos que uma sequência (x_n) é dada por uma relação de recorrência se existem condições iniciais que determinam o primeiro elemento da sequência e uma regra que permitirá determinar os próximos termos em função dos antecessores.

Podemos classificar as sequências recorrentes quanto à ordem, à linearidade e ao termo independente. A ordem nos dá o número de termos anteriores de quem o termo geral depende. Quanto à linearidade dizemos que uma recorrência é linear quando o expoente dos termos anteriores do termo geral são todos iguais a 1, e caso contrário dizemos que a recorrência é não linear. Quanto a presença ou não de termos independentes classificamos as recorrências em não-homogêneas e homogêneas, respectivamente.

Assim, definimos:

Definição 1.3 (Recorrência Linear de 1ª Ordem)**.** Uma relação de recorrência é dita linear de 1ª ordem se ela for expressa da forma

$$x_{n+1} = g(n)x_n + f(n)$$

com $g, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Em outras palavras em uma recorrência linear de 1ª ordem cada termo da sequência é obtido por uma relação do seu termo imediatamente anterior (com expoente igual a 1). Se $f(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, teremos uma recorrência homogênea. Caso contrário ela será não-homogênea.

Exemplo 1.1. Considere a sequência

$$(2, 5, 8, 11, ..., a_n, ...).$$

Conjecture uma fórmula por recorrência para o n-ésimo termo dessa sequência.

Solução: Como sabemos, as fórmulas por recorrência precisam se referenciar no termo anterior, assim temos:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 5 = 2 + 3 = a_1 + 3$$

$$a_3 = 8 = 5 + 3 = a_2 + 3.$$

Nesse caso, é fácil ver que $a_{n+1} = a_n + 3$. □

Além da recorrência linear de 1ª ordem, tem-se também a recorrência linear de 2ª ordem, vamos agora apresentar a sua definição e alguns exemplos.

Definição 1.4 (Recorrência Linear de 2ª Ordem)**.** Uma recorrência linear de 2ª ordem é uma recorrência da forma

$$x_{n+2} + g(n)x_{n+1} + f(n)x_n + h(n) = 0$$

onde $g, f, h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $f(n)$ nunca se anula.

Em outras palavras em uma recorrência linear de 2ª ordem cada termo da sequência é obtido por uma relação envolvendo seus dois termos anteriores (ambos com expoente igual a 1). Quando $h(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, a recorrência é dita homogênea. Caso contrário ela é dita não-homogênea.

Exemplo 1.2 (OBMEP-2005 - 2ª Fase - Nível 3)**.** A sequência $(0, 3, 7, 10, 14, 17, 21, ...)$ é formada a partir do número 0 somando-se alternadamente 3 ou 4 ao termo anterior.

$$0 \xrightarrow[+3]{} 3 \xrightarrow[+4]{} 7 \xrightarrow[+3]{} 10 \xrightarrow[+4]{} 14 \ldots$$

a) Escreva os 20 primeiros termos dessa sequência.

b) Qual é o 1000º termo da sequência?

c) Algum termo desta sequência é igual a 2000? Por quê?

Solução: a) Note que a sequência é uma recorrência de 1ª ordem, assim temos que

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 3 = x_0 + 3$$

$$x_2 = 7 = x_1 + 4$$

$$x_3 = 10 = x_2 + 3$$

$$x_4 = 14 = x_3 + 4$$

$$x_5 = 17 = x_4 + 3.$$

Seguindo esse raciocínio chegamos que os 20 primeiros termos dessa sequência são 0, 3, 7, 10, 14, 17, 21, 24, 28, 31, 35, 38, 42, 45, 49, 52, 56, 59, 63, 66.

b) Observe que utilizando recorrência, podemos separar a sequência da seguinte maneira, a primeira sequência seria $(0, 7, 14, 21, ...)$ e a segunda $(3, 10, 17, ...)$.
Seja $n \in \mathbb{N}$, temos assim que o termo geral da 1ª sequência é $x_n = 7n$ e o da 2ª sequência é dado por $x_n = 7n + 3$.
Daí, a primeira é composta por termos de índices ímpares e a segunda é formada por termos de índices pares. Como queremos o 1000º

termo, utilizaremos a 2ª sequência. Note também que o 1000º termo da nossa sequência principal é o 499º termo da nossa 2ª sequência, daí:

$$x_0 = 7 \cdot 0 + 3 = 3$$

$$x_1 = 7 \cdot 1 + 3 = 10$$

$$\vdots$$

Assim, encontramos que

$$x_{499} = 7 \cdot 499 + 3 = 3496.$$

c) Para 2000 ser um termo da sequência temos que uma das duas equações deve ser satisfeita $2000 = 7n$ e $2000 = 7n + 3$. No entanto, vemos que não existe n natural que satisfaça estas equações. Portanto, nenhum termo dessa sequência é igual a 2000.

□

Um dos exemplos mais comuns envolvendo a recorrência linear de 2ª ordem, é o problema de Fibonacci.

Exemplo 1.3 (O Problema de Fibonacci)**.** Um homem colocou um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Deseja-se saber quantos pares de coelhos terá no mês n considerando-se as restrições:

- No primeiro mês nasce apenas um casal;
- Casais amadurecem e reproduzem apenas após o segundo mês de vida;
- Todos os meses, cada casal fértil dá a luz a um novo casal;
- Os coelhos nunca morrem.

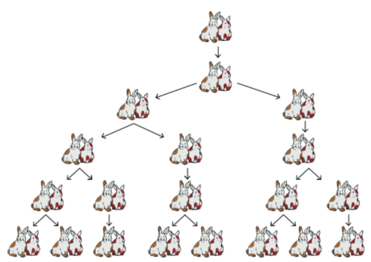


Figura 1.1: Esquema de nascimento de coelho

Solução: Considerando x_1 o mês inicial, no fim do primeiro mês x_2, no fim do segundo mês x_3 e, de modo geral no fim n-ésimo mês x_{n+1}. Temos então que $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$,... no fim de $(n+1)$-ésimo mês, o número de coelhos é dado pela quantidade de casais adultos no fim do n-ésimo mês acrescida do número de casais já adultos no $(n-1)$-ésimo mês, ou seja,

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n.$$

Assim $x_4 = x_3 + x_2 = 3$, $x_5 = x_4 + x_3 = 5$,... Daí

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 5, \ldots$$

Essa sequência é denominada *Sequência de Fibonacci.* □

De maneira geral, podemos definir:

Definição 1.5 (Recorrência Linear de Ordem k)**.** Uma recorrência de ordem k é dita linear se existem funções $f, g_1, ..., g_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$x_{n+k} = g_1(n)x_{n+k-1} + ... + g_k(n)x_n + f(n).$$

Se $f(n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, temos que a **recorrência é linear homogênea**, caso contrário é dita que a **recorrência é linear não-homogênea**.

Exemplo 1.4. A recursão de primeira ordem que define a progressão aritmética de razão $r \neq 0, x_{x+1} = x_n + r$ é linear não homogênea ao passo que a recorrência de segunda ordem $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ que define a sequência de Fibonacci é linear homogênea.

Iremos agora apresentar alguns resultados envolvendo as recorrências lineares, alguns destes resultados são métodos que nos permitem encontrar o termo geral de uma dada recorrência, o que é extremamente útil, principalmente, nas resoluções de questões olímpicas.

Métodos de Resolução

1. *Método da multiplicação membro a membro*

   Considere uma recorrência linear homogênea de primeira ordem $x_{n+1} = g(n)x_n$. É possível escrever x_n em função de n, observe:

$$x_2 = g(1)x_1$$

$$x_3 = g(2)x_2$$

$$\dots$$

$$x_n = g(n-1)x_{n-1}.$$

   Multiplicando membro a membro obtemos,

$$x_2...x_{n-1}x_n = g(1)...g(n-1)x_1x_2...x_{n-1}.$$

   Dessa forma, segue que

$$x_n = g(1)...g(n-1)x_1.$$

   Exemplo 1.5. Considere a recorrência $x_{n+1} = 2x_n, x_1 = 2$. Aplicando substituições sucessivas, temos que

$$x_2 = 2x_1$$

$$x_3 = 2x_2 = 2(2x_1) = 2^2x_1$$

$$...$$

$$x_n = 2x_{n-1} = 2(2^{n-2}x_1) = 2^{n-1}x_1,$$

   e, como $x_1 = 2$,

$$x_n = 2^{n-1}2 = 2^n.$$

2. *Método da Soma Telescópica*

   Seja a recorrência linear não-homogênea de primeira ordem da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$, de maneira semelhante $x_{n+1} - x_n = f(n)$

$$x_2 - x_1 = f(1)$$

$$x_3 - x_2 = f(2)$$

$$...$$

$$x_n - x_{n-1} = f(n-1).$$

   Somando as igualdades membro a membro, temos

$$(x_2 - x_1) + ... + (x_n - x_{n-1}) = f(1) + ... + f(n-1),$$

   ou seja,

$$\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k),$$

   resultando,

$$x_n - x_1 = \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

   Assim,

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Exemplo 1.6. Considere a recorrência $x_{n+1} = x_n + 2^n$, com $x_1 = 1$. Tem-se

$$x_2 - x_1 = 2$$

$$x_3 - x_2 = 2^2$$

$$...$$

$$x_n - x_{n-1} = 2^{n-1}.$$

Ao somarmos estas igualdades membro a membro, obtemos:

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k.$$

Daqui e da fórmula da soma finita dos termos de uma progressão geométrica, temos que

$$x_n = x_1 + 2^n - 2.$$

Como $x_1 = 1$, segue que

$$x_n = 2^n - 1.$$

O resultado a seguir nos garante que qualquer recorrência linear não-homogênea, de primeira ordem, pode ser transformada em uma recorrência da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$.

Teorema 1.1. *Se a_n é uma solução não-nula da recorrência linear homogênea $x_{n+1} = g(n)x_n$, então a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ em $y_{n+1} = y_n + f(n)$, sendo $f(n) = \frac{h(n)}{g(n)a_n}$.*

Demonstração. Fazendo $x_n = a_n y_n$, a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ fica convertida em:

$$a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n).$$

Como a_n é solução de $x_{n+1} = g(n)x_n$, tem-se que $a_{n+1} = g(n)a_n$ e, consequentemente,

$$g(n)a_n y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n),$$

o que fornece

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n)a_n}.$$

□

Com isso podemos usar o método da soma telescópica. *Equação Característica de Recorrência Linear Homogênea de 2ª Ordem com Coeficientes Constantes*
Recorrências da forma

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0 \qquad (*)$$

em que $q \neq 0$, são chamadas recorrências lineares homogêneas de 2ª ordem com coeficientes constantes. A cada recorrência da forma (*) podemos associar uma equação do segundo grau

$$r^2 + pr + q = 0$$

que é chamada de equação característica da recorrência acima citada.

Exemplo 1.7. Já vimos que a Sequência de Fibonacci é definida recursivamente por

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_{n+0} = 0.$$

e, sendo assim, tem a seguinte equação característica

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

As raízes desta equação são:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Os próximos dois teoremas auxiliam no tratamento das recorrências lineares de 2ª ordem a depender das raízes da equação característica, que podem ser iguais ou distintas.

Teorema 1.2 (Equação Característica com Raízes Reais Distintas)**.** *Se a equação característica $r^2 + pr + q = 0$ possui raízes distintas r_1 e r_2, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = Ar_1^n + Br_2^n$, com A e B constantes.*

Demonstração. Veja [4]. □

Teorema 1.3 (Equação Característica com Raízes Reais Iguais)**.** *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = Ar^n + Bnr^n$ com A e B constantes.*

Demonstração. Veja [4]. □

Observação 1.1. Se as raízes da equação característica forem complexas, podemos colocá-las na forma trigonométrica e a solução pode ser escrita evitando cálculos com complexos. Para detalhes, veja [4].

Tomando como referência os Teoremas 1.2 e 1.3 podemos utilizá-los para determinar a solução das equações de recorrência lineares com coeficientes constantes, quando suas equações características possuem raízes reais iguais ou distintas.
1º Passo: Escrever a equação característica $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ na forma $r^2 + pr + q = 0$.
2º Passo: Determinar as raízes r_1 e r_2 da equação característica.
3º Passo: Determinar constantes A e B tais que se $r_1 \neq r_2$

$$\begin{cases} Ar_1 + Br_2 = x_1 \\ Ar_1^2 + Br_2^2 = x_2 \end{cases}$$

ou $r_1 = r_2 = r$

$$\begin{cases} Ar + Br = x_1 \\ Ar^2 + 2Br^2 = x_2. \end{cases}$$

4º Passo: Escrever a solução $x_n = Ar_1^n + Br_2^n$ quando $r_1 \neq r_2$ e escrever a solução $x_n = Ar^n + Bnr^n$ quando $r_1 = r_2 = r$.

Exemplo 1.8. Utilizando o metódo da solução das equações de recorrência lineares homogêneas com coeficientes constantes na sequência de Fibonacci, segue que:
1º Passo: Temos que $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Cuja equação característica é $r^2 - r - 1 = 0$.
2º Passo: As raízes da equação característica são $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
3º Passo: Determinar as constantes A e B, tal que

$$F_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

Como $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, temos o sistema

$$\begin{cases} Ar_1^0 + Br_2^0 = 0 \\ Ar_1^1 + Br_2^1 = 1 \end{cases}$$

cuja solução é $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$e $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.
4º Passo: Temos portanto que o termo geral da recorrência é

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Esta última igualdade segue do Princípio de Indução.

Problemas Resolvidos

Daremos alguns exemplos de questões que apareceram em olimpíadas matemáticas e que tem como princípio as recorrências lineares.

Exemplo 1.9 (OBMEP - 2012 - Nível 2)**.** Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura. Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo. Quantos palitos formam o lado desse triângulo?

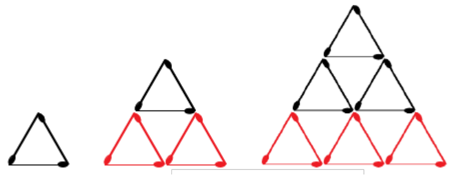


Figura 1.2: OBMEP 2012

Solução: Seja x_n o número de palitos utilizados para construir o triângulo, fazendo as seguintes iterações:

$$x_1 = 3$$
$$x_2 = x_1 + 6 = 9$$
$$x_3 = x_2 + 9 = 18$$
$$x_4 = x_3 + 12 = 30.$$

Continuando, tem-se que o triângulo que ocupa a n-ésima posição na sequência é formado acrescentando, ao triângulo anterior, n triângulos iguais ao primeiro. Assim:

$$x_1 = 1 \cdot 3$$
$$x_2 - x_1 = 2 \cdot 3$$
$$x_3 - x_2 = 3 \cdot 3$$
$$x_4 - x_3 = 4 \cdot 3$$
$$x_5 - x_4 = 5 \cdot 3$$
$$\vdots$$
$$x_n - x_{n-1} = n \cdot 3.$$

Aplicando o método da soma telescópica, temos

$$x_n = 3 + 3(2 + 3 + 4 + \cdots + n)$$
$$x_n = 3(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n)$$
$$x_n = \frac{3n(n+1)}{2}$$
$$x_n = \frac{3n^2 + 3n}{2}.$$

Como $x_n = 135$, segue que

$$\frac{3n^2 + 3n}{2} = 135$$

que é equivalente a,

$$n^2 + n - 90 = 0.$$

Esta equação possui raiz positiva $n = 9$, assim o triângulo procurado é o nono da sequência, cujo lado é composto por 9 palitos. $\square$

Exemplo 1.10 (OBMEP - 2013 - Nível 1)**.** A árvore do professor Fernando cresce de acordo com a seguinte regra:

(I) Na primeira semana a árvore começa a crescer com apenas um galho;

(II) Após crescer por duas semanas, esse galho dá origem a um novo galho por semana;

(III) Cada novo galho gerado continua a crescer, e após crescer por duas semanas dá origem a um novo galho por semana.

A figura ilustrada abaixo mostra a árvore do professor Fernando após 5 semanas passadas.

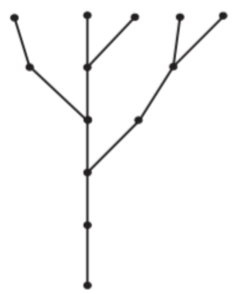


Figura 1.3: Árvore do Prof. Fernando

a) Quantos galhos haverá após seis semanas?

b) Quantos galhos haverá após sete semanas?

c) Quantos galhos haverá após treze semanas?

Solução: a) A ramificação da árvore do professor Fernando de acordo com as regras pode ser vista de acordo com a seguinte ilustração

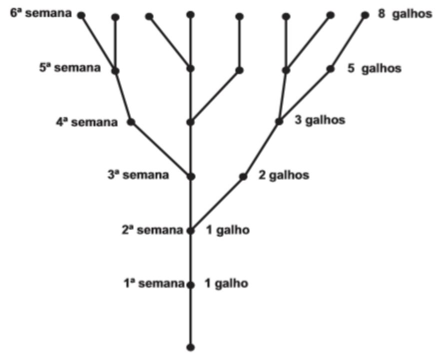


Figura 1.4: Ramificação da Árvore

Portanto após 6 semanas, temos o resultado de 8 galhos.

b) Percebemos que o problema é semelhante ao problema dos coelhos de Fibonacci, porém os coelhos foram substituídos por galhos e os meses por semanas. De modo geral segue que $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ para $n \geq 1$. Daí

$$x_7 = x_6 + x_5,$$

$$x_7 = 8 + 5 = 13.$$

c) Seguindo o padrão, a quantidade de galhos, que teremos após a 13ª semana, será dada pela soma do 12º e do 11º termo, utilizando o método das somas sucessivas, teremos

$$x_6 = 8$$

$$x_7 = 13$$

$$x_8 = 8 + 13 = 21$$

$$x_9 = 13 + 21 = 34$$

$$x_{10} = 21 + 34 = 55$$

$$x_{11} = 34 + 55 = 89$$

$$x_{12} = 55 + 89 = 144$$

$$x_{13} = 89 + 144 = 233.$$

Portanto, a quantidade de galhos após a 13ª semana é 233.

$\square$

Exemplo 1.11. (Exame Nacional de Qualificação do PROFMAT-2018.2) Considere a recorrência definida por $a_1 = 1, a_2 = 5$ e para $n > 0$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ determine o termo geral da recorrência.

Solução: De fato, temos que $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n = 0$. Sua equação característica é $r^2 - 5r + 6 = 0$. As raízes dessa equação são $r_1 = 3$ e $r_2 = 2$. Como $a_1 = 1$ e $a_2 = 5$, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} Ar_1 + Br_2 = 1 \\ Ar_1^2 + Br_2^2 = 5 \end{cases}$$

cuja solução é $A = 1$ e $B = -1$. Portanto, o termo geral da recorrência é $a_n = 3^n - 2^n$. $\square$

Problemas Propostos

Problema 1.1 (OBMEP 2015, 1ª Fase - Nível 3, [6]). Abaixo temos três figuras pentagonais: A primeira com 5 pontos, a segunda com 12 pontos e a terceira com 22 pontos. Continuando esse processo de construção, a vigésima figura pentagonal terá 651 pontos. Quantos pontos terá a vigésima primeira figura?

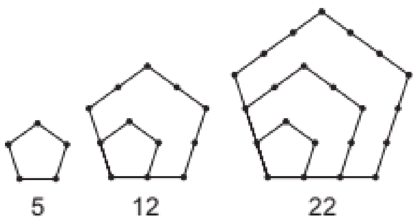


Figura 1.5: OBMEP 2015

(a) 656 (b) 695 (c) 715 (d) 756 (e) 769

Problema 1.2 ([6]). Observe a disposição abaixo da sequência dos números naturais ímpares:

$$\begin{array}{lllll} 1 & & & & \\ 3 & 5 & & & \\ 7 & 9 & 11 & & \\ 13 & 15 & 17 & 19 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Determine:

a) O primeiro termo da décima linha.

b) A fórmula de recorrência para o primeiro termo da linha que está na posição $n + 1$.

Problema 1.3 ([7]). Considere o seguinte tabuleiro quadriculado onde todos os números naturais foram escritos em diagonal.

$\ddots$					
10	$\ddots$				
6	9	$\ddots$			
3	5	8	12	$\ddots$	
1	2	4	7	11	$\ddots$

Cada quadradinho possui uma posição denotada por (x, y), em que x representa a coluna, contada da esquerda para a direita, e y representa a linha, contada debaixo para cima. Por exemplo, 12 e o número escrito no quadradinho de posição $(4, 2)$:

a) Determine o número que está no quadradinho de posição $(4, 4)$.

b) Determine o número que está no quadradinho de posição $(1, 2016)$.

c) Determine o número que está no quadradinho de posição $(2013, 2017)$.

Problema 1.4. [4] Determine o número máximo de regiões em que n retas podem dividir o plano.

Problema 1.5 (IMO 1984 - SL). Seja c um inteiro positivo. A sequência (f_n) se define como: $f_1 = 1, f_2 = c$ e

$$f_{n+1} = 2f_n - f_{n-1} + 2; (n \geq 2).$$

Mostre que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f_k f_{k+1} = f_r$.

Referências

[1] ALBUQUERQUE, Aldivam do Carmo. *Resolução de Problemas de Contagem usando Recorrência Lineares*. 2019. 70 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestre em Matemática., Matemática, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2019.

[2] CARDOSO, Gilson Ricardo de Brito. *A apreensão de generalizações de sequências matemáticas no ensino médio, promovida pelo estudo téorico-prático das recorrências lineares e do princípio de indução matemática*. 2019. 50 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestre em Matemática., Matemática, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2019.

[3] CASTRO, Fabiano José de. *Matemática Discreta: Tópicos de Recorrências Lineares e Suas Aplicações*. 2016. 77f. Dissertação (Mestrado)-Mestrado Profissional em Rede Nacional- PROFMAT-UFPB, João Pessoa, 2016.

[4] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto Carvalho, WAGNER, Eduardo e MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio-Vol 2*. SBM (Coleção Professor de Matemática), 7ª ed., Rio de Janeiro, 2016.

[5] SILVA, Ricardo Augusto Oliveira da. *Uso do Princípio de Indução Matemática e a Fórmulas de Recorrência no Ensino Básico*. 2018. 99 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestre em Matemática., Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.

[6] Portal Obmep do Saber, Recorrências. Disponível em: https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=82>.Acessoem:30out.2019.

[7] PORTAL DA MATEMÁTICA OBMEP, *Módulo Tópicos Adicionais - Recorrências*, Disponível em https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/a1z3082bduwok.pdf.Acessoem:22maio2022

[8] IMPA. OBMEP. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas.htm. Acesso em: 30 out. 2019.

2. Curiosidades

Contribuições de Mulheres para a Matemática

Lorena Brizza Soares Freitas
Maité Kulesza
Michele Mendes Novais[1]

A edição especial de 2022 do jornal "É Matemática, Oxente!" trouxe um artigo que tratava da desigualdade de gênero na Matemática. Um dos fatores mencionados nele é o quanto o estereótipo de gênero, reforçado no âmbito escolar, pode afastar as meninas da matemática ocasionando uma falta de identificação e um distanciamento da área. A História da Matemática é culturalmente apresentada no masculino deixando em segundo plano e, na maioria das vezes, apagando as mulheres que contribuíram para a ciência. Esse é um erro que aumenta a sub-representatividade feminina nas ciências exatas. Nesta coluna, apresentando as trajetórias de algumas mulheres matemáticas, queremos estimular a divulgação dessa História que pouco aparece nos livros e que pode ajudar a desconstruir esses estereótipos e atrair mais meninas para o campo da matemática. Como as mulheres tiveram um acesso tardio à educação e, quando permitido, limitado à educação infantil, os registros de contribuições das mulheres na matemática são datados dos últimos séculos, especialmente no mundo ocidental. Entretanto, podemos citar diversas mulheres que contribuíram tanto com a História Antiga da matemática quanto com a História Moderna. A primeira mulher matemática que se tem registro foi Hipátia de Alexandria e devido a isso ela é mencionada em diversos textos históricos. Nascida no século IV no Egito, Hipátia (370-415) estudou em Atenas na Grécia e dedicou-se às áreas de Ciências Exatas, Medicina, Filosofia e Astronomia. Além de diversos manuscritos sobre a aritmética de Diofanto, se atribui a ela a invenção do astrolábio, do hidrômetro e

[1]Professoras do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco

do higroscópico. Ressalta-se que há uma divergência entre alguns historiadores sobre a criação desses intrumentos, embora todos afirmem sua participação na invenção ou melhoramento deles. Por ser pagã e defensora do racionalismo científico, Hipátia foi assassinada em uma emboscada. Após a sua morte, não se teve registro de mulheres na matemática por mais de dez séculos. É importante destacar que ela foi incentivada por seu pai Theon, cientista (matemático, astrônomo e filósofo) conhecido da época e juntamente com ele escreveu manuscritos sobre os "Elementos de Euclides". Assim como Hipátia, muitas matemáticas mencionadas na História, como Maria Gaetana de Agnesi (1718-1799), Sofia Kovalevskaya (1850-1891) e Emmy Noether (1882-1935) tiveram acesso à educação incentivadas por seus pais, irmãos ou professores. No contexto brasileiro, também temos poucos registros sobre a história das matemáticas, por exemplo, Maria Laura Mouzinho Leite Lopes (1917-2013), pernambucana, é considerada a primeira doutora brasileira em Matemática e obteve o título de Doutora em Ciência - Matemática, em 1949, na Faculdade Nacional de Filosofia, atualmente Universidade Federal do Rio de Janeiro. No entanto, Marília Chaves Peixoto (1921-1961), em 1948, doutorou-se em Ciências na Escola Nacional de Engenharia da Universidade do Brasil, atualmente Universidade Federal do Rio de Janeiro. Esses títulos não eram ainda em matemática e, por isso, a professora Elza F. Gomide (1925-2013) é citada por alguns autores como sendo a primeira doutora em Matemática defendendo sua tese em 1950 no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Ela foi responsável pela tradução de diversos livros de matemática, colaborando para o ensino e a divulgação da área. É importante ressaltar que muitas mulheres entraram nas ciências dentro de um contexto social privilegiado, mas essa não foi a realidade de outra matemática. A professora Eliza Maria Ferreira Veras da Silva (1944-) nasceu em Ituberá, Bahia. Sua família não tinha condições de custear seus estudos e, após o término do Ensino Fundamental, incentivada pela mãe e por um tio, Eliza conseguiu estudar no Colégio Normal de Jequié com uma bolsa obtida por meio de uma prova de admissão, na qual passou em primeiro lugar. Aos 23 anos, concluiu o curso de Bacharelado e Licenciatura em Matemática na Universidade Federal da Bahia (UFBA). Antes mesmo de iniciar a faculdade, Eliza foi premiada com a Bolsa Philips da Holanda, por ter concluído o último ano pedagógico com média 10 em todas as disciplinas. Fez mestrado e doutorado na França na Universidade de Montpellier, e concluiu o seu doutorado em Matemática em 1977, onde estudou com uma bolsa do Governo da França e defendeu uma tese sobre álgebras não-associativas. A professora Eliza é a primeira mulher negra brasileira a obter um doutorado em Matemática. Ela é a única das citadas nesta coluna que está viva. E por que escolhemos mencioná-la? Para destacar que as meninas e mulheres negras têm ainda mais barreiras de acesso à educação, em particular, às ciências exatas. Marjorie Lee Browne (1914-1979) e Katherine Coleman Goble Johnson (1918-2020), muito conhecida através do filme "Estrelas Além do Tempo", são matemáticas que enfrentaram o preconceito de gênero e o de raça. Ainda temos muito o que fazer para diminuir essas diferenças, mas queremos dividir com vocês essas curiosidades e fazer um convite para que possamos divulgar mais as trajetórias dessas e outras mulheres que contribuíram muito para o desenvolvimento da Matemática.

Referências

[1] CARVALHO, JOSÉ MURILO DE(ORG). ET AL. Ciência no Brasil. 100 anos da Acadêmia Brasileira de Ciências. Rio de Janeiro: Academia Brasileira de Ciências, 2017. 208 p. Disponível em <https://www.abc.org.br/IMG/pdf/livro_abc_portugues_completo_versao_digital.pdf>.Acesso em 23 de Maio de 2022.

[2] FERNANDEZ, CECÍLIA DE SOUZA. ET AL. A história de Hipátia e de muitas outras matemáticas. Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Sudeste, II, 2018, São Paulo. Disponível em <https://sbm.org.br/wp-content/uploads/2022/04/Livro-A-historia-de-Hipat

ia-e-de-muitas-outras-matematicas.pdf>. Acesso em 23 de Maio de 2022.

[3] FREITAS, Lorena Brizza Soares. et al. A OPEMAT como ponto de partida para falar da sub-representatividade feminina na Matemática. É Matemática, Oxente!, Recife, v. 1, n. 22/especial, p. 7-13, abr. 2022. Disponível em <http://ematematicaoxente.com.br/index.php/edicao-atual/>. Acesso em 23 de Maio de 2022.

[4] KISHI, Kátia Divulga Cientista, Marília Chaves Peixoto, primeira doutora em matemática no Brasil. Ciência em Revista. Campinas, 17 de agosto de 2015. Disponível em <https://www.blogs.unicamp.br/cienciaemrevista/2015/08/17/divulga-cientista-marilia-chaves-peixoto-primeira-doutora-em-matematica-no-brasil/>. Acesso em 23 de Maio de 2022.

[5] MARTINES, Mônica de C. S. et al. As mulheres na matemática e seus trabalhos ao longo dos séculos. *In:* Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia, 17., 2020, Rio de Janeiro. Anais eletrônicos[...] Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de História das Ciências, 2020. p. 1 - 10. Disponível em <https://www.17snhct.sbhc.org.br/resources/anais/11/snhct2020/1599878211_ARQUIVO_cc5ed382a20ba0a7a1cde3a109058b00.pdf>. Acesso em 23 de Maio de 2022.

[6] MORAES, Simone Maria de. Um pouco da trajetória de Eliza Maria Ferreira Veras da Silva, provavelmente a primeira mulher negra brasileira a obter o título de doutora em matemática. Noticiário da SBM, 41, mar. 2022. Disponível em <https://sbm.org.br/wp-content/uploads/2022/03/Noticiario_SBM_202203_nro041-1.pdf>. Acesso em 23 de Maio de 2022.

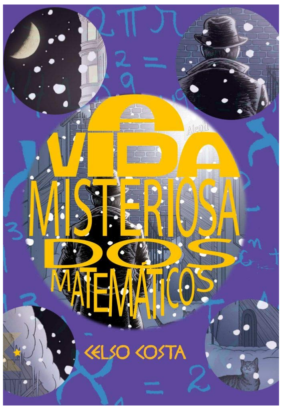
[7] SILVA, Clóvis Pereira. A Matemática no Brasil: uma história de seu desenvolvimento. Universidade Cornell. 2 ed. Unisinos: Editora, 1999.

3. Indicações de Leituras/Filmes

A vida misteriosa dos matemáticos

Por Marcelo Santos[2]

O livro "**A vida misteriosa dos matemáticos**" é uma obra de ficção escrita pelo matemático brasileiro Celso Costa.



O autor é considerado um dos maiores matemáticos do nosso país. Ele conseguiu encontrar um exemplo mundialmente famoso de uma superfície mínima[3], conhecida como Superfície Costa, resolvendo assim um problema de mais de 200 anos.

Costa também nos presenteia com esse trabalho fantástico que conta uma história de serendipismo[4], na qual o herói 'ocasionalmente' se vê em um mundo misterioso: o Aleph.

É o tipo de livro escrito por quem tem conhecimento da história da matemática, bom gosto pra selecionar pontos cruciais dessa história e habilidade literária pra costurar tudo isso em um tecido uniforme onde o tempo cronológico não impõe suas restrições.

No livro o protagonista é Vladimir, que acaba caindo no Aleph, um lugar onde estão os maiores matemáticos que já viveram. O Aleph tem uma

[2]Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco

[3]Superfície mínima é uma superfície que dado o contorno ela minimiza a área. Podemos entender fisicamente ao mergulhar um arame(contorno) numa solução de sabão e formar uma bolha (que é uma superfície) , nesse caso pelas restrições físicas a bolha sempre terá a menor área possível.

[4]Serendipismo-descobertas boas feitas por acaso. Um bom exemplo, de história de serendipismo é Alice no País das maravilhas (que aliás também foi escrita por um matemático).

geometria de espaço-tempo com múltiplas possibilidades, nos lembrando uma variedade[5]. Então é emblemático que tal concepção tenha surgido na mente de um geômetra brilhante.

No Aleph, Vladimir tem experiências interessantes que não obedecem nossos conceitos físicos ordinários. Mas acima de tudo, o ponto forte do livro é nos dar a possibilidade de espiar as maiores mentes matemáticas, ver mimetizadas suas formas de pensamento, e através desta fresta intelectual contemplar a condensação dos diálogos, embates e colaborações que fundaram o edifício da matemática.

Se na entrada da Academia de Platão se lia a placa "que não entre quem não saiba geometria", no livro o chamado é outro. Pois o estilo literário é bem humorado e não cai em tecnicismos, podendo ser apreciado por qualquer interessado em matemática.

Por isso é uma leitura recomendada a qualquer entusiasta de nossa ciência.

4. Quem pergunta, quer saber!

A matemática é uma ciência bélica?

Por Severino Barros de Melo[6]

A publicação da presente edição do "É matemática, Oxente!" coincide com cerca de quatro meses da invasão da Ucrânia pelas tropas Russas. Como qualquer guerra, também essa, com forte cobertura midiática, depõe contra a capacidade humana de dialogar e resolver suas divergências na esfera diplomática. Coincide também com uma crescente polarização ideológica no nosso país. Nesse contexto nos pareceu oportuno trazer para esse número uma pergunta feita por um visitante do Museu Interativo de Matemática de Giessen (Alemanha). Nesse espaço cultural, como abordado em edições anteriores do jornal, o visitante pode fazer perguntas que são respondidas pela equipe do museu.

Pergunta: A matemática é uma ciência bélica? [7]

Resposta do então diretor do Museu, o matemático Albrecht Beutelspacher:

Existiu e existem matemáticos que trabalham para a indústria armamentista. Arquimedes (287-212 a.C) já naquela época, desenvolveu diversos equipamentos bélicos como máquinas lançadoras de garras mecânicas, para defender sua cidade natal, Siracusa, do ataque dos Romanos. Diz a lenda que ele conseguiu incendiar os barcos inimigos com a ajuda de imensos espelhos incendiários.

Outro exemplo é o do matemático francês Jean-Victor Poncelet (1788-1867). Ele participou em 1812 da campanha russa de Napoleão, e, como derrotado no campo de batalha de Smolensk, foi abandonado no local, indo parar numa cadeia russa como prisioneiro de guerra. Naquela situação, absolutamente só, criou as bases da moderna geometria projetiva. Depois do seu regresso à França, fez carreira nas escolas militares superiores e obteve numerosas honrarias militares.

Por último, durante a segunda guerra mundial, havia muitos matemáticos (não somente do lado alemão, mas também entre os aliados) dedicados a decifrar os códigos dos respectivos inimigos. O mais conhecido foi Alan Turing (1912-1954) que naquele período estabeleceu os fundamentos teóricos da informática. Isto é somente uma amostra de nomes de matemáticos que colocaram sua inteligência a serviço de objetivos militares. Porém a questão é se estas atividades tiveram influência decisiva na Matemática. Eu entendo que não. Sem dúvida a matemática recebeu e recebe estímulos por causa deste tipo de aplicações. Isto é uma coisa boa e importante. Porém, a pergunta do visitante se fundamenta no interesse em saber se isso alterou a essência da matemática, se a matemática pode se apresentar com "cara de má"; ou seja, se sempre está vulnerável a qualquer tipo de ideologia. Podemos

[5]Variedade é um conceito matemático que generaliza as noções de superfície (variedade de dimensão 2) para dimensões maiores. A despeito de não intuitivas sua existência concreta encontra respaldo nas teorias físicas.

[6]Professor do Departamento de Educação da UFRPE

[7]Tradução do livro Matemática: **101 preguntas fundamentales** escrito por, Albrecht BEUTELSPACHER. Madri: Alianza editorial, 2015.

responder com clareza: a matemática nunca se deixou influenciar por qualquer ideologia. A matemática sempre foi espantosamente imune a qualquer concepção de mundo.

As tentativas de se criar uma "matemática Alemã", em oposição a uma chamada "matemática Judaica", na década de 1930 fracassaram completamente. Não porque os matemáticos não estivessem de acordo, mas porque simplesmente não funcionou. A judaica era algo como a "abstrata" teoria dos conjuntos, enquanto a geometria gráfica era considerada tipicamente alemã. Porém, qualquer um que se inicie no estudo da matemática (por exemplo, no campo da geometria) observará que se trata de uma separação artificial e não é um ponto de vista defensável. Isto pode ser observado desde o início da geometria onde uma reta se define como um conjunto de pontos com determinadas propriedades e se fala com desenvoltura de médias, produtos cartesianos, etc.

Também no socialismo real, a matemática era, num certo sentido, uma "ilha para as almas'. De todo modo, muitos matemáticos afirmam que a pesquisa matemática é um aspecto da vida que no fundo escapa da influência ideológica dos partidos. E por que isto? Muito simples: alguém pode estar muito convencido de sua visão de mundo, porém se ele não concebe isso como matemático não tem nenhuma possibilidade de futuro. Quem não possui um perfil que, por um lado seja criativo, e por outro o estimule a interpretar a realidade com uma lógica sólida, o caminho intuído durante o percurso criativo não poderá levá-lo a dar nem o primeiro passo no campo da ciência.

Em outras palavras, a esmagadora lógica da matemática, com esse rígido sistema de regras, às vezes considerada fria e desumana, se revela precisamente nas situações difíceis, como se fosse uma rocha no meio das ondas que a golpeiam.

Assim sendo, os matemáticos de fato contribuíram para o desenvolvimento de armas e instrumentos militares (e contribuem ainda hoje), porém a matemática em si é incorruptível a tudo isso. Sobre a utilização da matemática no contexto militar, se podem ter opiniões diferentes, mas não quanto a independência da matemática como tal.

5. Eventos

- **III Encontro Nacional Online de Professores que Ensinam Matemática (III ENOPEM)**
  - Local: Online - https://matematicanaescola.com/iiienopem
  - Data: 4 a 8 de julho
- **XIV Encontro Nacional de Educação Matemática (XIV ENEM)**
  - Local: Online - https://www.even3.com.br/xivenem2022
  - Data: 11 a 15 de julho

6. Soluções de Olimpíadas

Nesta edição apresentaremos a resolução das questões da prova da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2021 referentes ao nível 1.

Questão 1. Toda semana, o π-raia e três de seus amigos se reúnem para jogar um jogo de *RPG* chamado *"Numbers & Dragons"*. Após atravessar a Floresta de Steiner, eles finalmente chegam a caverna do dragão Kruskal. O mestre do jogo explica que antes de enfrentarem o dragão, deverão passar por 3 salas cheias de quebra-cabeças, construídas para proteger o tesouro do dragão.

Ao entrarem na primeira sala, o grupo logo avista 3 estátuas, representando dois matemáticos da antiguidade, uma de bronze, uma de pedra e outra de madeira segurando, cada uma, um vaso. Cada estátua pode ser posicionada de 2 maneiras distintas, rotacionando-a em torno de seu próprio eixo. No centro da sala, um pedestal contendo um único pergaminho onde lê-se:

(A) (V) (F) Há 6 maneiras de posicionar as 3 três estátuas.

Ao julgar corretamente a primeira afirmação, as 3 estátuas magicamente se voltam para o centro da sala. O pedestal se abre, revelando 4 esferas maciças de ouro idênticas e um segundo pergaminho onde lê-se:

(B) (V) (F) Há 125 maneiras de distribuir as 4 esferas nos 3 vasos.

Após deduzir corretamente a veracidade da segunda afirmação, uma passagem ao fundo se abre levando o grupo à segunda sala. A sala contém 4 portas enumeradas de 1 à 4 com algarismos romanos. No centro da sala, um novo pedestal contendo um único pergaminho onde lê-se:

(C) (V) (F) Há 15 maneiras de se dividir 4 amigos em grupos.

Os amigos julgam a terceira afirmação e logo em seguida, o pedestal se abre revelando 4 chaves enumeradas também com algarismos romanos de 1 à 4. Acompanhando as chaves estava um pergaminho onde lê-se:

(D) (V) (F) Há 8 maneiras de se tentar abrir as 4 portas utilizando as 4 chaves, se cada chave deve ser utilizada uma única vez e nenhuma chave deve ser utilizada para abrir a sua própria porta.

Os amigos julgam corretamente a quarta afirmação e a sequência correta das chaves é revelada no próprio pergaminho. Após inserirem as quatro chaves na sequência correta e as virarem simultaneamente, um barulho é ouvido e o chão logo abaixo do π-raia se abre, que cai por um longo túnel até ser arremessado dentro de uma sala escura, a terceira e última sala. No meio da sala é possível ver, sobre uma gigantesca pilha de ouro, o dragão Kruskal, que repousava após sua última refeição enquanto que no fundo da sala, sobre um pedestal, estava o medalhão de ouro olímpico. Ao tentar caminhar, o π-raia tropeça no último pergaminho com a última charada:

(E) (V) (F) Considerando que se está no ponto $(0,0)$ e que partindo de um ponto (x,y), só é possível se deslocar para o ponto $(x+1,y)$ ou $(x,y+1)$, há 10 trajetos até o ponto $(3,3)$ que não passam pelo ponto $(2,2)$, onde está o dragão.

Após responder a última charada, um caminho no chão se ilumina e o π-raia atravessa em segurança até o medalhão. Porém, ao tomá-lo em suas mãos, o dragão Kruskal desperta, e a aventura desta semana se encerra.

Solução: A – (F). Há 2 maneiras de se posicionar a primeira estátua, 2 maneiras de se posicionar a segunda e 2 maneiras de se posicionar a terceira. Pelo princípio multiplicativo, há $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ modos de se posicionar as três estátuas.

B – (F). Podemos dividir em casos:

(i) Todas as esferas em um único vaso;

(ii) Um vaso com três esferas e um outro vaso com outra esfera;

(iii) Um vaso com duas esferas, e um outro com duas outras esferas;

(iv) Um vaso com duas esferas, um segundo vaso com outra esfera e um terceiro vaso com outra esfera;

No caso (i), há 3 modos de se escolher o vaso que irá conter as 4 esferas; no caso (ii), há 3 modos de se escolher o vaso que irá conter três esferas e 2 modos de escolher o segundo vaso, logo há $3 \cdot 2 = 6$ possibilidades; no caso (iii) há 3 modos de escolher o vaso que irá conter duas esferas, e 2 modos de escolher vaso que irá conter as outras duas esferas; Logo, há $3 \cdot 2 = 6$ maneiras de fazer as escolha dos dois vasos. Porém, cada escolha de dois vasos foi contada duas vezes desta maneira, logo há apenas $6/2 = 3$ possibilidades neste caso; no caso (iv) há 3 modos de se escolher o vaso que irá conter 2 esferas e $2 \cdot 1/2 = 1$ modo de se escolher os dois outros vasos que irão conter uma esfera cada. Logo, há $3 \cdot 1 = 3$ possibilidades neste caso. Pelo princípio aditivo, temos $3 + 6 + 3 + 3 = 15$ modos de se distribuir 4 esferas idênticas em 3 vasos distintos.

C – (V). Podemos dividir em casos:

(i) Um único grupo com os quatro amigos;

(ii) Três amigos em um grupo e outro em outro grupo;

(iii) Dois amigos em um grupo e dois amigos em outro grupo;

(iv) Dois amigos em um grupo, um terceiro amigo em outro grupo e um quarto amigo em outro grupo;

(v) Quatro grupos com um amigo cada.

No caso (i), há uma única possibilidade; no caso (ii), basta escolher o amigo que formará um grupo sozinho, o que pode ser feito de 4 modos; no caso (iii) temos $4 \cdot 3/2 = 6$ modos de escolher dois grupos com dois amigos cada. Porém, cada escolha desta foi contada duas vezes, pois não há distinção entre os grupos, logo temos apenas 3 possibilidades para este caso; no caso (iv), basta escolher os amigos que irão formar um grupo de duas pessoas, o que pode ser feito de $4 \cdot 3/2 = 6$ modos; no caso (v) há uma única possibilidade. Logo, pelo princípio aditivo, temos $1+4+3+6+1 = 15$ modos.

D – (F). Temos 3 modos de escolher a chave que será inserida na porta de número I. Temos dois casos:

(i) A chave 1 é inserida na posição da chave que foi inserida na porta I;

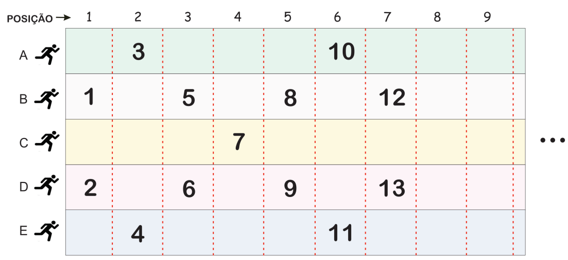
(ii) A chave 1 não é inserida na posição da chave que foi inserida na porta I;

No caso (i); só há uma possibilidade para escolher as portas das chaves restantes; no caso (ii), a chave 1 pode ser inserida de 2 maneiras e, uma vez feito isso, as demais chaves só podem ser inseridas de uma única forma. Assim, temos $3 \cdot (1 + 2) = 9$ possibilidades.

E – (F). Cada caminho de $(0, 0)$ até $(3, 3)$ corresponde biunivocamente à um anagrama com 3 letras D (direita) e 3 letras C (cima). Para contar tais anagramas, basta escolher os lugares que serão ocupados pelas letras D, o que pode ser feito de $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ modos. Porém, cada escolha destas foi contada $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ vezes, pois as letras D são idênticas. Logo, ao todo são 20 caminhos até $(3, 3)$. Os caminhos até $(3, 3)$ que passam pelo ponto $(2, 2)$ podem ser contados da seguinte forma: contamos os caminhos de $(0, 0)$ até $(2, 2)$, há $4 \cdot 3/2 = 6$ tais caminhos e, em seguida, contamos os caminhos de $(2, 2)$ até $(3, 3)$, que são apenas 2. Logo, temos $6 \cdot 2 = 12$ caminhos de $(0, 0)$ até $(3, 3)$ que passam por $(2, 2)$. Portanto, são apenas $20 - 12 = 8$ os caminhos que não passam por $(2, 2)$.

□

Questão 2. Os atletas A, B, C, D e E participaram de uma corrida olímpica cujo trajeto consiste de uma pista reta dividida em 5 partes. Em cada posição equivalente a 1 metro de percurso foram colocados números naturais em algumas das pistas em ordem crescente, a partir do 1, de cima para baixo e da esquerda para a direita conforme mostra a figura abaixo:



Os atletas pulavam os números encontrados em suas respectivas pistas. Por exemplo, o atleta D pulou no início da corrida os números 2, 6 e 9 nas posições 1, 3 e 5, respectivamente. Além disso, todos correram pelo menos até a distância em que se encontrava o número 2021 no percurso.

(A) Qual atleta pulou o número 2021?

(B) Em que posição no percurso aconteceu esse salto?

Solução 1: (A) Após completar o percurso com mais alguns números, podemos analisar o padrão dos números na pista do atleta C. A sequência de números é $7, 14, 21, \ldots$. Então fazemos a divisão de 2021 por 7 (ou qualquer múltiplo de 7). No caso do 7 obtemos que $2021 = 288 \times 7 + 5 = 2016 + 5$. Portanto o número 2016 aparece na pista do atleta C. Como o resto é 5, completamos os próximos 5 números e obtemos que o atleta B pula o 2021.

(B) Os números da sequência $7, 14, 21, \ldots$ estão nas respectivas posições $4, 8, 12, \ldots$ e daí obtemos que o 2016 está na posição $4 \times 288 = 1152$. Como o 2021 está 3 posições a frente, segue que 2021 está na posição $1152 + 3 = 1155$.

$\square$

Solução 2: (A) Após completar o percurso com mais alguns números, podemos analisar o padrão dos números na pista do atleta B. Na pista do atleta B temos dois padrões diferentes nos números: um com a sequência $1, 8, 15, \ldots$ e o outro com $5, 12, 19, \ldots$.

No primeiro caso temos os números da forma

$$1 + 7n, n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Verificamos se para algum valor de n temos a igualdade $1 + 7n = 2021$, ou seja, $7n = 2020$ para algum $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Isso é impossível, pois 2020 não é múltiplo de 7.

No segundo caso temos os números da forma

$$5 + 7n, n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Verificamos se para algum valor de n temos a igualdade $5 + 7n = 2021$, ou seja, $7n = 2016$ para algum $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Isso é válido para $n = 288$. Logo o atleta B pulou o número 2021.

(B) Agora resta verificar em qual posição no percurso está o 2021. Para isso observamos que os números da sequência $5, 12, 19, \ldots$ estão nas posições $3, 7, 11, \ldots$, respectivamente. Portanto, correspondendo as posições da pista onde devemos chegar ao 2021, temos os números da forma

$$3 + 4n, n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Atribuindo o valor $n = 288$ obtido acima, obtemos que o número 2021 está na posição $3 + 4 \times 288 = 1155$, ou seja, o salto ocorreu na posição 1155. $\square$

Questão 3. A partir do quadrado $\square FGHI$ cuja base HI está contida na reta r, a π-veta tenta construir o triângulo ΔFHL, onde L pertence a reta r, conforme mostra a figura abaixo.

Suponha que a área do triângulo ΔFHL seja o dobro da área do quadrado $\square FGHI$. Calcule o valor da razão $\frac{\overline{GK}}{\overline{FH}}$.

Solução: Por um lado, como a área do triângulo ΔFHL vale $2a^2$ centímetros quadrados(onde a denota o comprimento do lado do quadrado $\square FGHI$) então

$$2a^2 = \frac{1}{2}\overline{HL} \cdot \overline{HF} = \frac{1}{2}(\overline{HI} + \overline{IL}) \cdot HF = \frac{1}{2}(a + \overline{IL}) \cdot a.$$

Logo, $\overline{IL} = 3 \cdot a$.

Por outro lado, como os triângulos ΔFGK e ΔKIL são semelhantes pelo critério ângulo ângulo então

$$\frac{\overline{GK}}{\overline{KI}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{IL}}$$

Desde que $\overline{IL} = 3 \cdot a$, $\overline{FG} = a$ então

$$\frac{\overline{GK}}{a - \overline{GK}} = \frac{a}{3 \cdot a}$$

Logo,

$$\overline{GK} = \frac{a}{4}.$$

Portanto, $\frac{\overline{GK}}{\overline{FH}} = \frac{1}{4}$.

$\square$

Questão 4. Durante a impressão das provas da OPEMAT de 2016, devido a um problema técnico, a impressora passou a imprimir a letra P no lugar da letra E. Além disso, toda palavra impressa teve suas letras permutadas de lugar, de modo que nenhuma letra ocupasse o seu lugar de origem. Quantos anagramas novos podem ser formados na impressão da palavra OPEMAT levando estes dois problemas técnicos em consideração? Por exemplo, na situação descrita o anagrama TAMOPP é uma das possibilidades enquanto que OPMPAT não poderá ser impresso.

Solução: Estamos interessados em contar os anagramas da palavra OPPMAT onde nenhuma letra ocupa o seu lugar de origem.

Temos $4 \cdot 3 = 12$ modos de escolher os lugares das letras P. Porém, cada escolha foi contada duas vezes, pois uma permutação das letras P entre si não produz um novo anagrama. Assim, dividimos esse total por 2 obtendo então 6 modos de escolher os lugares das letras P.

Chamemos agora de "livres" as duas letras que originalmente ocupavam esses lugares escolhidos e "não-livres" as 2 outras letras.

Para posicionar a primeira letra não-livre temos dois casos possíveis: (i) a primeira letra não livre é posicionado em um dos lugares originalmente ocupados pelas letras P; (ii) a primeira letra não-livre é posicionada no lugar da outra letra não livre.

(i) Neste caso, há 2 modos de escolher o lugar da primeira letra não-livre. A outra letra não-livre terá 2 modos de ser posicionada (podemos escolher entre o outro lugar da letra P ou o lugar da letra que não é a segunda letra não-livre).

(ii) Neste caso, há apenas 1 modo de posicionar a primeira letra não-livre. Ao fazermos isso, a segunda letra não-livre torna-se livre e pode ser posicionada de 3 modos.

As 2 letras livres restantes podem ser posicionadas de $2 \cdot 1 = 2.$ maneiras.

Portanto, o total de anagramas que podem ser produzidos em virtude destes dois problemas técnicos é $6 \cdot (2 \cdot 2 + 1 \cdot 3) \cdot 2 = 6 \cdot 7 \cdot 2 = 84$ modos $\square$

Questão 5. Alice estava bastante entediada. Para passar o tempo, com o auxílio de um computador, ela calculou a soma dos algarismos do número 7^{1004}. Ela chamou essa soma de D. Não satisfeita, ela somou os dígitos do número D e obteve um novo número que ela chamou de K. Sabendo que $20 < K < 30$, determine K.

Solução: Pelo critério de divisibilidade por 9 temos que 7^{1004} e D deixam o mesmo resto na divisão por 9. Analogamente, D e K deixam o mesmo resto na divisão por 9.

Note que 7^3 deixa resto 1 na divisão por 9. Desse modo, $7^{1002} = (7^3)^{334}$ deixa resto $1^{334} = 1$ na divisão por 9. Por outro lado, 7^2 deixa resto 4 na divisão por 9. Assim, pelo Lema dos Restos, $7^{1004} = 7^{1002} \cdot 7^2$ deixa resto $1 \cdot 4 = 4$ na divisão por 9. Como K está entre 20 e 30, a única possibilidade para K é 22. $\square$

7. Problemas

Para concluir, convidamos o leitor a responder alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Problema 1 (Obm-22, Nível 2)**.** Uma tripla de inteiros positivos (a, b, c) é dita *miranha* se:

- $a \mid bc + 1;$
- $b \mid ac + 1;$
- $c \mid ab + 1;$

Determine todas as triplas miranhas.

Problema 2 (Canguru de Matemática Brasil 2021 - Nível J)**.** No intervalo de um jogo de handball, o placar era 9:14, ou seja, o time visitante estava ganhando com 5 gols de diferença. Com as instruções do técnico no intervalo, o time da casa dominou o jogo no segundo tempo e então marcou o dobro do número de gols que o time visitante marcou no segundo tempo e acabou vencendo o jogo com um gol de diferença. Qual foi o placar final do jogo?

(a) 20:19 (b) 21:20 (c) 22:21 (d) 23:22 (e) 24:23

Problema 3 (OBMEP-2019 Nível 3)**.** Uma função f é tal que $f\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right) = \dfrac{1}{x}$ para todo número real x diferente de 0 e 1. Qual é o valor de $f(3)$?

Enviem as soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, o envio deve ser realizado até **31/08/2022**.

---

8. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n. 21, Dezembro de 2021**. [8]

Problema 1. Determine as funções $f(x)$ que satisfazem a seguinte relação

$$f(-x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x + 1$$

Solução 1. Vamos nomear $f(-x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3x+1$ por (0).

Notemos inicialmente que, uma vez dada $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$. Além disso, ao invés de trabalharmos com $-x$, iremos substituir x por $-x$. Com isso, teremos que (0) resulta em

$$f(x) + 2f\left(\frac{-1}{x}\right) = -3x + 1. \qquad (1)$$

Note que por $x \neq 0$, podemos trabalhar com o inverso multiplicativo de x, ou seja, ao substituirmos x por $\dfrac{1}{x}$ em (0), teremos

$$2f(x) + f\left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{3}{x} + 1. \qquad (2)$$

A partir de (1) e (2) e multiplicando (2) por -2, temos o sistema simples de equações

$$\begin{cases} f(x) + 2f\left(\dfrac{-1}{x}\right) = -3x + 1 \\ -4f(x) - 2f\left(\dfrac{-1}{x}\right) = \dfrac{-6}{x} - 2. \end{cases}$$

Somando as duas equações no sistema, temos que

$$-3f(x) = \frac{-6}{x} - 1 - 3x \Rightarrow 3f(x) = \frac{6+x+3x^2}{x}$$

Logo, $f(x) = \dfrac{6+x+3x^2}{3x}$. □

Solução 2. Outra forma de determinar a $f(x)$ seria, a partir de (0) e sabendo que $x \neq 0$, é substituir x por $\dfrac{-1}{x}$, resultando em $2f(-x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{-3}{x}+1$. Segue

$$\begin{cases} f(-x) + 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3x + 1 \\ 2f(-x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{-3}{x} + 1. \end{cases}$$

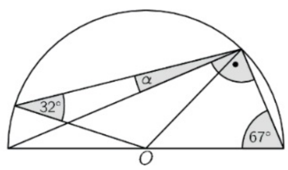
teremos $f(-x) = \dfrac{-3x^2+x-6}{3x}$.
Ora, substituindo x por $-x$ neste último resultado, temos

$$f(-(-x)) = \frac{-3(-x)^2 + (-x) - 6}{3(-x)} \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{6+x+3x^2}{3x}.$$

□

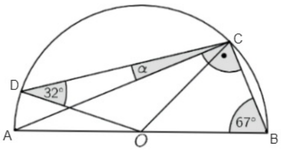
Problema 2. (Canguru de Matemática - 2021 - Nível J) A figura mostra um semicírculo de centro O e vários ângulos inscritos, sendo 2 deles de medidas conhecidas.



Qual é o valor de α?

[8]As soluções dos problemas 1, 2 e 3 foram enviadas pelo leitor **Rodrigo José da Silva**, aluno do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

Solução 1. Apenas para auxiliar no desenvolvimento das ideias, vamos tomar os pontos A, B, C e D, como segue na imagem abaixo.

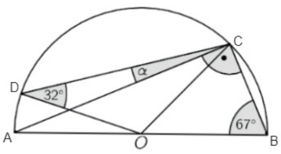


Note que por $\overline{AB}$ ser o diâmetro da semicircunfência dada, o triângulo ABC é reto em C. Assim, $B\hat{A}C + 67° = 90° \Rightarrow B\hat{A}C = 23°$. Perceba também que os triângulos DOC e AOC são isósceles de base $\overline{DC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Por AOC ser isósceles e $C\hat{A}O = B\hat{A}C$, $A\hat{C}O = 23°$. Isso implica que, $\hat{C}$, no triângulo DOC, é igual a $\alpha + A\hat{C}O$. Logo, por, no triângulo DOC, $\hat{D} = \hat{C}$,

$$32° = 23° + \alpha \Rightarrow \alpha = 9°.$$

□

Solução 2. Apenas para auxiliar no desenvolvimento das ideias, vamos tomar os pontos A, B, C e D, como segue na imagem abaixo.



Como $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ têm como comprimento o raio da semicircunferência dada, BOC é isósceles de base $\overline{BC}$. Assim, $B\hat{C}O = 67°$. Note ainda que por $\overline{AB}$ ser diâmetro, o triângulo ABC é reto em C, implicando em

$$A\hat{C}O + B\hat{C}O = 90° \Rightarrow A\hat{C}O = 23°.$$

Por DOC ser isósceles de base $\overline{DC}$, $O\hat{D}C = O\hat{C}D = D\hat{C}A + A\hat{C}O = \alpha + 23°$. Portanto,

$$32° = 23° + \alpha \Rightarrow \alpha = 9°.$$

□

Problema 3. (Coletânea de problemas - Revista da Olimpíada - IME - UFG, n° 7, Setembro 2008) Considere uma sequência

$$(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \dots)$$

cujos termos são os inteiros consecutivos em ordem crescente, e na qual o inteiro n ocorre n vezes. Qual o resto da divisão por 5 do 1993° termo desta sequência?

Solução. Primeiramente, vamos reescrever toda essa sequência em linhas, como segue abaixo.

Linha 1: 1
Linha 2: 2 2
Linha 3: 3 3 3
Linha 4: 4 4 4 4
Linha 5: 5 5 5 5 5
⋮

Dada a repetição de um inteiro n n-vezes, não é díficil perceber que a soma do número de elementos até a n-ésima linha será dada por $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Sabendo que a linha a qual contém o 1993° elemento será composta por um mesmo número, podemos determinar esse elemento pela desigualdade

$$\frac{n(n+1)}{2} > 1993 > \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow$$
$$n^2 + n > 3986 > n^2 - n \Rightarrow$$
$$n^2 > 3986 - n > n^2 - 2n \Rightarrow$$
$$n^2 > 3986 - n \geq (n-1)^2 \Rightarrow$$
$$n > \sqrt{3986 - n} \geq n - 1$$

Um bom candidato para n é 63, visto que é a raiz quadrada de 3969. De fato, $63 > \sqrt{3923} > \sqrt{3844} = 62$. Para $n = 62$, é simples ver que a relação não ocorre $\left(61 < 62 < \sqrt{3924}\right)$. Dessa forma, o 1993° elemento da sequência é 63. Logo, por $63 \equiv 3 \mod 5$, o resto da divisão por 5 do 1993° termo desta sequência é 3. □