É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 21, volume 1, Dezembro de 2021

ISSN 2526-8651

Editorial

Caros Leitores,

Eis-nos mais uma vez dialogando com vocês, desta feita por ocasião do lançamento da edição número 21 do nosso jornal. A cada número elaborado cresce na equipe editorial o entusiasmo em manter viva a experiência do jornal; e , tal entusiasmo é nutrido pela receptividade do público que prestigia o "É Matemática, Oxente!".

O presente número apresenta na seção artigo, um trabalho do Professor Doutor Gabriel Guedes, do departamento de matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, relativo à questão dos invariantes, um rico tema que propicia uma abordagem com variados graus de dificuldade, e muitas vezes aparece nas questões de Olimpíadas.

A seção curiosidades aborda de forma clara e sintética o assunto volumes de figuras semelhantes, um tópico relevante na matemática e que nos remete a um dos três problemas clássicos da Grécia, o problema da duplicação do cubo.

A seção Quem pergunta, quer saber! apresenta uma resposta dada aos leitores da Revista do Professor de Matemática, acerca do condicional, um dos operadores da lógica matemática. A leitura dessa seção permite uma melhor compreensão da tabela verdade não muito intuitiva desse operador. Assim, o leitor continua aprofundando aspectos da lógica matemática presentes no artigo publicado no número 20 do jornal "É Matemática, Oxente!"

A indicação de leitura destaca o livro "The Shape of a life". A obra leva o leitor a uma incursão pela matemática da atualidade, guiado pela história de vida do matemático chinês Shing-Tung Yau. Aí vamos encontrar aspectos relevantes da matemática contemporânea e constatar que célebres polêmicas na História da Matemática, como aquelas entre Tartaglia e Cardano, Pascal e Descartes, dentre outras, continuam a acontecer na atualidade.

Sobre eventos, temos a indicação da X Bienal de Matemática, que está sendo programada de forma presencial.

O conteúdo da edição encerra, como de costume, com proposta de problemas olímpicos e discussão de resolução enviadas à redação.

O lançamento da presente edição foi precedida de uma live acerca dos invariantes, voltada para o contexto das olimpíadas de matemática, apresentada pelo prof. Gabriel Guedes. Para quem não teve oportunidade de acompanhar ao vivo, a palestra intitulada "Polinômios, invariantes e porque se envolver com olimpíadas!" está disponível no canal do Youtube DM-UFRPE através do seguinte link `https://www.youtube.com/watch?v=xqz7BNI4dzM`.

Agradecemos aos leitores que têm interagido com a equipe de redação, com elogios, críticas e sugestões e aos diversos colaboradores que nos ajudaram a concluir esta edição.

Desejamos uma excelente leitura.

Sumário

1. Artigo

Invariantes: uma pequena jornada

Gabriel Araújo Guedes

UFRPE - Departamento de Matemática
Campus Recife
(52171-900) - Recife - PE - Brasil

Introdução

Apresentamos a técnica de procurar um invariante, isto é, algo que não varia no problema e que auxilie na sua resolução. Iniciamos com problemas bem simples do nível A da OBMEP e aumentamos a dificuldade gradualmente até chegarmos num problema da IMO e aproveitando a oportunidade exibimos um problema em aberto bastante famoso sobre este tópico.

Exemplos

Em 2018, a OBMEP, adicionou um novo nível, chamado nível A, para alunos ainda mais novos, do 4º e 5º ano do ensino fundamental, cuja prova desse nível foi realizada em fase única e ainda em caráter experimental. Vejamos três questões dessa prova para começarmos.

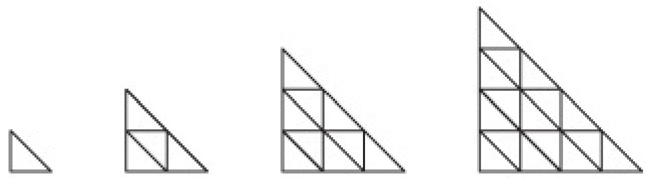
Questão 1. [1] Quando a irmã de Geraldo nasceu ele tinha 5 anos. Hoje sua irmã faz 9 anos. Quantos anos tem Geraldo?

a) 5 b) 9 c) 10 d) 14 e) 16

Questão 2. [1] Beatriz faz aniversário 17 dias depois do seu colega Antônio. Neste ano o aniversário de Antônio será domingo. Em que dia da semana será o aniversário de Beatriz?

a) Domingo b) Segunda c) Terça d) Quarta

Questão 3. [1] As figuras da sequência abaixo são formadas por triângulos pequenos. A quarta figura tem 16 triângulos. Mantendo esse padrão, quantos triângulos pequenos tem a quinta figura dessa sequência?



a) 20 b) 24 c) 25 d) 36 e) 49

O que podemos perceber nessas três questões? Todas as soluções envolvem a descoberta de alguma coisa que não varia (o invariante) e que é utilizada para concluir a questão. Vejamos:

Bom, para resolver o primeiro exercício a ideia central está em perceber que a diferença das idade de Geraldo e da sua irmã permanece a mesma com o passar dos anos. Logo Geraldo terá 6 anos quando ela tiver 1 ano, terá 7 quando ela fizer 2 anos e assim por diante. Logo na época que ela fizer 9 anos ele terá 14 anos.

Na segunda questão: Qual o padrão encontrado? O que não está variando?

Isso mesmo! Os dias da semana se repetem ciclicamente de sete em sete dias. Ou seja, se hoje é domingo daqui a sete dias será domingo novamente. Assim se o aniversário de Antônio foi num domingo, 7 dias depois é um domingo, 14 dias depois é domingo novamente e com mais 3 dias, o 17º dia, será uma quarta-feira.

Na terceira questão, temos uma sequência geométrica. Qual a relação de uma figura com a figura da posição anterior?
Justamente, cada nova figura é gerada pela figura anterior adicionando-se uma linha inferior de triângulos e esta nova linha tem uma quantidade ímpar de novos triângulos. Pois da figura 1 para a figura 2 adicionamos 3 triângulos, da 2 para 3 adicionamos 5 triângulos, e da 3 para a 4 foram adicionados 7 triângulos. Portanto, se seguirmos esse padrão a quinta figura terá a quantidade da figura 4 mais 9 novos triângulos. Como conseguimos contar 16 triângulos na figura 4 a quinta figura terá 16+9=25 triângulos.

Vamos aumentar agora um pouco a dificuldade das questões:

Questão 4. [2] Eu tenho o dobro da idade que tu tinhas quando eu tinha a tua idade. Quando tu tiveres a minha idade, a soma das nossas idades será de 45 anos. Quais são as nossas idades atuais?

Esse é um problema que caiu em vários vestibulares nas décadas de 70 e 80. Vamos chamar minha idade de x e a sua idade de y e formar uma tabelinha...

x	passado	presente	futuro
Eu		x	
Tu		y	

Como observado na primeira questão o que não varia é a diferença entre nossas idades. Que neste caso é $x - y$. Vamos completar a tabela usando os dados do problema; para preencher a coluna "passado" isolamos o seguinte trecho "quando eu tinha a tua idade", isso quer dizer que, na linha "eu" coluna passado, devo por o y referente a sua idade atual e na linha "tu" devo fazer o y menos a diferença de nossas idades $y - (y - x) = 2y - x$:

x	passado	presente	futuro
Eu	y	x	
Tu	$2y - x$	y	

Para a coluna "futuro" isolamos o trecho "Quando tu tiveres a minha idade" então, na segunda linha da coluna futuro coloco x, pois será quando tiveres minha idade, e na primeira linha vou colocar x mais a diferença de nossas idades $x + (x - y) = 2x - y$.

x	passado	presente	futuro
Eu	y	x	$2x - y$
Tu	$2y - x$	y	x

Questão 5. [3] Alice escreveu 2018 números naturais, com pelo menos 3 algarismos, em um quadro negro. Ela percebeu que o resultado da soma de todos esses números é um natural ímpar. Alice começou a fazer a seguinte brincadeira: pega um número apaga seu dígito da unidade, multiplica o número obtido por dois e deste subtrai o algarismo da unidade. Isto é, se Alice pega o número 157, assim o resultado obtido será 2 · 15 - 7 = 23. Mostre que, após Alice fazer essa brincadeira com todos os números que estavam no quadro, a soma desses novos números é ainda um número ímpar.

Qual o padrão encontrado aqui?
Observe que se um número é par, após as operações que Alice faz com esse número, o número escrito em seu lugar também é par. De forma análoga se o número é ímpar. Assim, cada nova parcela não altera a paridade da soma. Portanto, como a soma inicial era ímpar, a soma final também é ímpar.

Questão 6. [8] Três números a, b, c estão escritos num quadro. É permitido pegar um deles, digamos c e substituí-lo por $2a+2b-c$. É possível começando com $11, 12, 13$ chegar a tripla $20, 21, 22$?

Perceba que se c é ímpar então $2a + 2b - c$ também é ímpar. Se c é par, a expressão $2a + 2b - c$ também é par. Ou seja, essa transformação leva par em par e ímpar em ímpar. E a tripla $11, 12, 13$ é formada por dois ímpares e um par. Toda nova tripla tem que ter essa mesma paridade, tendo em vista que a transformação não troca a paridade dos elementos. E como a tripla $20, 21, 22$ é formada por dois pares e um ímpar é impossível chegar nela a partir da primeira com essas transformações.

Questão 7. [4] (58^{th} IMO) Para cada inteiro $a_0 > 1$, define-se a sequência $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots$ tal que, para cada $n \geq 0$:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, \text{ se } \sqrt{a_n} \text{ é inteiro} \\ a_n + 3, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

(*) Determine todos os valores de a_0 para os quais existe um número A tal que $a_n = A$ para infinitos valores de n.

Suponha que a_0 deixa resto 0 módulo 3, isto é, a_0 é múltiplo de 3. Vamos ver o que acontece com o $a_0 = 3$, temos que $3 \to 6 \to 9 \to 3 \to 6 \to 9 \to 3 \to \dots$

Vamos mostrar por indução que todo $a_0 = 3 \cdot k$ satisfaz (*), isto é, entra em um loop em algum momento. Nossa hipótese de indução é que todo $a_0 = 3 \cdot k$ satisfaz (*) para todo $k \leq n$. Agora considerando $a_0 = 3(n+1)$, seja m^2 o primeiro quadrado perfeito, múltiplo de 3, tal que $3(n+1) < m^2$. O termo seguinte dessa sequência é m, como $3|m^2$ então $3|m$. Ou seja, $m = 3 \cdot l$. Assim se $m < 3(n+1)$ então por hipótese de indução, m satisfaz (*). Se $3(n+1) \leq m$ então m é parte da sequência que leva a m^2 logo também satisfaz (*). Concluindo a indução. Note que um quadrado perfeito nunca deixa resto 2 módulo 3. Pois:

$$\begin{aligned} &\text{Se } n \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow n^2 \equiv 0 \pmod 3 \\ &\text{Se } n \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow n^2 \equiv 1 \pmod 3 \\ &\text{Se } n \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow n^2 \equiv 1 \pmod 3. \end{aligned}$$

Com essa observação concluímos que nenhum a_0 da forma $3k+2$ satisfaz a condição (*).

Agora suponha $a_0 = 3k+1$, isto é deixa resto 1 módulo 3. Vamos ver o que acontece com $a_0 = 1$, temos que, $1 \to 4 \to 2 \to 5 \to 8 \to 11 \to \dots$
Ou seja, essa sequência atinge um número que deixa resto 2 módulo 3 e pelo item anterior, ela não satisfaz (*). Afirmamos que o mesmo ocorre para todo $a_0 = 3k+1$. Novamente vamos usar indução.
Suponha que a afirmação é válida para todo $k \leq n$ e agora consideramos $a_0 = 3(n+1)+1$, então seja m^2 o primeiro quadrado perfeito que aparece nessa sequência gerada com este termo inicial. Assim existe j tal que $a_j = m^2$, o que implica $a_{j+1} = m$. Observe que $m^2 \equiv 1 \pmod 3$ o que implica que $m \equiv 2 \pmod 3$ ou $m \equiv 1 \pmod 3$. Se acontecer a primeira congruência caímos no caso anterior que já foi provado. Se tivermos a segunda congruência teremos $a_0 = 3(n+1)+1 < a_j = m^2 \leq (3n+1)^2$, logo $a_{j+1} = m \leq 3n+1$. O que satisfaz nossa hipótese de indução, concluindo o argumento.

Portanto, os números que entram numa sequência que repete seus termos uma infinidade de vezes são apenas os múltiplos de 3.

(Conjectura de Collatz) Dada a função

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{se é par} \\ 3 \cdot n + 1, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(k)}(n) = 1$.
Esse não é um exercício, é um problema em aberto, muito famoso, conhecido como conjectura de Collatz ou problema $3n+1$. Que afirma o seguinte: dado qualquer número, iterando essa função um número finito de vezes sempre chegaremos ao 1. Vejamos qual a ideia. Começando com $n = 3$ temos que $f(3) = 10$, $f^2(3) = f(10) = 5$, $f^3(3) = f^2(10) = f(5) = 16$ e $f^4(3) = 8$, $f^5(3) = 4$, $f^6(3) = 2$ e $f^7(3) = 1$. Denotando por uma seta cada iteração da função temos que

$$3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

Para $n = 7$ temos

$$\begin{aligned} &7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to \\ &26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to \\ &16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1. \end{aligned}$$

Esse problema é incrivelmente fácil de entender e difícil de provar. Até hoje continua um problema em aberto. Paul Erdös, comentou que talvez não estejamos desenvolvidos ao ponto de encarar esse tipo de problema.

Concluo aqui esse artigo e espero ter atingindo meu objetivo que era mostrar que podemos utilizar a ideia de invariantes desde problemas mais simples, problemas medianos, até problemas extremamente difíceis de pesquisa atual. Abaixo deixo alguns exercícios.

Exercícios propostos

Exercício 1. Um supermercado está promovendo a seguinte campanha de reciclagem de dois tipos de embalagens: latinhas de alumínio e garrafas pet vazias.

- Se uma pessoa entrega duas embalagens do mesmo tipo, ela recebe de volta uma latinha de alumínio cheia de suco.
- Se uma pessoa entrega duas embalagens de tipos diferentes, ela recebe de volta uma garrafa pet cheia de suco.

Se uma família conseguiu juntar 432 latinhas de alumínio e 341 garrafas pet vazias, efetuando somente sucessivas trocas nesse supermercado, ao final essa família ficará com uma latinha de alumínio ou com uma garrafa pet vazia?

Exercício 2. [5] Em um torneio de xadrez participaram mais de cinco competidores. Cada competidor jogou exatamente uma vez contra cada um dos outros competidores. Cinco dos competidores perderam cada um exatamente dois jogos. Todos os restantes competidores ganharam, cada um, exatamente três jogos. Não houve empates no torneio. Determinar quantos competidores participaram do torneio.

Exercício 3. Um tabuleiro $n \times n$ tem $n-1$ casas infectadas. A cada segundo, se um casa é adjacente, isto é ter dois lado em comum, a duas casas infectadas ela também torna-se infectada. Mostre que existe pelo menos uma casa que nunca será infectada.

Exercício 4. João tem l diamantes, e uma faixa infinita (em ambas as direções) de quadrados está desenhada no chão. Ele então distribui aleatoriamente estes diamantes sobre a faixa. E começa a fazer a seguinte brincadeira, se num determinado quadrado há dois diamantes é permitido pegá-los e passar um para o quadrado anterior e o outro para casa posterior. É possível voltar a configuração inicial após uma quantidade finita desses movimentos?

Exercício 5. [9] Dados $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, não todos iguais. Começando com (a, b, c, d) e repetidamente trocando por $(a-b, b-c, c-d, d-a)$. Verifique que pelo menos um dos números dessa quádrupla ficará arbitrariamente grande.

Referências

[1] Prova da OBMEP nível A, 2018. **OBMEP.** Disponível em: < http://www.obmep.org.br/provas.htm > Acesso em: 19 de nov. de 2021.

[2] Desafio 1: O problema das idades. **Portal SoMatemática** . Disponível em:< https://www.somatematica.com.br/ desafios/desafio1.php >, Acesso em 19 de nov. 2021.

[3] Problema 3, problemas propostos. **Jornal é matemática, Oxente!**, Recife,2018, Nº9, Vol 1. Disponível em:< http://ematematicaoxente.com.br/wp-content/uploads/2018/12/jornal_9ed.pdf >, Acesso em: 19 de nov. 2021.

[4] Imo 58: Problem 1. **IMO 2017**. Disponível em: <https://www.imo-official.org/problems.aspx > Acesso em: 19 de nov. de 2021.

[5] Problema 2, nível 1, Olimpíada de Maio 2019. Disponível em: < https://www.obm.org.br/content/uploads/ 2019/07/olimpiada_de_maio_2019.pdf > Acesso em: 19 de nov. 2021.

[6] Holanda, B.; Chagas, E., **Primeiros Passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra**, IMPA/OBMEP, 2018.

[7] Fomin, D.; Genkin, S.; Itenberg, I. **Círculos Matemáticos: A Experiência Russa.** IMPA/OBMEP, 2010.

[8] Andreescu, T.; Gelca, R. **Mathematical Olympiad Challenges**, Springer, 2008.

[9] Engel, A.; **Problem-Solving Strategies**, Springer, 1998.

2. Curiosidades

Volume de figuras semelhantes

Eudes Mendes Barboza[1] e Neiviton da Silva Paz [2]

O conceito de semelhança está associado à ideia de ampliação ou redução de uma forma sem alterar suas proporções. De maneira mais formal temos: dadas as figuras semelhantes F e F', para qualquer segmento $\overline{AB}$ de F, existe um segmento correspondente $\overline{A'B'}$ em F', tal que $\overline{AB} = r\overline{A'B'}$ em que r é denominado razão de semelhança de F e F'. Por exemplo, uma imagem espelhada numa tela de TV é semelhante à imagem da tela do celular que a espelha e uma bola de gude é semelhante a uma bola de sinuca.

Muitas vezes, nos concentramos na proporção em figuras planas quando se trata de semelhança, mas este tipo de relação pode ser observada em figuras tridimensionais, um exemplo bem simples disso é o seguinte:

Uma artesã produz peças de mesmo formato, mas com tamanhos diferentes. O preço de custo de cada peça é calculado com base no volume do material usado para sua confecção. O preço de custo de uma peça de madeira é de x reais. Qual deverá ser o preço de custo de outra peça no mesmo formato da anterior, feita com o mesmo material, mas com o dobro da sua altura? Para responder esse questionamento é necessário estabelecer uma relação entre o volume da peça menor com o da maior.

Como as peças têm o mesmo formato são figuras semelhantes e, assim, podemos estabelecer uma relação entre seus volumes. Por sabermos que uma tem o dobro da altura da outra, por um breve momento podemos ser levados a responder que o volume da maior seria o dobro da menor. Mas isso é um equívoco que podemos constatar com um exemplo bem simples. Se as figuras fossem cubos, um com 1 cm de aresta e outro com 2 cm, teríamos que o volume do primeiro cubo seria 1 cm^3, enquanto que o do segundo seria 8 cm^3. Dessa forma, podemos notar que a razão entre os volumes do cubo menor e do maior é

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Neste caso, inferimos que a razão entre os volumes dos cubos é o cubo da razão de semelhança entre as figuras, que é $\frac{1}{2}$. [3] Esta relação pode ser generalizada para quaisquer figuras semelhantes.

Teorema 2.1. *A razão de semelhança entre os volumes de dois sólidos semelhantes quaisquer é igual ao cubo da razão de semelhança.*

Para maiores detalhes ver [1, 2, 3]. Com este resultado, podemos verificar que o volume da maior peça produzida pela artesã é 8 vezes maior que o da menor, já que a razão de semelhança entre as alturas da maior pela menor é 2, e dessa forma podemos calcular o preço de custo da maior peça.

Referências

[1] Elon Lages Lima, *Medida e Forma em Geometria*, 1991, Tipografia Matemática, Rio de Janeiro.

[1] Professor do Departamento de Matemática da UFRPE

[2] Egresso do PROFMAT/UFRPE

[3] Um problema que trata desse mesmo princípio vem da Antiguidade. Conta-se que na Grécia antiga, os habitantes da ilha de Delos consultaram o oráculo de Ápolo como combater uma peste que assolava região. O oráculo, então, respondeu o altar de Apolo, de forma cúbica, deviria ser duplicado. Assim, teria surgido nascido o problema, também conhecido como "problema deliano", que pode ser enunciado como: dada a aresta de um cubo de medida a como construir a aresta de um segundo cubo medindo b de modo que seu volume seja o dobro do volume primeiro? Matematicamente, considerando-se um segmento de reta de comprimento a. O cubo que tem tal segmento como aresta terá volume $V_a = a^3$. Queremos, então, obter um segmento de reta de comprimento b, tal que o cubo associado, de volume $V_b = b^3$, satisfaça $V_b = 2V_a$. Dessa forma, segue-se que $b = \sqrt[3]{2}$a.

[2] Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado, *A Matemáica do Ensino Médio*, 1998, SBM, Rio de Janeiro.

[3] Neiviton da Silva Paz, *Propostas e análise de sequências didáticas para o ensino de áreas e volumes de figuras semelhantes*, 2021, Dissertação do PROFMAT.

3. Indicações de Leituras/Filmes

The shape of a life

Marcelo P. Santos[4]

O livro **The shape of a life**(‘*a forma de uma vida*’ em tradução livre) narra a biografia do matemático Shing-Tung Yau. Foi escrito pelo próprio Yau e por Steve Nadis um jornalista científico que já foi co-autor do Yau em outro livro [2]. Yau é um matemático chinês ganhador da medalha Fields em 1982. Tem importantes conceitos atrelados a seu nome, como por exemplo as *Variedades*[5] *de Calabi-Yau* que tem um papel relevante nas mais modernas teorias da Física. Os trabalhos de Yau foram cruciais para o desenvolvimento da análise geométrica, por isso, ele é considerado um dos maiores geômetras vivos, o que torna sua biografia uma leitura obrigatória para qualquer geômetra moderno.

Certamente deve ter algo único em um indivíduo para que ele consiga sair de um vilarejo pobre na China e alcançar os mais altos níveis da Matemática mundial ganhando o prêmio mais distinguido desta área.

Durante a leitura, podemos acompanhar, nas palavras do próprio protagonista, a história fantástica que cruza classes sociais, as culturas do Ocidente e do Oriente e as fronteiras entre a Física e a Matemática.

No livro Yau narra sua vida começando da infância extremamente pobre, as dificuldades da família, a admiração e perda do pai. Depois sua ida para os Estados Unidos e o início de seus sucessos científicos. Yau descreve seus contatos com inúmeros matemáticos de sucesso. Encontros com cientistas proeminentes como o famoso físico Stephen Hawking. Narra, em particular detalhe, a linha do tempo da sua intrincada relação com seu orientador S. S. Chern.

Yau também não se furta de contar as histórias de seus desentendimentos com outros cientistas. E por vezes não sacrifica a sinceridade pela gentileza. Em particular, sua versão do controverso envolvimento na resolução da Conjectura de Poincaré é abordada.

Em 2003 o russo Grigori Perelman deu provas da Conjectura de Geometrização de Thurston, particularmente, resultando na prova da Conjectura de Poincaré. As provas eram de difícil entendimento para a comunidade e alguns detalhes necessitavam ser esclarecidos. Nesse ínterim houve disputas sobre autorias de ideias. Inclusive levando a acusações ao Yau e alguns alunos seus. Yau conta no livro a sua versão desses acontecimentos.

Também é abordado o lado político do Yau na ajuda para criar centros matemáticos nos Estados Unidos e na China. É uma leitura importante a quem se interessa pela história da matemática recente.

Referência

[1] YAU, Shing-Tung; NADIS, Steve. The Shape of a Life. Yale University Press, 2019.

[2] YAU, Shing-Tung; NADIS, Steve. The Shape of Inner Space: String Theory and the Geometry of the Universe’s Hidden Dimensions. Basic Books, 2012. 377p.

[4]Professor do departamento de Matemática - UFRPE

[5]Variedade é uma generalização dos conceitos de curva (variedade de dimensão 1), e superfícies(variedade de dimensão 2), para dimensões maiores.

4. Quem pergunta, quer saber!

Valores lógicos da condicional

Por Severino Barros de Melo[6]

No número 20 do "É matemática, Oxente!" publicamos um artigo sobre lógica matemática, fazendo conexão com questões de olimpíadas de matemática. Achamos oportuno continuar no mesmo tema, dessa vez apresentando uma pergunta feita por um leitor da Revista do Professor de Matemática (nº 58, p.60), bem como a resposta dada pela revista.

Pergunta: Em lógica, os valores lógicos do condicional simples ($\rightarrow$) são citados nos livros sem uma justificativa, nem mesmo por um exemplo prático, o que desagrada os alunos. Que exemplos práticos poderiam ser dados para justificar a regra?

Resposta: Examine a sentença:

"Se às 10 horas a calçada ainda estará molhada às 11 horas".

Essa sentença só vai ser falsa (pelo senso comum) se chover às 10 horas e a calçada estiver seca às 11 horas.

Chamando p : "chove às 10 horas" e q : "a calçada está molhada às 11 horas", diz, então, o senso comum que ela somente será falsa se a situação $p \wedge \sim q$ for verdadeira.

Examinemos a tabela verdade de $p \wedge \sim q$ e sua negação:

p	q	$\sim p$	$(p \wedge \sim q)$	$\sim (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Por isso parece "razoável" fazer a tabela-verdade de $p \rightarrow q$ igual à tabela de $\sim (p \wedge q)$. Claro que frases do tipo "Se Roma é a capital da França, então $3+3 = 20$" são muito estranhas do ponto de vista do senso comum, mas são verdadeiras de acordo com a tabela-verdade. Um outro exemplo interessante é dado pelo episódio descrito abaixo.

O matemático G. H. Hardy ($1877 - 1947$) explicava a seus alunos que, se você admitir uma proposição falsa, então você pode, a partir dela, provar qualquer coisa. Um aluno incrédulo o desafiou: "então prove que se dois e dois são cinco, então eu sou o Papa!".

Hardy não se abalou: "Pois não: de $2 + 2 = 5$, ou seja, $4 = 5$, subtraindo 3 de ambos os membros, conclui-se que $1 = 2$. Agora, você e o Papa são duas pessoas, mas como $1 = 2$, então você e o Papa são um só".

Hardy, especialista em Teoria dos números, foi o maior matemático inglês do seu tempo. Extremamente tímido, era fanático por cricket. Muito conhecido é o seu livro Apologia de um matemático.

Nota da Redação do Jornal Oxente:

1. O episódio envolvendo o matemático britânico Godfrey Harold Hardy e seu aluno faz parte de diversos aspectos anedóticos que às vezes são associados à vida de determinados matemáticos. Vale destacar que o dicionário Aurélio define anedota como: "1. Relato sucinto de um fato jocoso ou curioso. 2. Particularidade engraçada de figura histórica ou lendária. 3. Piada."

2. Publicado originalmente em Inglês nos anos quarenta do século passado, A Mathematician's Apology chegou ao Brasil com o título de Em defesa de um matemático. É um livro no qual Hardy aborda a estética da matemática com algum conteúdo de caráter pessoal e fornece ao leigo uma chave de leitura para entender a mente de um matemático profissional.

[6] Professor do Departamento de Educação da UFRPE

5. Eventos

Depois de quase dois anos praticamente sem eventos programados em função da pandemia, nossa área (matemática, ensino de matemática e áreas afins) começa a dar sinais de uma gradual volta à normalidade. Segue informações sobre um primeiro evento em nível nacional que está sendo organizado.

- **X Bienal de Matemática**
  - Local: Belém- PA
  - Data: 20 a 24 de junho de 2022
  - Inscrições: 01/11/2021 a 30/04/2022
  - Mais informações: https://sbm.org.br/bienal/

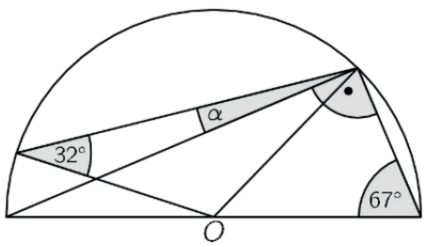
6. Problemas

Para concluir, convidamos o leitor a responder alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Problema 1. Determine as funções $f(x)$ que satisfazem a seguinte relação

$$f(-x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x + 1.$$

Problema 2. (Canguru de Matemática - 2021- Nível J) A figura mostra um semicírculo de centro O e vários ângulos inscritos, sendo 2 deles de medidas conhecidas.



Qual é o valor de α?

Problema 3. (Coletânea de problemas- Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº7, Setembro 2008) Considere uma sequência

$$(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \cdots)$$

cujos termos são os inteiros consecutivos em ordem crescente, e na qual o inteiro n ocorre n vezes. Qual o resto da divisão por 5 do 1993^o termo desta sequência?

Enviem as soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, o envio deve ser realizado até **01/03/2022**.

7. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n.19, Junho de 2021**.

Problema 1. Determine os pares de números inteiros positivos m e n que satisfazem a equação:

$$m^2 = n^2 + m + n + 2018.$$

Solução. A ideia para resolver essa questão é completar os quadrados, para tanto vamos multiplicar essa equação por 4, obtendo:

$$4m^2 = 4n^2 + 4m + 4n + 8072.$$

passando $4m$ para o outro lado da equação e somando um dos dois lados da equação temos que:

$$4m^2 - 4m + 1 = 4n^2 + 4n + 1 + 8072$$

que é equivalente a

$$(2m-1)^2 = (2n+1)^2 + 8072.$$

Chamando $a = 2m - 1$ e $b = 2n + 1$ temos que

$$a^2 - b^2 = 8072 \Rightarrow (a-b)(a+b) = 8072.$$

Para a equação acima ter solução a e b tem que ter mesma paridade, o que implica que $a+b$ e $a-b$ são ambos número pares. Assim temos duas possibilidades a analisar:

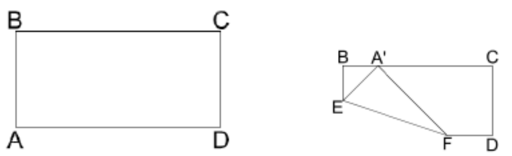
$$\begin{cases} a-b &= 2 \\ a+b &= 4036 \end{cases} \Rightarrow (a,b) = (2019, 2017)$$

e

$$\begin{cases} a-b &= 4 \\ a+b &= 2018 \end{cases} \Rightarrow (a,b) = (1011, 1007).$$

Como queremos as soluções em m e n a primeira solução implica em:
$2m-1 = a = 2019 \Rightarrow m = 1010$ e $2n+1 = b = 2017 \Rightarrow n = 1008$.
E $2m-1 = a = 1011 \Rightarrow m = 506$ e $2n+1 = b = 1007 \Rightarrow n = 503$. Portanto temos duas soluções $(m,n) = (1010, 1008)$ e $(m,n) = (506, 5003)$. □

Problema 2. (Questão da 21ª OMU - 2018) O vértice A de uma folha de papel retangular será dobrado sobre o lado BC de forma que as medidas BE e BA' sejam iguais, como mostra a figura.



Nas condições dadas, qual a medida do ângulo $B\hat{A}'E$?

Solução. Perceba que B faz parte do retângulo, desta forma, mede 90°. Pelo enunciado, BE e BA' devem ser iguais, portanto o triângulo formado é isósceles retângulo. Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° e sendo B um ângulo de 90°, temos que encontrar o valor de $\hat{A}$ e $\hat{E}$, que é o mesmo, uma vez que os lados são iguais. Portanto, $180° - 90° = 90°$. Logo a soma de $\hat{A} + \hat{E}$ mede 90°, sendo cada um deles um ângulo de 45°. □

Problema 3. (CMO-2019) Sejam a e b inteiros positivos tais que $a+b^3$ é divisível por $a^2+3ab+3b^2-1$. Prove que $a^2+3ab+3b^2-1$ é divisível pelo cubo de um inteiro maior que 1.

Solução. Defina $z = a^2+3ab+3b^2-1$. Por hipótese, existe um inteiro positivo c tal que $cz = a+b^3$.

Observe que

$$(a+b)^3 = a(a^2+3ab+3b^2) + b^3 = a(z+1) + b^3$$
$$= az + a + b^3 = az + cz.$$

Isto mostra que z divide $(a+b)^3$.

Suponha que a fatoração de $a+b$ como produto de números primos é da forma $p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$. Então, $z = p_1^{f_1} \cdot p_2^{f_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{f_k}$, em que $f_i \leq 3e_i$, para cada i, já que z divide $(a+b)^3$.

Se z não fosse divisível por um cubo perfeito maior que 1, então $0 \leq f_i \leq 2$ e assim $f_i \leq 2e_i$, para cada i. Assim, z dividiria $(a+b)^2$. Logo, $(a+b)^2 < a^2+3ab+3b^2-1 = z$, desde que $a, b \geq 1$, o que gera um absurdo.

Portanto, z é divisível por um cubo perfeito maior que 1. □