É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 20, volume 1, Setembro de 2021

ISSN 2526-8651

Editorial

Caros leitores,

É mais uma vez com imensa satisfação que estamos disponibilizando a edição nº 20 do nosso Jornal. O "É Matemática, OXENTE!" segue seu caminho sempre ligado no seu objetivo; ou seja, fornecer material de qualidade e estimular estudantes da educação básica em vista das Olimpíadas de Matemática. É claro que nessa trilha, conseguimos despertar interesse e curiosidade pela matemática para além do objetivo olímpico.

O lançamento da edição anterior foi sucedido de uma *live*, voltada para o contexto das Olimpíadas de Matemática. A palestra apresentada pelo Prof. Dr. Rodrigo José Gondim Neves, do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, com o título Somar para conquistar, está disponível em https://www.youtube.com/watch?v=Zk_BDz-NGMc. Foi uma experiência inicial que avaliamos importante e queremos incrementá-la com temas sempre mais interessantes e divulgação mais ampliada nas redes sociais.

O presente número apresenta na seção artigo, um trabalho que fala de Lógica Matemática. No dia a dia é comum ouvirmos "isso tem lógica", ou "esse raciocínio não tem lógica". Esse artigo revela de modo breve, como a lógica perpassa toda matemática e está presente de forma velada ou explícita em diversas questões de olímpiadas.

A seção curiosidades fornece informações a respeito do MacTutor History of Mathematics, um excelente banco de dados contendo conteúdo matemático, biografias e história da Matemática.

A seção Quem pergunta, quer saber! esclarece sobre os números irracionais a partir da classificação entre algébricos e transcendentes, um tema impregnado de História.

A indicação de leitura ou filme destaca a minissérie The Queen's Gambit que conta a história de uma garota norte americana cuja vida foi fortemente influenciada pela Matemática.

Quanto aos eventos, devido ao contexto adverso da pandemia, deixamos um link no qual é possível ter acesso a alguns que estão ocorrendo de forma remota.

O conteúdo da edição encerra, como de costume, com proposta de problemas olímpicos e discussão de resolução enviadas à redação.

Agradecemos desde já aos leitores que são a razão de ser do nosso trabalho e aos diversos colaboradores que nos ajudaram a concluir esta edição. Reforçamos que nosso jornal quer ser um veículo vivo e dinâmico, sempre atento e aberto às novidades. A propósito, ficaremos super felizes com algum retorno da parte dos leitores, abrindo um canal de diálogo com nossa equipe de redação.

Desejamos uma excelente leitura.

Sumário

1. Artigo

Vamos aprender a raciocinar?

Isis Gabriella de Arruda Quinteiro Silva
Universidade Federal do Agreste de Pernambuco
(Av. Bom Pastor s/n, Boa Vista) - Garanhuns-PE - Brasil
(55292-270)

Introdução

A palavra LÓGICA tem origem na palavra grega *logos* que está ligada a ideia, pensamento ou argumento e sua aprendizagem auxilia os estudantes no raciocínio, na compreensão de textos e no entendimento de tópicos avançados de matemática, proporcionando-lhes maior independência na solução de problemas e maior capacidade de abstração. A dificuldade na organização das ideias atinge a aprendizagem de outras áreas da ciência, além da Matemática, uma vez que a compreensão e coerência de textos evitam problemas de ambiguidade na interpretação, visto que as línguas naturais são sistemas lógicos [1]. A lógica auxilia no desenvolvimento do raciocínio, da ordem das ideias e juízos. Uma pessoa que domina os conhecimentos de lógica tem maior probabilidade de raciocinar corretamente do que aquela que não se aprofundou no estudo desse tema.

O termo "lógica" é muito usado no nosso dia a dia. A lógica informal é o que entendemos por senso comum. Por exemplo, suponha que eu esteja dentro de casa e alguém que vem de fora me fala que do lado de fora tem 20 pessoas com um guarda-chuva na mão. O senso comum nos leva a ter quase certeza de que está chovendo [2]. A lógica formal, por sua vez, tem como objeto de estudo as leis gerais do pensamento e as formas de aplicar essas leis corretamente na investigação da verdade e na comprovação de alguns fatos. A lógica matemática é o ramo da lógica formal que estuda as técnicas de demonstrações e a validade de argumentos que podem ser utilizadas para mostrarmos a validade de resultados matemáticos. Quando estamos construindo a matemática, precisamos de uma linguagem. Essa linguagem é a lógica matemática, uma vez que na matemática não podemos trabalhar com "quase certezas" como na lógica informal. A aprendizagem da lógica matemática não constitui um fim em si. Ela só tem sentido enquanto meio de garantir que nosso raciocínio proceda corretamente a fim de chegar a conclusões corretas através de fatos que as sustentem. Ao incentivar o aluno a construir ideias, argumentar e concluir fatos, o ensino da lógica matemática contribui para sua formação intelectual.

A lógica está presente em diversas áreas da matemática e seus fundamentos contribuem para a resolução ordenada de equações, na observação do valor da razão de uma sequência, na solução de problemas aritméticos e algébricos. O sucesso na matemática está ligado à curiosidade, investigação, dedução e senso organizacional das ideias. Todas essas características estão ligadas ao desenvolvimento do raciocínio lógico. A matemática precisa da lógica para embasar suas definições e postulados, além de ser de extrema importância para mostrar que um teorema é verdadeiro e a partir disso, chegar a outras conclusões e desenvolver novas teorias. Uma pesquisa em matemática consiste em procurar por padrões, formular conjecturas e, por meio das leis da lógica, obter novos resultados. Nesse sentido, podemos afirmar que a lógica é a base para o desenvolvimento da matemática.

De uma forma geral, podemos afirmar que as competições olímpicas de matemática têm como objetivo estimular o estudo da matemática e revelar talentos na área. Desta forma, o estudo da lógica é de suma importância nesse contexto como instrumento formador de indivíduos capazes de resolver problemas, argumentar e elaborar estratégias a fim de obter resultados importantes dentro (principalmente) da matemática.

Definições Básicas

O ponto de partida para o estudo da Lógica Proposicional (ou Lógica Dedutiva) é o termo proposição.

Definição 1.1. Uma proposição é uma afirmação (que pode ser escrita apenas com símbolos matemáticos) que satisfaz às seguintes propriedades:
Princípio do Terceiro Excluído: É verdadeira (V) ou falsa (F), não havendo uma terceira alternativa.
Princípio da Não-Contradição: Não é verdadeira (V) e falsa (F) simultaneamente.

Exemplo 1.1. São proposições as seguintes afirmações:
1. Recife é a capital de Pernambuco.
2. $4 + 5 = 10$.

Definição 1.2. Uma proposição p é chamada simples se ela não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma. No caso em que uma proposição é formada pela combinação de duas ou mais proposições, dizemos que ela é uma proposição composta. Quando uma proposição composta P é formada por proposições simples $p_1, p_2, ..., p_n$, escrevemos $P(p_1, p_2, ..., p_n)$.

Exemplo 1.2. São proposições simples:
1. Todo número divisível por 5 termina em 5.
2. O número 2027 é primo.
São proposições compostas:
1. O número π é irracional e $\sqrt{2008}$ é um número inteiro.
2. O número 2027 é primo ou é divisível por 3.

O Princípio do Terceiro Excluído nos diz que uma proposição simples tem valor lógico V ou F. Em se tratando de uma proposição composta, a determinação de seu valor lógico depende unicamente dos valores das proposições simples que a compõem. Considere, neste momento, a sentença $3x - 5 = 4$. Esta sentença não é uma proposição (pois não satisfaz o Princípio do Terceiro Excluído), mas torna-se uma proposição quando é atribuído algum valor para a variável x. Situações como essa nos impulsionam a fazer a seguinte definição.

Definição 1.3. Se A é um conjunto não-vazio, uma sentença aberta em A é uma expressão $p(x)$ tal que $p(a)$ é verdadeira ou falsa para qualquer $a \in A$. Em outras palavras, $p(x)$ se torna uma proposição quando a variável x é substituída por qualquer elemento do conjunto A. É possível definir uma sentença aberta com qualquer quantidade (finita!) de variáveis. Todas as definições feitas neste texto para sentenças abertas em uma variável, podem ser estendidas para um número qualquer de variáveis.

Exemplo 1.3. São sentenças abertas em uma e duas variáveis, respectivamente, as seguintes expressões:
1. $e^x \geq 10$, $x \in \mathbb{R}$.
2. $-2 < x + y < 8$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

Observe que, dada uma sentença aberta $p(x)$, com $x \in A$, podemos considerar as seguintes possibilidades:
1. $p(a)$ é verdadeira para todo elemento $a \in A$.
2. Existe (pelo menos um) elemento $a \in A$ tal que $p(a)$ é verdadeira.

Estas duas possibilidades podem ser escritas matematicamente sob a forma:
1. $p(a)$ é verdadeira, $\forall a \in A$.
2. $\exists\ a \in A$; $p(a)$ é verdadeira.

Os símbolos $\forall$ e $\exists$ são chamados, respectivamente, quantificador universal e quantificador existencial. No caso particular em que existe um único elemento $a \in A$ tal que $p(a)$ é verdadeira, escrevemos $\exists!\ a \in A$ tal que $p(a)$ é verdadeira e o quantificador $\exists!$ é chamado quantificador de existência e unicidade. Quando usamos quantificadores em uma sentença aberta, ela pode se tornar uma proposição. Proponho que o leitor pense no seguinte problema.

Problema 1.1. Quantos quantificadores são necessários para que uma sentença aberta em n variáveis se torne uma proposição?

Vejamos os seguintes exemplos de sentenças abertas com quantificadores.

Exemplo 1.4. 1. $\exists n \in \mathbb{N}$; $4n + 1 < 5$.
2. $\exists! x \in \mathbb{R}$; $x^4 + y^3 = 1$, com $y \in \mathbb{R}$.
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^4 + z^6 \geq 0$.

Assim como no início da infância conhecemos os números e, posteriormente, aprendemos a operar com eles, definiremos as operações com proposições (e com sentenças abertas) que aparecem usualmente na matemática. Estas operações obedecem a regras de um cálculo, denominado cálculo proposicional, semelhante ao da aritmética dos números. As operações lógicas são definidas na seção a seguir.

Operações Lógicas

Definição 1.4. Se p é uma proposição, a *negação* de p é a proposição representada por $\sim p$, obtida utilizando-se o conectivo "não", cujo valor lógico é o oposto do valor lógico da proposição p.

Exemplo 1.5. 1. p : π é um número irracional.
$\sim p$: π não é um número irracional.
2. $p : \forall x \in \mathbb{R}$; $e^x \leq 5$.
$\sim p : \exists x \in \mathbb{R}; e^x > 5$.
3. $p(x) : x \geq 5$. $\quad\sim p(x) : x < 5$.
4. $p(x) : x^2 > 5$. $\quad\sim p(x) : x^2 \leq 5$.

Observação 1.1. Com base no item 2 descrito anteriormente, vale destacar que, sendo $p(x)$ uma setença aberta em uma variável x, a negação da proposição "$\forall\ x \in A$; $p(x)$ é verdadeira" é dada por "$\exists\ a \in A$; $\sim p(a)$ é verdadeira". Neste caso, o elemento $a \in A$ é chamado *um contraexemplo* para a sentença $p(x)$.

Exemplo 1.6. As seguintes proposições são falsas.
1. Todo número primo é ímpar.(Esta proposição pode ser escrita sob a forma "$\forall\ n \in A$, n é ímpar", onde A é o conjunto dos números naturais primos). Contraexemplo: $p = 2$.
2. A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional. Contraexemplo: $a = \sqrt{2}$ e $b = 3 - \sqrt{2}$.

Definição 1.5. Duas proposições p e q podem ser combinadas através do conectivo "e" para formar uma nova proposição que é chamada de *conjunção* de p e q, e representada pelo símbolo $p \wedge q$, cujo valor lógico aparece na tabela abaixo.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabelas (como a anterior) em que figuram os possíveis valores lógicos de uma proposição composta em função dos valores lógicos das proposições simples que a compõem, são chamadas tabelas-verdade.

Exemplo 1.7. p : π é um número irracional , q: 245 é um número par, $p \wedge q$: π é um número irracional e 245 é um número par.

No cálculo proposicional, adotamos a convenção de que $\sim$ tem prioridade sobre $\wedge$. Sendo assim, escrever $(\sim p) \wedge (\sim q)$ é o mesmo que escrever $\sim p\ \wedge \sim q$.

Na língua portuguesa, existe uma ambiguidade no uso da palavra "ou". Por exemplo, a proposição "Vou fazer faculdade de medicina ou de matemática", indica que quem a afirma pode escolher apenas um dos dois cursos ou ambos os cursos. Por outro lado, na proposição "Meu pai biológico é Pedro ou José", apenas uma das opções dadas será escolhida, não podendo serem ambas verdadeiras. Na matemática e na lógica não podemos admitir ambiguidade. Por isso, definimos dois tipos de disjunção.

Definição 1.6. Duas proposições p e q podem ser combinadas através do conectivo "ou" para formar uma nova proposição que é chamada de *disjunção* de p e q, e representada pelo símbolo $p \vee q$, cujo valor lógico aparece na tabela abaixo.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo 1.8. p : π é um número irracional , q: 245 é um número par, $p \vee q$: π é um número irracional ou 245 é um número par.

Definição 1.7. A *disjunção exclusiva* entre duas proposições p e q utiliza o conectivo "ou" para formar uma nova proposição representada pelo símbolo $p \veebar q$, cujo valor lógico aparece na tabela abaixo. Algumas vezes utilizamos a expressão "ou p ou q" no caso da disjunção exclusiva para ressaltarmos que tipo de disjunção estamos utilizando.

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo 1.9. p : $\cos(\pi) = 1$, q: 24 é um número par, $p \veebar q$: Ou $\cos(\pi) = 1$ ou 24 é um número par.

Definição 1.8. Dadas duas proposições p e q, chama-se *condicional* uma proposição da forma "Se p, então q", cujo valor lógico é descrito na seguinte tabela.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A condicional é representada pelo símbolo $p \to q$, que pode ser lido também como *"p é condição suficiente para q"* ou *"q é condição necessária para p"*.

Exemplo 1.10. Se $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, então $\tan(\frac{5\pi}{4}) = 1$.

Observação 1.2. 1. Uma condicional $p \to q$ NÃO afirma que q é uma consequência de p. Na verdade, o valor lógico de $p \to q$ depende unicamente dos valores lógicos de p e q e não dos conteúdos dessas proposições.
2. Dada uma proposição condicional $p \to q$, definimos as seguintes proposições associadas a ela:
a. Proposição Recíproca $q \to p$.
b. Proposição Contrarrecíproca (ou Contrapositiva): $\sim q \to \sim p$.
c. Uma proposição condicional $p \to q$ tem sempre o mesmo valor lógico que sua contrarrecíproca.(Construa as tabelas-verdade das duas proposições e verifique que elas coincidem!)

Definição 1.9. Dadas duas proposições p e q, chama-se *bicondicional* uma proposição da forma "p se, e somente se, q", cujo valor lógico é descrito na tabela-verdade.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

A bicondicional é representada pelo símbolo $p \leftrightarrow q$, que pode ser lido também como *"p é condição necessária e suficiente para q"* ou *"q é condição necessária e suficiente para p"*.

Exemplo 1.11. Dado um número natural n, tem-se que n é par se, e somente se, n^2 é par.

As operações lógicas definidas anteriormente para duas proposições podem ser feitas para duas sentenças abertas definidas num conjunto A de maneira análoga. Tente escrever essas definições!

Implicação Lógica e Equivalência Lógica

Definição 1.10. Dadas duas proposições p e q, dizemos que *"p implica q"* quando q for verdadeira todas as vezes em que p for verdadeira, ou ainda, quando podemos deduzir que q é verdadeira a partir da suposição de que p é verdadeira. Neste caso, escrevemos $p \Rightarrow q$.

Outra forma de entendermos uma implicação lógica é olhando para a tabela-verdade da proposição condicional $p \rightarrow q$. Dizemos que "p implica q" quando a proposição condicional $p \rightarrow q$ é uma tautologia (é sempre verdadeira independentemente dos valores lógicos de p e q). Desta forma, relacionamos a implicação lógica com a proposição condicional. Com base nisto, podemos pensar na recíproca e na contrarrecíproca de uma implicação lógica. Quando $p \Rightarrow q$, a proposição p é chamada *hipótese* e a proposição q é chamada *tese*. Neste caso, também dizemos que *p é condição suficiente para q* ou que *q é condição necessária para p*.
Note que, por definição, uma condicional $p \rightarrow q$ é falsa apenas quando p é verdadeira e q é falsa. Neste caso, dizemos que p não implica q e escrevemos $p \nRightarrow q$. Um erro muito comum cometido pelo uso incorreto da implicação lógica é ilustrado na tirinha a seguir:

Figura 1.1: Garfield

O que há de errado no pensamento do Garfield?

Exemplo 1.12. n é um número natural par $\Rightarrow n^2$ é par.

Solução: Supondo que n é um número natural par, podemos escrever $n = 2k$, para algum número natural k. Daí, temos $n^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$, o que nos diz que n^2 é um número par.

Definição 1.11. Dizemos que duas proposições p e q são *logicamente equivalentes* quando suas tabelas-verdade são idênticas. Neste caso, escrevemos $p \Leftrightarrow q$.

Outra forma de definirmos a equivalência lógica entre duas proposições é verificar que isto só ocorre quando a bicondicional $p \longleftrightarrow q$ é uma tautologia.

Dadas duas proposições p e q, as seguintes equivalências são muito utilizadas dentro da lógica matemática. Propomos mais uma vez que o leitor tente demonstrá-las!

1. $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
2. $\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \ \wedge \sim q)$
3. $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
4. $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$
5. $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$
6. $\sim(\forall x \in A, p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in A, \sim p(x)$

A segunda equivalência citada anteriormente, nos diz que para mostrarmos que $p \nRightarrow q$, basta mostrarmos que p é verdadeira e q é falsa. Da equivalência 3 concluímos que para verificarmos uma equivalência lógica $p \Leftrightarrow q$ basta verifcarmos que $(p \Rightarrow q)$ e que $(q \Rightarrow p)$. Com base nesta afirmação, podemos enxergar uma equivalência lógica como uma implicação "de ida" e uma implicação "de volta", ou ainda, como uma implicação e sua recíproca.

Técnicas de Demonstração

Todo resultado matemático precisa ser demonstrado para que possa ser considerado verdadeiro e possa ser utilizado dentro da teoria matemática. Quando isso é feito, o resultado pode ser chamado de teorema. Um teorema é uma implicação lógica $p \Rightarrow q$, cuja validade é garantida por meio de uma demonstração [4]. Demonstrar um teorema nada mais é do que mostrar que $p \Rightarrow q$ o que, atendendo que p seja verdadeira, equivale a mostrar que q é verdadeira. Podemos elencar três técnicas que são usualmente utilizadas para demonstrar uma implicação lógica $p \Rightarrow q$.
Demonstração Direta: Trata-se de supor que a proposição p é verdadeira e, a partir deste fato e por meio de argumentos válidos (ver [3]), mostrar que a proposição q é verdadeira.

Exemplo 1.13. Mostre que a soma de um número natural par com um número natural ímpar é sempre um número ímpar.

Solução: Podemos escrever este enunciado da seguinte forma: "Mostre que, dados $a, b \in \mathbb{N}$, tem-se que a é par e b é ímpar $\Rightarrow a + b$ é ímpar". Faremos uma demonstração direta deste resultado, isto é, supomos que a é par e b é ímpar, isto é, $a = 2k$ e $b = 2m + 1$, onde $k, m \in \mathbb{N}$. Temos:

$$a + b = (2k) + (2m + 1) = 2n + 1,$$

onde $n = k + m \in \mathbb{N}$. Isto demonstra o resultado.

Exemplo 1.14 (Banco de Questões da OBMEP-2010- Níveis 1 e 2)**.** Luisa, Maria, Antônio e Júlio são irmãos. Dois deles têm a mesma altura. Sabe-se que Luisa é maior que Antônio, Antônio é maior do que Júlio, Maria é menor do que Luisa e Júlio é menor do que Maria. Quais deles têm a mesma altura?

Solução: A fim de simplificar a notação, vamos representar cada um dos personagens pela letra inicial do seu nome. Sendo assim, Maria= M, Luisa= L, Júlio= J e Antônio= A. Cada informação fornecida anteriormente nos itens $(a) - (d)$ são proposições verdadeiras. Com base nessas proposições, podemos concluir que $L > A > J$ e $L > M > J$, onde o símbolo $>$ representa ser "mais alto". Assim, Luisa é maior que todos os seus irmãos. Note que nem Antônio nem Maria podem ser o mais baixo de todos, uma vez que ambos são mais altos do que Júlio. Sendo assim, Júlio é o mais baixo de todos e, por consequência, Antônio e Maria possuem a mesma altura.

Exemplo 1.15 (Banco de Questões OBMEP 2010-Nível 1- Questão 60)**.** As vizinhas Elza, Sueli, Patrícia, Heloísa e Cláudia chegam juntas do trabalho e começam a subir as escadas do prédio de cinco andares onde moram. Cada uma mora num andar diferente. Heloísa chega ao seu andar depois de Elza, mas antes de Cláudia. Quando Sueli chega ao seu andar, Heloísa ainda tem dois andares para subir e o mesmo ocorre com Patrícia quando Elza chega ao seu andar. Sueli não mora no primeiro andar. Em qual andar mora cada uma delas?

Solução: Todas as informações dadas no enunciado são proposições verdadeiras de onde devemos partir a fim de chegar a uma conclusão. Como Sueli não mora no primeiro andar, concluíos que no primeiro andar só quem pode morar é Elza. Como Patrícia ainda tem dois andares para subir quando Elza chega ao seu andar, Patrícia mora no terceiro andar. Neste momento estão desocupados apenas os andares de números $2, 4$ e 5. Da mesma forma, como Heloísa ainda tem dois andares para subir quando Sueli chega ao seu andar, concluímos que Sueli mora no segundo e Heloísa no quarto andar. Finalmente, Cláudia mora no quinto andar.

Demonstração pela Contrapositiva: Uma proposição condicional $p \to q$ é sempre logicamente equivalente à sua contrarrecíproca (ou contrapositiva). Isto nos fornece um poderoso meio de demonstração de resultados matemáticos pois, uma vez que um teorema é, em geral, uma implicação lógica, mostrar a validade desta implicação é o mesmo que mostrar a validade de sua contrapositiva.

Exemplo 1.16. Mostre que, se n é um número natural e n^2 é par, então n é par.

Solução: Vamos mostrar que a contrapositiva da proposição dada é verdadeira. Se n não é par, $n = 2k - 1$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Assim, temos:

$$n^2 = (2k - 1)^2 = 2(2k^2 - 2k) + 1.$$

Logo, n^2 não é par.

Exemplo 1.17. n é um número natural primo $\Rightarrow \sqrt{n}$ é irracional.

Solução: Vamos mostrar que a contrarrecíproca desta afirmação é verdadeira. Suponha que $\sqrt{n}$ é racional, isto é,

$$\sqrt{n} = \frac{a}{b},$$

onde a e b são números naturais primos entre si. Daí, $n.b^2 = a^2$. Ao pensarmos na fatoração de a e de b como produto de números primos (veja o Teorema Fundamental da Aritmética), observamos que se um fator primo m aparece na fatoração de a, aparecerá do lado direito da última equação um número par de vezes, enquanto que do lado esquerdo da equação, este fator deverá aparecer um número par de vezes na fatoração de n também. Desta forma, n não seria primo.

Exemplo 1.18 (Banco de Questões OBMEP 2010-Nível 1- Questão 217)**.** Joãozinho sempre mente nas terças-feiras, quintas-feiras e sábados e, no restante dos dias da semana, fala a verdade. Um dia, Pedrinho encontra Joãozinho o ocorre o seguinte diálogo. Pedrinho pergunta: Que dia é hoje? Joãozinho responde: Sábado. Pedrinho pergunta: E que dia será amanhã? Joãozinho responde: Quarta-feira. Em que dia da semana Pedrinho encontrou Joãozinho?

Solução: Tendo Joãozinho afirmado que o dia em que Pedrinho o encontrou era sábado, temos duas possibilidades diante disso. São elas: ou Joãozinho mentiu ou falou a verdade. Note que Joãozinho não pode ter falado a verdade porque, neste caso, ele teria dito a verdade num dia de sábado, o que contraria a informação dada no texto. Portanto, Joãzinho mentiu. Sendo assim, este dia só pode ser terca-feira, quinta-feira ou sábado. Entretanto, já sabemos que não é sábado porque Joãozinho mentiu. Assim, só nos resta as opções de ser terça-feira ou quinta-feira. Considerando a segunda pergunta de Pedrinho, Joãozinho pode ter respondido falando a verdade ou mentindo. Se ele falou a verdade na segunda resposta, o dia do encontro seria terça-feira (uma vez que o dia seguinte seria quarta-feira). Desta forma, Joãozinho teria falado a verdade numa terça-feira contrariando a informação dada. Portanto, Joãozinho mentiu também na segunda resposta. Logo, o dia seguinte ao encontro deles, não pode ser quarta-feira, o que acarreta no fato de que o dia do encontro não é terça-feira. Concluímos então que o dia do encontro é quinta-feira.

Demonstração por Redução ao Absurdo: Esta técnica de demonstração consiste em, a fim de mostrarmos que uma implicação lógica $p \Rightarrow q$ é válida, supormos que p é verdadeira e que q é falsa, isto é, iniciamos a demonstração supondo que $p \wedge (\sim q)$ é verdadeira. A partir disto, devemos concluir ser verdadeira uma proposição falsa qualquer c. Desta forma, estamos mostrando que $(p \wedge \sim q) \Rightarrow c$, ou ainda, que $p \Rightarrow (\sim q \rightarrow c)$. Como $\sim q \rightarrow c$ é logicamente equivalente a $(\sim\sim q \vee c)$ e $(\sim\sim q \vee c) \Leftrightarrow q \vee c \Leftrightarrow q$, mostramos que $p \Rightarrow q$.

Exemplo 1.19. Mostre que o conjunto dos números naturais primos é infinito.

Solução: Este enunciado poderia ter sido escrito sob a forma: "A é o conjunto dos números naturais primos $\Rightarrow$ A é infinito". Devemos então mostrar tal implicação lógica. Para isto, faremos uma demonstração por redução ao absurdo. Suponha que o conjunto dos números naturais primos A é finito, isto é, $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Considere o número natural $m = a_1.a_2...a_n + 1$. Note que m não é divisível por nenhum dos números $a_1, a_2, ..., a_n$. Logo, m deve ser um número primo e, assim, teríamos $m \in A$, o que é um absurdo pois m é maior que todos os elementos do conjunto A. Portanto, o conjunto dos números naturais primos é infinito.

Exemplo 1.20. ([5]) Em um congresso internacional de matemáticos, cada participante apertou as mãos de um certo número de outras pessoas. Duas pessoas não se cumprimentaram mais de uma vez. Explique porque a quantidade de pessoas que apertaram as mãos um número ímpar de vezes deve ser um número par.

Solução: Iniciamos observando que a soma dos números de apertos de mãos dados por cada pessoa é um número par, isto é, se a pessoa P_i deu n_i apertos de mãos, então $n_1 + n_2 + ... + n_k$ é um número par, pois cada aperto de mão é contado duas vezes (uma para cada pessoa). Neste momento, usaremos os seguintes resultados (Proponho ao leitor fazer as demonstrações!):

- A soma de dois números pares é sempre um número par.

- A soma de um número par com um número ímpar é sempre um número ímpar.

- A soma de dois números ímpares é sempre um número par.

Como base nesses resultados, concluímos que o número de parcelas ímpares na soma anterior é par.

Isto porque se tivéssemos um número ímpar de parcelas ímpares, teríamos a soma de um número ímpar com um número par resultando em um número par, o que resultaria num absurdo.

Exemplo 1.21 (OBMEP 2012 - 1 Fase - Níveis 1,2 e 3)**.** Três casais fizeram compras em uma livraria. Vitor comprou 3 livros a mais do que Lorena e Pedro comprou 5 livros a mais do que Cláudia. Cada um dos homens comprou 4 livros a mais do que a respectiva esposa. Lorena e Cláudia compraram mais livros que Bianca, que só comprou 3 livros. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
(i) Vitor comprou mais livros do que Pedro.
(ii) Pedro é marido de Cláudia.
(iii) Pedro foi o marido que comprou o maior número de livros.
(iv) Cláudia comprou um livro a mais do que Lorena.
(v) Vitor é marido de Bianca.

Solução: Inicialmente, iremos denotar por H o terceiro homem do problema cujo nome não foi especificado. Para cada mulher, citada temos três possibilidades de marido. Com base nas proposições verdadeiras "Cada um dos homens comprou 4 livros a mais do que a respectiva esposa", "Vitor comprou 3 livros a mais do que Lorena" e "Pedro comprou 5 livros a mais do que Cláudia", concluímos que Vitor não é marido de Lorena e Pedro não é marido de Cláudia (caso contrário, teríamos um absurdo!). A proposição "Pedro comprou 5 livros a mais do que Cláudia" acarreta no fato de que a esposa de Pedro comprou 1 livro a mais que Cláudia. Como Bianca só comprou 3 livros e "Cláudia comprou mais livros que Bianca", a esposa de Pedro só pode ser Lorena. Temos então o primeiro casal: Lorena e Pedro.
Sendo assim, o marido de Bianca só pode ser H ou Vitor. Se for Vitor, como "Bianca comprou 3 livros" e "Cada um dos homens comprou 4 livros a mais que sua respectiva esposa", Vitor teria comprado 7 livros. Como "Vitor comprou 3 livros a mais que Lorena", Lorena teria comprado 4 livros. Mas isto é um absurdo pois se Lorena comprou 4 livros, Cláudia comprou 3 e, portanto, a proposição "Cláudia comprou mais livros que Bianca" seria falsa. Logo, Vitor não pode ser o marido de Bianca e, assim, temos outro casal: Bianca e H. Concluímos então que o terceiro casal é Cláudia e Vitor.
Para finalizar, vamos analisar a veracidade das proposições apresentadas nos itens dados. No item (i), temos que "Vitor comprou mais livros do que Pedro". Isto não é verdade pois Vitor é marido de Cláudia e Pedro é marido de Lorena. Além disso, Lorena comprou 1 livro a mais que Cláudia. O item (ii) é falso pois sabemos que o marido de Cláudia é Vitor. O item (iii) é verdadeiro tendo em vista que Pedro é o marido de Lorena que foi a mulher que mais comprou livros e ele comprou 4 livros a mais que ela. O item (iv) é falso pois vimos que Lorena comprou 1 livro a mais que Cláudia. O item (v) é falso pois o marido de Bianca é H.

Problemas Propostos

Problema 1.2. (OBMEP 2012 - 1 Fase - Nível 2) Ana, Bernardo, Célia e Danilo repararam que Danilo é mais alto que Célia e que as diferenças entre as alturas de Célia e Ana é igual à diferença entre as alturas de Ana e Danilo. Observaram também que a soma das alturas dos dois rapazes é igual à soma das alturas das duas garotas. Qual das alternativas a seguir é verdadeira?

1. Célia é mais alta que Ana.
2. A diferença entre as alturas dos meninos é igual à diferença entre as alturas das meninas.
3. Célia é a mais baixa do grupo.
4. A diferença entre as alturas de Danilo e Célia é igual à diferença entre as alturas de Ana e Bernardo.
5. Ana é a mais alta de todos.

Problema 1.3. (OBMEP 2015 - 1 Fase - Níveis 1,2 e 3) Daniel e mais quatro amigos, todos nascidos em estados diferentes, reuniram-se em torno de uma mesa redonda. O paranaense sentou-se tendo como vizinhos o goiano e o mineiro. Edson sentou-se tendo como vizinhos Carlos e o sergipano. O goiano sentou-se tendo como vizinhos Edson e Adão. Bruno sentou-se tendo como vizinhos o tocantinense e o mineiro. Quem é o mineiro?

Problema 1.4. (OBMEP 2019 - 1 Fase - Níveis 1, 2 e 3) Arnaldo, Beto, Celina e Dalila formam dois casais. Os quatro têm idades diferentes. Arnaldo é mais velho que Celina e mais novo que Dalila. O esposo de Celina é a pessoa mais velha. É correto afirmar que:

1. Arnaldo é mais velho que Beto e sua esposa é Dalila.
2. Arnaldo é mais velho que sua esposa Dalila.
3. Celina é a mais nova de todos e seu marido é Beto.
4. Dalila é mais velha que Celina e seu marido é Beto.
5. Celina é mais velha que seu marido Arnaldo.

Problema 1.5. (OBMEP 2013 - 1 Fase - Níveis 1, 2 e 3) Durante a aula dois celulares tocaram ao mesmo tempo. A professora logo perguntou aos alunos: "De quem são os celulares que tocaram?". Guto disse: "O meu não tocou.", Carlos disse : "O meu tocou." e Bernardo disse: "O de Guto não tocou". Sabe-se que um dos meninos disse a verdade e os outros dois mentiram. Qual das seguintes alternativas é verdadeira?

1. O celular de Carlos tocou e o de Guto não tocou.
2. Bernardo mentiu.
3. Os celulares de Guto e Carlos não tocaram.
4. Carlos mentiu.
5. Guto falou a verdade.

Referências

[1] www.revel.inf.br, Edição especial n.8 (2014). Acesso em 09/08/2021.

[2] *Introdução à Lógica Matemática Portal da matemática OBMEP.*

[3] Edgar de Alencar Filho, *Introdução à Lógica Matemática*, Editora NOBEL (2007).

[4] Daniel Cordeiro de Moraes Filho, *Um convite à matemática*, EDUFCG (2007).

[5] http://clubes.obmep.org.br/blog/2020/11/cumprimentos-matematicos/. Acesso em 01/09/2021.

[6] http://clubes.obmep.org.br/blog/. Acesso em 03/08/2021.

2. Curiosidades

MacTutor History of Mathematics

Hellen Priscila de Souza Santos[1]

O site MacTutor History of Mathematics é mantido por John J. O'Connor e Edmund F. Robertson (professores e pesquisadores da Escola de Matemática e Estatística da Universidade de St. Andrews, na Escócia). Na plataforma estão contidos diversos materiais sobre a história da matemática, dentre eles: biografias detalhadas de muitos matemáticos históricos e contemporâneos, informações sobre curvas famosas e vários tópicos da história da matemática.

Um fato muito interessante é a presença de subdivisões para a matemática de várias culturas, como por exemplo: africana, islâmica antiga, indiana antiga, dentre outras, em que constam unicamente biografias de matemáticos e matemáticas de tais culturas. Ainda nessas subdivisões, está presente uma aba destinada exclusivamente para matemáticas, independente da cultura. Essa iniciativa é de grande valia, uma vez que dá visibilidade para aqueles que contribuíram para o desenvolvimento da matemática, porém são pouco (ou não são) creditados pelos seus feitos.

[1]Licencianda em matemática - UFRPE e monitora do Jornal É Matemática, Oxente!

O History of Mathematics foi uma consequência do sistema Mathematical MacTutor, um banco de dados HyperCard (banco de arquivo simples, com uma interface gráfica, flexível e modificável pelo usuário), dos mesmos autores, que lhes rendeu o prêmio European Academic Software em 1994, mesmo ano de fundação de seu site.

Como já citado, o site não contempla apenas biografias, em uma de suas subdivisões, denominada "tópicos matemáticos" encontramos alguns temas que nos levam a subtemas. Por exemplo, ao clicar no tema "análise", somos apresentados aos seguinte subtemas: tentativas de entender os números reais; história do cálculo; conceito de função; funções elípticas; conceito de função; história do cálculo; números reais: tentativas de entender; números reais: Pitágoras a Stevin; números reais: Stevin a Hilbert e funções trigonométricas. Outros temas tão interessantes quanto esse também estão disponíveis, tais como: álgebra; geometria; topologia; números e teoria dos números e astronomia matemática.

Uma divisão muito interessante é o "mapa" que nos leva a um mapa-múndi com vários pontos onde, ao clicarmos sobre algum destes, aparece(m) o(s) matemático(s) e matemática(s) que ali nasceram. Por exemplo: ao olharmos para o Brasil e clicarmos no ponto referente a Recife, o mapa nos informa que os matemáticos Paulo Ribenboim e Carlos Lyra são naturais da cidade e ainda é possível ver suas respectivas biografias.

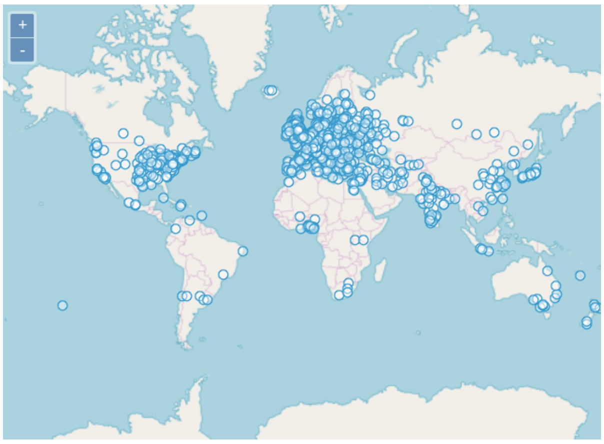


Figura 2.1: Mapa do local de nascimento - foto retirada do site

O MacTutor está em constante desenvolvimento e expansão, sua última atualização foi em junho de 2021, quando foram adicionadas 9 biografias, 21 biografias expandidas e 29 novas entradas na categoria de material adicional.

Referências

[1] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/. Acesso em 28/07/2021.

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/MacTutor_History_of_Mathematics_archive. Acesso em 28/07/2021.

3. Indicações de Leituras/Filmes

The Queen's Gambit. (O Gambito da Rainha)

Valdênis Martins da Silva Júnior[2]

Criada por Scott Frank e Allan Scott com o lançamento no ano de 2020 pela plataforma Netflix, a minissérie com sete episódios se passa na década de 60, nos Estados Unidos da América. A obra conta a história de Elizabeth Harmon (Anya Taylor-Joy) que aos nove anos de idade tornou-se órfã após sua mãe, Alice Harmon (Chloe Pirrie), cometer suicídio em um acidente de carro. Logo após, Elizabeth vai parar em um orfanato católico/feminino e se depara com novas regras e novos costumes. Nesse orfanato, ela vai descobrir sua maior habilidade, através do zelador, Sr. Shaibel, que depois de muita persistência de Beth, acaba lhe apresentando o jogo de xadrez. Desde então ela percebeu que existiam padrões, cada peça do tabuleiro se mexia de formas diferentes das outras, mas ainda não sabia que o jogo possui jogadas específicas de ataque e defesa que facilitam a vitória. Ficou

[2]Estudante de Licenciatura em Matemática- UFRPE

a cargo do Sr. Shaibel ensiná-la todas as estratégias que ele conhecia. Porém, o que mais ninguém sabia era que o que ajudava Beth a potencializar suas habilidades no xadrez eram as pílulas verdes que o próprio orfanato obrigava todas as garotas tomarem com efeito tranquilizante. Entretanto, para Elizabeth essas pílulas ajudavam a desenvolver uma nova capacidade de visualizar todas as suas possibilidades de jogadas, mas também trouxeram o seu primeiro vício na vida. Com o passar dos anos, depois de ser adotada por uma família, Elizabeth encontra a notícia no jornal que aconteceria um pequeno campeonato regional de xadrez. Mesmo sem dinheiro e sem apoio, ela consegue vencer todas as partidas de maneira incrível. Daí em diante foram várias competições em todas as partes do país.

A justificativa de indicação da minissérie está no fato de que o xadrez é um dos jogos mais antigos conhecidos e para ser um bom enxadrista são requeridas habilidades na qual a matemática se envolve diretamente, como compreender e solucionar problemas, analisar, justificar, prever ações, entre outras. No jogo existem diversos problemas matemáticos como o problema das 8 damas, que consiste em colocar 8 damas no tabuleiro de forma que elas não se ataquem. Outra questão é dita como o problema do cavalo ou passeio do cavalo onde corresponde usar um tabuleiro vazio, escolher uma casa para iniciar e então movimentar a peça cavalo por todas as casas de maneira onde é necessário percorrer todas as casas restantes uma única vez até voltar ao seu ponto de partida.

Algumas escolas adotam o xadrez como ferramenta matemática de aprendizagem pelo fato de desenvolver o raciocínio lógico, tomada de decisões, desenvolvimento individual ou em grupo, criatividade e imaginação.

Um fato curioso é dado pela escolha do título da série, faz referência a um movimento de abertura de modo que se defende bem e ataque de forma eficaz. Quando lançada, a série alcançou números altos de audiência e conseguiu ser a minissérie mais assistida da plataforma. Também transferiu o sentimento de querer entender e aprender o jogo, as estratégias, trazer o mundo à tona. Com isso, as pesquisas no Google aumentaram nesse aspecto.

Para quem gosta de uma boa série, de curta duração, com uma história cativante e de superação, fica a recomendação.

Referência

[1] Doliveira, Matheus. *O Gambito da Rainha: buscas por jogadas de xadrez disparam até 300%.* Revista Exame, São Paulo, 09 de novembro de 2020. Disponível em: https://exame.com/casual/o-gambito-da-rainha-buscas-por-jogadas-de-xadrez-disparam-ate-300/. Acesso em 26/04/2021.

4. Quem pergunta, quer saber!

O que é um número transcendente?

Por Severino Barros de Melo[3]

"Revisitando o número 1 da Revista do Professor de Matemática (RPM), $(1982, 14)$ encontramos uma pergunta antiga, mas sempre nova. Avaliamos que seria de interesse para os nossos leitores, conhecer a indagação e parte da resposta dada pelo professor Roberto C. F. Costa, na ocasião atuando no Instituto de Matemática e Estatística da USP (SP).

Pergunta: O que é um número transcendente?

Resposta: Desde que o homem conseguiu um grau razoável de civilização, ele começou a interessar-se por problemas de medidas de comprimentos, áreas, etc. Isto foi a origem da Geometria. Um problema, particularmente importante, foi o cálculo do comprimento de uma circunferência cujo diâmetro era conhecido. O primeiro fato importante notado pelos geômetras da antiguidade foi que "quanto maior o diâmetro maior o comprimento", mais ainda, que o comprimento da circunferência é proporcional ao seu diâmetro. Se indicarmos por C o comprimento

[3]Professor do Departamento de Educação da UFRPE

e por D o diâmetro, isto significa que o quociente C/D é constante, qualquer que seja a circunferência considerada. Medidas experimentais mostravam que esta constante era um pouco maior do que 3. Os geômetras antigos usaram, com muito sucesso, valores aproximados para esta constante, como por exemplo, $22/7$. Hoje sabemos que esta constante é um número real muito famoso (e complicado...) chamada π, aproximadamente igual a $3,141592\ldots$. Uma tabela com aproximações do número π, obtidas quando se substitui o comprimento da circunferência pelos comprimentos de polígonos regulares de n lados inscritos e circunscritos a esta circunferência, encontra-se no volume dois do texto "Matemática aplicada" de Trotta, Imenes e Jakubovic (...). Nesta tabela, chega-se aos valores

$$3,1415 < \pi < 3,1416$$

com polígonos de 500 lados. O leitor entenderá melhor esta construção ao ler todo o parágrafo 10, que trata do comprimento da circunferência, com início na página 102. Lembramos que os números racionais são da forma $x = m/n$ onde m e n são inteiros e n é diferente de zero. Isto significa que o número racional x é solução da equação de 1 grau $nx = m$, cujos coeficientes n e m são inteiros. No entanto, existem muitos números reais que não são racionais e por isso são chamados irracionais. Dentre estes, alguns são relativamente simples, como por exemplo;

$$\sqrt{2}^{*}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{6}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

etc. Estes números são soluções das equações $x^2 - 2 = 0, x^2 - 3 = 0, x^3 - 6 = 0, 3x^2 - 2 = 0$, respectivamente.

Por essa razão eles são chamados de irracionais algébricos. Vamos deixar bem claro o que é um número algébrico: é um número real que satisfaz alguma equação da forma $a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k = 0$, onde os números $a_0, a_1, \ldots, a_k$ são inteiros. Vejamos mais um exemplo de irracional algébrico:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Sendo

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3},$$

temos

$$x^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 = 5 + 2\sqrt{6},$$

e daí

$$x^2 - 5 = 2\sqrt{6},$$

e, portanto, elevando ao quadrado novamente

$$(x^2 - 5)^2 = (2\sqrt{6})^2,$$

ou seja,

$$x^4 - 10x^2 + 25 - 24 = 0.$$

O cálculo que fizemos mostra que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é raiz da equação $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ e, portanto, é algébrico. Verifique você mesmo que é irracional!

Mas acontece que muitos números irracionais não são algébricos. Por isso são chamados de irracionais transcendentes. Estes não são raízes de equações do tipo

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k = 0.$$

como acima. Afinal, o π é o quê? Racional ou Irracional? Se for irracional, é algébrico ou transcendente? A resposta a esta pergunta foi dada em 1881 por um matemático chamado Lindemann que provou: π é transcendente. Resumo desta pequena história: nos primórdios da Matemática já apareciam números muito "complicados" que só viriam a ser bem compreendidos no século XIX quando os matemáticos começaram a preocupar-se com a boa fundamentação da própria Matemática. Sabemos que existem "muito mais" números transcen-

*Para provar que não é racional, verifique que se $\sqrt{2} = m/n$, com m e n inteiros positivos, então $m^2 = 2n^2$, o que nos leva a uma contradição porque, enquanto, na decomposição em fatores primos, m^2 admite um número par de fatores 2 (que pode ser 0), o número $2n^2$ admite um número ímpar destes fatores. Modificado um pouco este raciocínio, mostra-se que os demais números citados: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{6}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, não podem ser racionais.

dentes do que algébricos. Em outra ocasião, explicaremos o significado desta frase. Sabemos também que os números racionais estão bastante espalhados; isto é, perto de cada número irracional (tanto faz algébrico como transcendente) sempre existe um número racional. Isto significa que, para efeito de aplicações práticas da Geometria, podemos tomar aproximações racionais de π, como por exemplo: $3,1416$. Como dissemos, os geômetras da antiguidade usaram $22/7$ como aproximação de π e $22/7 = 3,1428\ldots$."

Nota da redação da RPM:

O texto de Djairo G. de Figueiredo, "Número Irracionais e Transcendentes", da Coleção Fundamentos da Matemática Elementar (...) consiste numa exposição sobre a irracionalidade de certos números reais, a construção de alguns números transcendentes e a transcendência de e, π e outros. Este é um campo em que os problemas tem enunciados, quase sempre, de fácil compreensão, mas alguns deles, surpreendentemente, exigem técnicas mais elaboradas em suas soluções, algumas delas acima do conhecimento do estudante regular do segundo grau. Este texto, entretanto, é de leitura acessível a quem tenha formação equivalente à dos programas de Cálculo Diferencial e Integral dos cursos de Licenciatura.

Nota da Redação do Jornal É Matemática, Oxente!:

1. Existe uma outra coleção com o mesmo nome da coleção a qual pertence o livro do professor Djairo Figueiredo. Entretanto a que nos referimos acima foi editada pela Sociedade Brasileira de Matemática.

2. Na resposta dada pela RPM achamos interessante inserir as referências completas.

[1] MENES, Luiz Marcio; TROTTA, Fernando & JAKUBOVIC, José. Matemática Aplicada. São Paulo: Editora Moderna, 1980. 2ª Edição, vol.2.

[2] IGUEIREDO, Djairo G. de. Números Irracionais e Transcendentes. Rio de Janeiro; SBM, 1985.

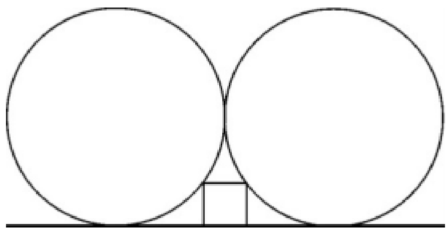
5. Eventos

Devido à pandemia do coronavírus a agenda de eventos está suspensa, uma vez que a maioria deles, se não todos, estão cancelados por tempo indeterminado ou estão ocorrendo na modalidade virtual, sendo divulgados à medida que ocorrem. Para conferir alguns eventos que estão ocorrendo de forma on-line, acessem https://mathseminars.org/ e fiquem atentos às diversas redes sociais das instituições.

6. Problemas

Para concluir, convidamos o leitor a responder alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Problema 1 (Canguru Brasil 2014 - Nível S). Um quadrado, apoiado sobre uma reta, tem os outros dois vértices sobre duas circunferências de raio 1 tangentes entre si e à reta de apoio, conforme figura ao lado. Quanto mede o lado do quadrado?



Problema 2 (XXXI OMU - 2015). A estrada que liga dois vilarejos em uma montanha é formada somente por trechos de subida ou descida. Um ônibus sempre viaja a 30 km/h em trechos de subida e a 60 km/h em trechos de descida. Encontre a distância entre os vilarejos se o ônibus leva exatamente seis horas para fazer a viagem completa de ida e volta.

Problema 3 (XXXIX OCM - Nível 2 - 2019). O número real a é raiz do polinômio $p(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$. Encontre um polinômio de grau 3 e coeficientes inteiros que tem a^3 por raiz. Justifique sua resposta.

Enviem as soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, o envio deve ser realizado até **01/12/2021**.

7. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n.18, Março de 2021**. [4]

Problema 1. Quantos números naturais de cinco algarismos têm o produto de seus algarismos igual a 2000?

Solução. Fatorando o número 2000, obtemos $2000 = 5^3 \times 2^4$. Como cada algarismo não pode exceder 10 e os números procurados possuem 5 algarismos, temos dois casos a considerar:

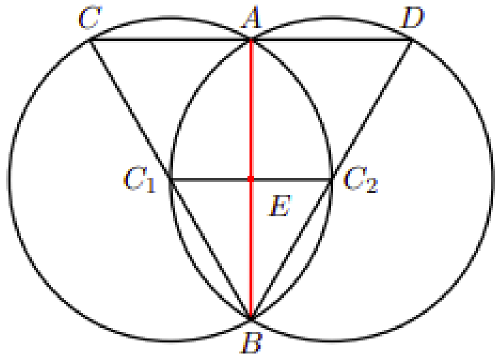
- Primeiro caso: Para $2000 = 8 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2$, o número de inteiros com esses dígitos é dado por uma permutação com repetição $P = \frac{5!}{3!} = 20$ números.

- Segundo caso: Para $2000 = 5 \times 5 \times 5 \times 4 \times 4$, o número de inteiros com esses dígitos é dado por uma permutação com repetição $P = \frac{5!}{(2! \times 3!)} = 10$ números.

Portanto, existem $20 + 10 = 30$ números.

□

Problema 2 (31ª OCM – Nível 3)**.** Considere duas circunferências de centros C_1 e C_2, respectivamente, conforme figura, que se intercetam nos pontos A e B. Traça-se o segmento de reta CD que passa pelo ponto A e é paralelo ao segmento de reta C_1C_2, onde C é o ponto de interseção com a circunferência de centro C_1, e D é o ponto de interseção com a outra circunferência. Seja E o ponto de interseção de AB com C_1C_2. Mostre que a área do triângulo BCD é 4 vezes a área do triângulo BC_1C_2.



Solução. Observe que $\overline{BC}$ e $\overline{BD}$ são diâmetros das circunferências de centros C_1 e C_2, respectivamente, e como por hipótese $\overline{C_1C_2}$ é paralelo a $\overline{CD}$, então $B\widehat{C}D = B\widehat{C_1}C_2$, $B\widehat{D}C = B\widehat{C_2}C_1$ e $C_1\widehat{B}C_2 = C\widehat{B}D$. Portanto, os triângulos de vértices CBD e C_1BC_2 são semelhantes. Assim

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C_1C_2}} = 2. \tag{1}$$

Pela constante de proporcionalidade obtida em (1), temos $\overline{CD} = 2\overline{C_1C_2}$. Note que os triângulos BCA e BC_1E também são semelhantes, pois $B\widehat{C}A = B\widehat{C_1}E$ e $C\widehat{B}A = C_1\widehat{B}E$. Então, segue que

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC_1}} = 2. \tag{2}$$

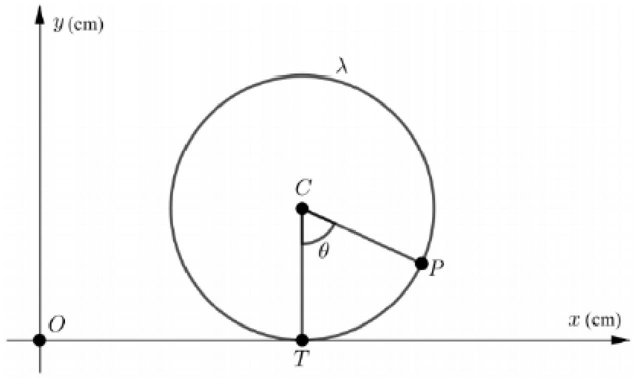
Daí, por (2), obtemos $\overline{BA} = 2\overline{BE}$. Além disso, note que o quadrilátero AC_1BC_2 é um losango, já que as circunferências passam uma pelo centro da outra e isso implica que ambas possuem o mesmo comprimento de raio. Por conseguinte, suas diagonais $\overline{AB}$ e $\overline{C_2C_1}$ são perpendiculares e cruzam-se no ponto médio de ambas as diagonais. Logo, $\overline{AB}$ é perpendicular a $\overline{C_1C_2}$ e como $\overline{C_1C_2}$ é paralelo a $\overline{CD}$, segue que, $\overline{AB}$ é perpendicular a $\overline{CD}$. Portanto, $\overline{AB}$ é a altura do triângulo BCD e $\overline{BE}$ é a altura do triângulo BC_1C_2. De (1) e (2), podemos calcular a proporção das áreas. De fato,

[4] As soluções dos problemas 2 e 3 foram enviadas pelo leitor **Masterson Falcão de Morais Costa**, aluno do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco.

$$\begin{aligned}
\text{Área}_{BCD} &= \frac{1}{2}\overline{DC}\cdot\overline{AB}\\
&= 4\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{DC}}{2}\cdot\frac{\overline{AB}}{2}\right)\right]\\
&= 4\left(\frac{1}{2}\overline{C_1C_2}\cdot\overline{BE}\right)\\
&= 4\text{Área}_{BC_1C_2},
\end{aligned}$$

conforme desejado. □

Problema 3 (OCZM 2018 – Nível 2)**.** Considere a figura abaixo, na qual é apresentada uma circunferência λ, de centro C e raio 5cm em um sistema cartesiano de origem O.



Sabendo que λ é tangente ao eixo das abcissas no ponto $T = (10, 0)$, que $P \in \lambda$ e que θ é a medida do ângulo $\angle TCP$, encontre a distância da origem O ao ponto P, em função de θ.

Solução. Considere inicialmente o triângulo OCP e $\angle OCT = \alpha$. Utilizando o ângulo dado na figura temos que $\angle OCP = \theta + \alpha$. Como o círculo λ tangencia o eixo-x no ponto T, segue que, OCT é triângulo retângulo em T. Utilizando o teorema de Pitágoras, obtemos $\overline{OC} = 5\sqrt{5}$ cm, pois $\overline{OT} = 10$ cm e $\overline{CT} = 5$ cm. Por conseguinte,

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\overline{OT}}{\overline{OC}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \tag{3}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{CT}}{\overline{OC}} = \frac{\sqrt{5}}{5}. \tag{4}$$

Visto que, temos os lados $\overline{OC}$, $\overline{CP}$ e $\angle OCP$, podemos usar a lei dos cossenos

$$\begin{aligned}
\overline{OP}^2 &= \overline{CP}^2 + \overline{OC}^2 - 2\overline{CP}.\overline{OC}.\cos(\theta+\alpha)\\
\overline{OP}^2 &= (5)^2 + (5\sqrt{5})^2 - 2(5)(5\sqrt{5})\psi,
\end{aligned}$$

onde $\psi = \cos(\theta)\cos(\alpha) - \text{sen}(\theta)sen(\alpha)$. Por (3) e (4), segue que

$$\psi = \cos(\theta)\frac{\sqrt{5}}{5} - \text{sen}(\theta)\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Portanto,

$$\overline{OP} = 10\left(\sqrt{\frac{3 + 2\,\text{sen}(\theta) - \cos(\theta)}{2}}\right)\text{cm}.$$

□