É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 19, volume 1, Junho de 2021
ISSN 2526-8651

Editorial

Caros Leitores,

É com imensa satisfação que estamos disponibilizando a décima nona edição do nosso jornal. O "É Matemática, OXENTE!" nasceu com um objetivo bem claro: fornecer material e estimular estudantes do ensino fundamental e médio na preparação para as olimpíadas de matemática.

Ao longo do caminho iniciado em 2017 percebemos que para além do objetivo específico, nosso jornal foi despertando o interesse de um público mais amplo, que independente da perspectiva olímpica, apreciava de algum modo a matemática.

No presente número estamos apresentando, na seção artigo, um trabalho muito interessante sobre a utilização de técnicas de fatoração com produtos notáveis voltadas para a resolução de questões de olimpíadas.

Na seção curiosidades abordamos uma bela conexão entre arte e matemática por meio da obra do holandês Maurits Escher, artista mundialmente famoso.

A seção Quem pergunta, quer saber! recolhe indagações feitas a matemáticos por gente interessada nessa disciplina em contextos os mais diversos. Dessa vez a pergunta está relacionada à geometria dos ladrilhos.

A indicação de leitura destaca o livro "Analfabetismo em Matemática e suas consequências" escrito pelo matemático norte americano John Allen Paulos.

Sobre eventos, temos alguns destaques, todos de forma remota pelo contexto adverso da pandemia.

O conteúdo da edição encerra, como de costume, com proposta de problemas olímpicos e discussão de resolução apresentada pelos leitores.

Agradecemos desde já aos leitores que são a razão de ser do nosso trabalho e aos diversos colaboradores que nos ajudaram a concluir esta edição. Concebemos nosso jornal como algo vivo e dinâmico, sempre atento e aberto às novidades. A propósito, por ocasião do lançamento desta edição estamos organizando uma live do jornal.

Desejamos uma excelente leitura.

Sumário

1. Artigo

Utilizando Técnicas de Fatoração com Produtos Notáveis em Questões Olímpicas

Lucas Rodrigues Wanderley, Rafael Almeida Souto & Thiago Yukio Tanaka

UFRPE - CEGEN - Departamento de Matemática
52171-900 - Recife - PE - Brasil

Introdução

Técnicas de fatoração compõem um conjunto de ferramentas frequentemente necessárias para todas as pessoas que se desafiam em Olimpíadas de Matemática. Em sua maioria, essas simplificações permitem que a solução para um determinado problema seja obtida em uma quantidade menor de passos lógicos, porém há casos em que a simplificação consiste no passo fundamental para encontrar a solução. Dentro desse conjunto de técnicas, concentraremos nossa atenção nas fatorações por meio de produtos notáveis.

Os produtos notáveis participam diretamente de diversos temas olímpicos como problemas envolvendo equações e sistemas, divisibilidade, binômio de Newton, equações Diofantinas, desigualdades, entre tantos outros. O objetivo deste trabalho é mostrar algumas destas aplicações no contexto olímpico.

O quadrado da soma ou diferença de dois números

Mostraremos de duas maneiras diferentes qual o valor que representa o quadrado da soma e/ou da diferença de dois números, a primeira por meio de uma manipulação algébrica e a segunda através de uma interpretação geométrica. Esta abordagem também pode ser encontrada no Livro II dos Elementos, de Euclides. Para provar de modo algébrico, iremos utilizar as propriedades da distributividade e comutatividade:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b)\\ &= a(a+b)+b(a+b)\\ &= a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b\\ &= a^2+2ab+b^2.\end{aligned}$$

Cálculos análogos nos mostram que $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$, faremos, porém, de uma maneira mais engenhosa, recorrendo ao caso anterior (que já está provado). Perceba que $(a-b)^2$ pode ser escrito como $(a+[-b])^2$, portanto, usaremos a fórmula da soma, bastando trocar o b por $[-b]$, ficaremos com $(a+[-b])^2 = a^2+2a[-b]+[-b]^2 = a^2-2ab+b^2$.

Você sabia que há uma interpretação geométrica para este e tantos outros resultados envolvendo a expressão algébrica dos produtos notáveis? Vejamos a seguinte imagem:

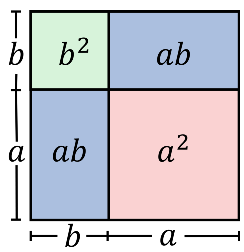


Figura 1.1: Representação geométrica do quadrado da soma de dois números. (Fonte: Autores.)

Na Figura 1, temos um quadrado cuja medida do lado é $a+b$, portanto a medida da área é igual a $(a+b)^2$, e esta figura pode ser decomposta em dois quadrados com medidas de área iguais a b^2 e a^2, além de dois retângulos com medidas de área ab.

Existem casos com mais fatores na soma ou diferença, por exemplo $(a+b+c)^2$, todavia é suficiente saber apenas para dois fatores, como visto anteriormente, pois podemos fazer a substituição $a+b=d$ de modo que $(a+b+c) = (d+c)^2$ e resolver novamente a conta. Vimos com a fórmula da diferença e a fórmula com três termos que nem sempre precisamos começar uma demonstração do zero! Às vezes conseguimos aproveitar resultados já demonstrados anteriormente e encaixar o novo formato no anterior. Fica então como desafio traçar uma estratégia para o seguinte problema:

Problema 1 (Autores)**.** Encontrar a expressão expandida para $(a-b-c+d)^2$, transformando antes em um produto notável mais simples.

Uma das aplicações ocorre na busca por soluções inteiras de determinadas expressões, como podemos ver no seguinte exemplo.

Exemplo 1 (Olimpíada Cearense de Matemática/1998)**.** Prove que não existem inteiros positivos a e b, tais que $\dfrac{b^2+b}{a^2+a}=4.$

Solução. Suponha, por contradição, que existam tais números a e b. Utilizando o produto dos meios pelos extremos na identidade inicial, obtemos $b^2+b=4a^2+4a$. O truque agora é somar 1 de ambos os lados da equação, ficamos com $b^2+b+1=4a^2+4a+1=(2a+1)^2$. Concluímos que b^2+b+1 é um quadrado perfeito, mas como b é positivo, note que, $b^2<b^2+b+1<b^2+2b+1=(b+1)^2$, e como b^2 e $(b+1)^2$ são quadrados de número inteiros consecutivos, b^2+b+1 não pode ser o quadrado de um número inteiro, logo a e b não são inteiros positivos.

Nossa segunda aplicação será uma questão envolvendo desigualdades:

Exemplo 2 (44^{th} Canadian Mathematical Olympiad/2012)**.** Sejam x, y, e z números reais positivos. Prove que

$$x^2+xy^2+xyz^2\geq 4xyz-4.$$

Solução. Observando a expressão da desigualdade, perceba que do lado esquerdo há termos quadráticos x^2, y^2 (acompanhado de x) e z^2 (acompanhado de xy), perceba ainda que do lado direito aparece o número 4, isso nos dá o indício de que uma maneira de aparecer termos quadráticos e 4 é desenvolvendo $(a-2)^2$ ou $(a+2)^2$. Como 4 aparece com sinal negativo do lado direito, então uma boa iniciativa seria desenvolver algo com $(a-2)^2=a^2-4a+4$, para surgir $4a-4$ caso conseguíssemos passar esse termo para o outro lado da igualdade. Sabemos que todo número elevado ao quadrado é maior que ou igual a zero, portanto $(x-2)^2=x^2-4x+4\geq 0$, donde $x^2\geq 4x-4$. O mesmo vale para y e z, ou seja, $y^2\geq 4y-4$ e $z^2\geq 4z-4$. Segue que

$$\begin{aligned}&x^2+xy^2+xyz^2\\ &\geq (4x-4)+x(4y-4)+xy(4z-4)\\ &=4x-4+4xy-4x+4xyz-4xy\\ &=4xyz-4.\end{aligned}$$

Agora, veremos que algumas manipulações algébricas de números podem nos dar resultados aparentemente “mágicos”, pois disfarçam cálculos extremamente complexos de maneira bem simples:

• Escolha dois números consecutivos tão grandes quanto queira (digamos que você escolheu 133 e 134) e não me fale;

• Defina um terceiro número como o produto desses dois números e me diga apenas esse terceiro número (após a conta, você me falaria apenas “17822”, que é o resultado de $133\cdot 134$);

• Escutando o valor dito (17822), eu pego um papel, escrevo um número (o sucessor do valor dito, $17822+1=17823$), dobro o papel e o dou para você e peço para abrir só no final;

• Agora eu peço que você pegue um papel e caneta e calcule a raiz quadrada da soma dos quadrados dos três números, e depois abra o papel! (seu cálculo será $\sqrt{133^2+134^2+17822^2}=\sqrt{17689+17956+317623684}=\sqrt{317623686}=17823$, que é exatamente o que eu escrevi no papel, no começo da mágica!).

Como isso é feito?

Exemplo 3 (POTI - Álgebra - Nível 2)**.** Seja $D=a^2+b^2+c^2$, com a e b inteiros consecutivos e $c=ab$. Mostre que $\sqrt{D}$ é um inteiro ímpar.

Solução. Como a e b são inteiros consecutivos, então $b = a+1$, e nessa escrita temos que $c = a(a+1)$. Assim,

$$\begin{aligned} D &= a^2+b^2+c^2 \\ &= a^2+(a+1)^2+[a(a+1)]^2 \\ &= a^2+(a^2+2a+1)+[a^2+a]^2 \\ &= 2a^2+2a+1+[a^2+a]^2 \\ &= (a^2+a)^2+2(a^2+a)+1 \\ &= [(a^2+a)+1]^2, \end{aligned}$$

logo, $\sqrt{D} = a^2+a+1 = a(a+1)+1$, e como o produto $a(a+1)$ é par, pois é o produto de dois termos consecutivos, então $\sqrt{D}$ é ímpar, e mais do que isso, $\sqrt{D} = c+1$.

A diferença dos quadrados de dois números

A demonstração algébrica deste produto notável é bem simples, e pode ser mais simples desenvolver um lado do que o outro. Desenvolvendo o produto, obteremos $(a+b)(a-b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = a^2+ab-ab-b^2 = a^2-b^2$.

Vamos novamente observar o aspecto geométrico desse resultado. Tomemos um quadrado de lado a e dele retiremos um quadrado menor, de lado b. A área da figura resultante é representada em termos das áreas dos quadrados de lado a e b, como é mostrado na figura a seguir:

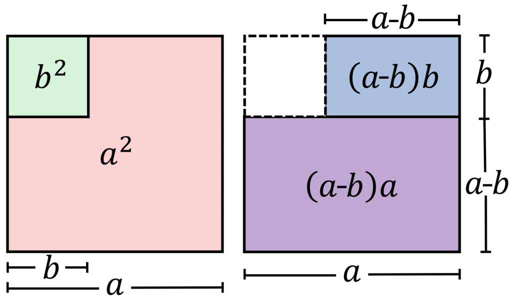


Figura 1.2: Representação geométrica da diferença dos quadrados de dois números. (Fonte: Autores.)

Por outro lado, observando a Figura 2, usando o princípio aditivo para as medidas de áreas dos polígonos, obtemos:

$$\begin{aligned} a^2-b^2 &= (a-b)a+(a-b)b \\ &= (a-b)(a+b). \end{aligned}$$

As demonstrações simples disfarçam o grande potencial deste resultado. Reescrevemos uma diferença de números sob a forma de um produto! Sendo assim, esse resultado é bastante eficiente quando trabalhamos com questões envolvendo divisibilidade, como podemos observar no exemplo a seguir:

Exemplo 4. (Autores). Verifique que o polinômio $p(x) = x^4-16$ é redutível, ou seja, p pode ser escrito como produto de polinômios de graus menores.

Solução. Note que $(x^4-16) = ((x^2)^2-4^2)$. Utilizando o produto notável da diferença de dois quadrados, podemos escrever $p(x)$ como $(x^2+4)(x^2-4)$. Perceba que poderíamos fatorar ainda mais, pois $x^2-4 = x^2-2^2 = (x+2)(x-2)$. Assim, teríamos $p(x) = (x^2+4)(x-2)(x+2)$.

Exemplo 5 (OBM 1ª fase/2010)**.** Quantos são os pares (x, y) de inteiros positivos tais que $x^2-y^2 = 2^{2010}$?

Solução. Utilizando o produto notável desta seção, a expressão do enunciado é equivalente a $(x+y)(x-y) = 2^{2010}$. Como x e y são positivos, $x+y > 0$ e portanto também $x-y > 0$, caso contrário o produto desses números seria negativo. Note, porém, que 2^{2010} é positivo. Além disso, $x+y > x-y$ (pois $y > 0$). Assim, as possibilidades são

$$\begin{cases} x+y &= & 2^{2009} & , & 2^{2008} & , & \cdots & , & 2^{1006} \\ x-y &= & 2 & , & 2^2 & , & \cdots & , & 2^{1004} \end{cases},$$

que geram 1004 pares ordenados.

O cubo da soma ou diferença de dois números

De maneira bastante semelhante ao quadrado da soma mostraremos algebricamente o cubo da soma. Utilizando o produto notável anterior, obtemos

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)\cdot(a+b)^2\\
&= (a+b)\cdot(a^2+2ab+b^2)\\
&= a\cdot(a^2+2ab+b^2)+b\cdot(a^2+2ab+b^2)\\
&= a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3\\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
&= a^3+b^3+3ab(a+b),
\end{aligned}
$$

mais ainda, trocando b por $(-b)$ e usando o resultado acima, obtemos também $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$. Vamos ver também a interpretação geométrica desse produto notável. Observe o cubo a seguir cuja aresta mede $a+b$:

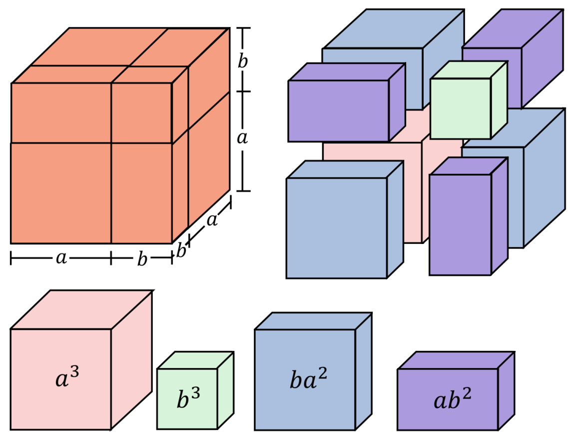


Figura 1.3: Representação geométrica do cubo da soma de dois números. (Fonte: Autores.)

Assim, a medida do volume desse cubo é $(a+b)^3$. Note que esta figura espacial pode ser decomposta em dois cubos cujos volumes são a^3 e b^3, e seis prismas retangulares, três com medidas de volume ba^2 e outros três com ab^2. Somando estes volumes, obtemos o resultado.

Exemplo 6 (Olimpíada Mineira de Matemática/2005)**.** Qual o valor inteiro da expressão $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$?

Solução. Para simplificar a questão, vamos considerar $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$, $y=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ e $L=x+y$. Note que

$$
\begin{aligned}
L^3 &= (x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y)\\
&= 2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}\\
&\quad +3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)\cdot L\\
&= 4+3\left(\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}\right)\cdot L\\
&= 4+3\left(\sqrt[3]{2^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}\right)\cdot L\\
&= 4+3\left(\sqrt[3]{4-5}\right)\cdot L\\
&= 4-3L,
\end{aligned}
$$

que é equivalente a resolver a equação $L^3+3L=4$, reescrevendo, temos que $L(L^2+3)=4$, como L é inteiro, olhando os divisores inteiros de 4, temos que a única solução é $L=1$.

Exemplo 7 (POTI - Álgebra - Nível 2)**.** Determine o número de soluções reais distintas da equação $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{7-x}=3$.

Solução. Elevando ao cubo de ambos os lados da igualdade obtemos,

$$7+3\cdot\sqrt[3]{x\cdot(7-x)}\cdot(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{7-x})=27,$$

como $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{7-x}=3$ temos que $7+3\cdot 3\cdot\sqrt[3]{7x-x^2}=27$, logo $\sqrt[3]{7x-x^2}=\frac{20}{9}$. Elevando ambos os lados ao cubo temos $7x-x^2=\frac{8000}{729}$, passando a fração para o lado esquerdo da equação obtemos uma equação de segundo grau, e vamos analisar o valor de seu discriminante, sendo assim $\Delta = 49+4\cdot\frac{8000}{729}>0$. Como $\Delta>0$, segue que a equação quadrática possui duas raízes distintas, consequentemente a equação inicial possui duas soluções reais distintas.

Uma outra aplicação bastante relevante para o contexto olímpico tem a utilização de produtos notáveis em situações nas quais é dado o valor de $x+\frac{1}{x}$ e pede-se o valor de $x^n+\frac{1}{x^n}$, ou então é dado o valor de $x^n+\frac{1}{x^n}$ e pede-se o valor de $x^n-\frac{1}{x^n}$:

Exemplo 8 (POTI - Álgebra - Nível 2)**.** Seja x um número real tal que $x+\frac{1}{x}=2$, calcule $x^2+\frac{1}{x^2}$.

Solução. Para obtermos uma expressão quadrática, elevaremos o número à devida potência. Note que

$$\begin{aligned} 4 = 2^2 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \\ &= x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 \\ &= x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}, \end{aligned}$$

portanto $x^2 + \frac{1}{x^2} = 4 - 2 = 2$.

Exemplo 9 (Autores)**.** Encontre todas as soluções reais para a seguinte equação

$$x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 = 0.$$

Solução: Para resolvermos este exemplo, usaremos a expressão anterior, discutida no exemplo 8. Como $x = 0$ não é uma solução dessa equação, então dividindo em ambos os lados por x^2, ficaremos com:

$$x^2 - x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

e, organizando os termos com as mesmas potências teremos:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0. \qquad (1)$$

Fazendo a mudança de variável $y = x + \frac{1}{x}$, e aproveitando os cálculos do Exemplo 8, temos que

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2,$$

quando substituímos a variável x por y em (1) obteremos a seguinte equação quadrática

$$y^2 - 2 - y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - y - 3 = 0,$$

cujas soluções são $y = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ ou $y = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$. Voltando agora para a variável x, temos que resolver duas equações:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \quad \text{e} \quad x + \frac{1}{x} = \frac{1-\sqrt{13}}{2}.$$

Multiplicando por x e organizando os termos, a primeira equação nos leva a seguinte equação quadrática

$$x^2 - \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)x + 1 = 0,$$

que possui duas soluções reais, pois o discriminante é $\Delta = \left(-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 4 = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$, que é maior do que zero. Dessa forma as raízes são

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13} + \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{13} - 1}}{4},$$

e

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{13} - \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{13} - 1}}{4}.$$

Fazendo este mesmo procedimento com a segunda equação, ficaremos com

$$x^2 - \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)x + 1 = 0,$$

que não tem solução real, pois o discriminante nesse caso é $\Delta = \left(-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 4 = -\frac{1+\sqrt{13}}{2}$, que é negativo. Assim, esta equação admite duas soluções reais. Isso pode ser visto da seguinte maneira, o gráfico da função $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$ toca o eixo x em dois pontos, ou seja, possui dois pontos de interseção com a reta $y = 0$.

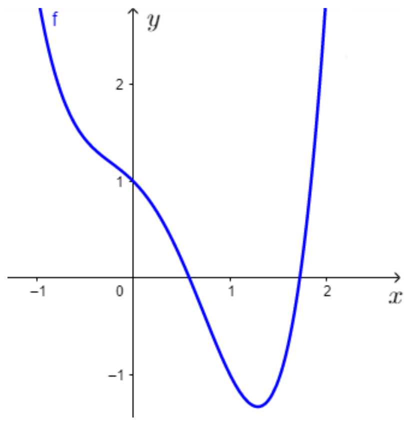


Figura 1.4: O gráfico de $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$. (Fonte: Autores.)

Exemplo 10 (Autores)**.** Suponha agora que x é um número real diferente de zero tal que $x + \frac{1}{x} = T$. Encontre, em função de T, o valor de $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

Solução. Para obtermos uma expressão com expoentes cúbicos, elevaremos ambos os lados da expressão ao cubo. Segue que

$$
\begin{aligned}
T^3 &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 \\
&= x^3+3\cdot x^2\cdot\frac{1}{x}+3\cdot x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{x}\right)^3 \\
&= x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3} \\
&= x^3+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}=x^3+3T+\frac{1}{x^3},
\end{aligned}
$$

logo, $x^3+\frac{1}{x^3}=T^3-3T$.

A diferença e a soma do cubo de dois números

Assim como na diferença dos quadrados de dois números, desenvolver a forma algébrica da diferença dos cubos de dois números é mais fácil de ser desenvolvida por um dos lados da igualdade, assim iremos deduzir a forma algébrica da expressão a^3-b^3 da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
&(a-b)(a^2+ab+b^2) \\
&= a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2) \\
&= a^3+a^2b+ab^2-ba^2-b^2a-b^3 \\
&= a^3-b^3.
\end{aligned}
$$

Para deduzir de forma geométrica o valor da diferença dos cubos, vamos partir de um cubo cuja aresta mede a e dele remover um cubo menor cuja aresta mede b. Observe na figura a seguir o valor da expressão a^3-b^3:

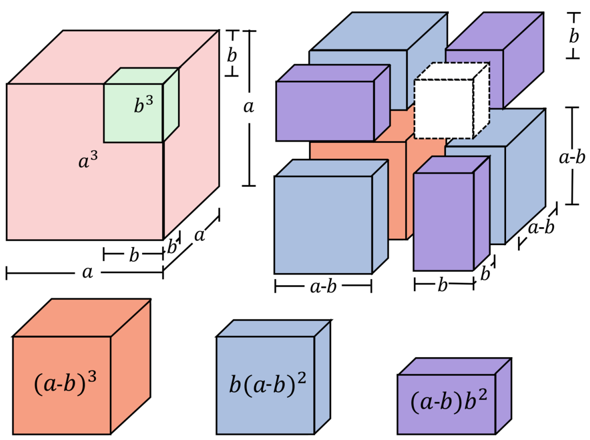


Figura 1.5: Representação geométrica da diferença dos cubos de dois números. (Fonte: Autores.)

Para a soma dos cubos, basta substituir b por $-b$ na expressão da diferença e assim obtemos $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Exemplo 11 (OBM 3ª Fase/2006)**.** Encontre todos os pares ordenados (x,y) de inteiros tais que $x^3-y^3=3(x^2-y^2)$.

Solução. Inicialmente vamos expandir os produtos notáveis de ambos os lados da igualdade, tendo assim $(x-y)(x^2+xy+y^2)=3(x-y)(x+y)$. Agora, temos dois casos a serem analisados:

1º Caso. Quando $x=y$. Note que nessa situação os pares da forma (x,x) com $x\in\mathbb{Z}$ são soluções, pois se substituirmos na equação, obtemos $0=0$ que é verdade.

2º Caso. Quando $x\neq y$, podemos dividir por $(x-y)$ em ambos os lados (pois não estamos dividindo por zero), assim temos que $x^2+xy+y^2=3(x+y)$, fazendo a distribuição do lado direito da igualdade, temos $x^2+xy+y^2=3x+3y\Rightarrow x^2+xy+y^2-3x-3y=0\Rightarrow x^2+x(y-3)+y^2-3y=0$. Dessa forma, vamos olhar $x^2+x(y-3)+y^2-3y$ como um polinômio de variável x e coeficientes em y, e para solucionar a equação $x^2+x(y-3)+y^2-3y=0$ de segundo grau, devemos analisar o seu discriminante que será dado por $\Delta=b^2-4ac$, onde $a=1$, $b=y-3$ e $c=y^2-3y$. Assim, $\Delta=y^2-6y+9-4(y^2-3y)\Rightarrow\Delta=-3y^2+6y+9$, e para que as soluções da equação inicial sejam reais, em particular inteiras, é preciso que $\Delta\geq 0$, que é equivalente a $-1\leq y\leq 3$. Dessa forma, sabendo que $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ vamos verificar os valores de x, para $y=-1, y=0, y=1, y=2, y=3$.

Note que quando $y=1$, temos que $\Delta=12$ que não é um quadrado perfeito, logo x não terá valor inteiro, o que não nos interessa. Vamos então analisar os outros valores de y.

- $y=-1\Rightarrow\Delta=0$, logo $x=2$;
- $y=0\Rightarrow\Delta=9$, logo $x=3$ e $x=0$;
- Os casos $y=2$ e $y=3$ são análogos aos que fizemos.

Assim, os pares serão $\{(2,-1),(0,0),(3,0),(-1,2),(2,2),(0,3)\}\cup\{(x,x)/x\in\mathbb{Z}\}$.

Exemplo 12 (ARML/1997)**.** Sejam a, b, c números racionais, tais que:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

Determine os valores de a, b, c.

Solução. Inicialmente, vamos tentar nos livrar dos radicais. Considere $x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}$ e $y = \sqrt[3]{2}$. Observe que nessa escrita $y^3 = 2$ e $x = \sqrt[3]{y-1}$, donde $x^3 = y - 1$, e ao fazermos isso, perceba que não há mais nenhum radical envolvendo as incógnitas! Mais do que isso, isso nos dá o indício que usaremos produtos notáveis cúbicos. Subtraindo 1 em ambos os lados da igualdade $y^3 = 2$, e utilizando o produto notável da diferença de cubos, obtemos

$$1 = y^3 - 1 = (y-1)(y^2+y+1), \tag{2}$$

aqui, note que o aparecimento de uma soma de três termos nos dá um bom indicativo que estamos no caminho certo. Note também que

$$\begin{aligned} & y^2+y+1 \\ &= \frac{3y^2+3y+3}{3} = \frac{3y^2+3y+y^3+1}{3} \\ &= \frac{y^3+3y^2+3y+1}{3} = \frac{(y+1)^3}{3}. \end{aligned} \tag{3}$$

Combinando (2) e (3),

$$x^3 = y - 1 = \frac{1}{y^2+y+1} = \frac{3}{(y+1)^3}.$$

Extraindo a raiz cúbica de ambos os lados da identidade acima obtemos

$$x = \frac{\sqrt[3]{3}}{y+1}, \tag{4}$$

e perceba que aqui ainda não adianta substituir $y = \sqrt[3]{2}$, então precisamos moldar um pouco mais esta expressão. Assim como fizemos no início, somemos 1 em ambos os lados da expressão envolvendo y^3, ficaremos com

$$3 = y^3 + 1 = (y+1)(y^2-y+1),$$

portanto,

$$\frac{1}{y+1} = \frac{y^2-y+1}{3}. \tag{5}$$

Por fim, utilizando as identidades (4) e (5), e como $y = \sqrt[3]{2}$ temos que

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt[3]{3}}{y+1} = \sqrt[3]{3}\cdot\frac{1}{y+1} \\ &= \sqrt[3]{3}\cdot\frac{y^2-y+1}{3} = \sqrt[3]{3}\cdot\frac{(\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{27}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{1}{9}}\cdot(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1) = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \end{aligned},$$

portanto $a = \frac{4}{9}$, $b = -\frac{2}{9}$ e $c = \frac{1}{9}$.

Produtos Notáveis Mais Gerais

É possível generalizar os produtos notáveis vistos anteriormente para qualquer expoente natural, porém, para mostrar que cada uma das fatorações a seguir são válidas, seria preciso entender alguns detalhes sobre outro tema bastante importante: o Princípio de Indução Finita. Este princípio pode ser empregado para mostrar resultados que envolvam os números naturais, mais precisamente mostrar que sob certas circunstâncias algumas propriedades são válidas para todo $n \in \mathbb{N}$ ou todo $n \geq n_0$, com $n_0 \in \mathbb{N}$. Sendo assim, não demonstraremos estes produtos notáveis, vamos apenas enunciá-los. O primeiro deles é:

- $a^n - b^n$
  $= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}).$

Sejam $f(n) = (a^{\frac{n}{2}} + ib^{\frac{n}{2}})(a^{\frac{n}{2}} - ib^{\frac{n}{2}})$ e $g(n) = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-1}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - b^{n-2} + b^{n-1})$ em que i é a unidade imaginária satisfazendo $i^2 = -1$, o mesmo método de indução pode ser utilizado para mostrar a validade das seguintes fatorações:

- $(a^n + b^n) = \begin{cases} f(n), & \text{se } n \text{ é par} \\ g(n), & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$

- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k,$

- $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k.$

Produtos Notáveis Menos Comuns

Existem ainda alguns produtos notáveis interessantes que não são tão comuns mas que podem ser úteis.

- $1 + a + b + ab = (a+1)(b+1).$
- $1 - a - b + ab = (a-1)(b-1).$

Exemplo 13 (IME/2007)**.** Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 + (m-15)x + m = 0$. Sabendo que x_1 e x_2 são números inteiros, determine o conjunto dos possíveis valores de m.

Solução. As relações de Girard nos dizem que se x_1 e x_2 são raízes de um polinômio do segundo grau da forma $ax^2 + bx + c$, então a soma e o produto dessas raízes se relacionam com os coeficientes a, b e c da seguinte maneira: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Aplicando essas relações no polinômio em questão, obtemos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 15 - m, \\ x_1 \cdot x_2 = m. \end{cases}$$

Somando as duas equações desse sistema, temos que $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = 15$. Para utilizarmos o primeiro produto notável desta seção, basta somarmos 1 aos dois lados desta equação:

$$16 = 1 + x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = (x_1+1)(x_2+1).$$

Como x_1 e x_2 são números inteiros, os fatores $x_1 + 1$ e $x_2 + 1$ devem ser divisores de 16, dessa forma as opções são reduzidas a:

- $\begin{cases} x_1 + 1 = 1 \\ x_2 + 1 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 &=& 0, \\ x_2 &=& 15, \\ m &=& 0. \end{array}$
- $\begin{cases} x_1 + 1 = 2 \\ x_2 + 1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 &=& 1, \\ x_2 &=& 7, \\ m &=& 7. \end{array}$
- $\begin{cases} x_1 + 1 = 4 \\ x_2 + 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 &=& 3, \\ x_2 &=& 3, \\ m &=& 9. \end{array}$
- $\begin{cases} x_1 + 1 = -1 \\ x_2 + 1 = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 &=& -2, \\ x_2 &=& -17, \\ m &=& 34. \end{array}$
- $\begin{cases} x_1 + 1 = -2 \\ x_2 + 1 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 &=& -3, \\ x_2 &=& -9, \\ m &=& 27. \end{array}$
- $\begin{cases} x_1 + 1 = -4 \\ x_2 + 1 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 &=& -5, \\ x_2 &=& -5, \\ m &=& 25. \end{array}$

Exercícios Propostos

Problema 2 (IMO/1959)**.** Para quais valores reais de x temos

$$\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = A,$$

sendo (a) $A = \sqrt{2}$, (b) $A = 1$ e (c) $A = 2$, em que apenas números reais não negativos são admitidos para raízes quadradas?

Problema 3 (IMO/1963)**.** Encontre todas as raízes reais da equação,

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x,$$

com p um parâmetro real.

Problema 4 (National Constest UK/1996)**.** Considere o par de inteiros positivos de quatro dígitos $(M, N) = (3600, 2500)$. Note que M e N são ambos quadrados perfeitos com dígitos iguais em duas casas e dígitos diferentes nas duas casas restantes. Além disso, quando os dígitos diferem, o dígito em M é exatamente uma unidade maior que o dígito correspondente em N. Encontre todos os pares de inteiros positivos de quatro dígitos (M, N) com essas propriedades.

Problema 5 (High School Certificate Okland HighSchool)**.** Seja $S = \{1, 4, 9, 16, 25, ...\}$ o conjunto dos quadrados inteiros positivos.

(a) Encontre o quadrado t tal que $t + 43$ também está em S.
(b) Para quais quadrados u em s, $u + 420$ também está em S?

Problema 6 (Leningrado). Prove que

$$\frac{(2^3-1)(3^3-1)\cdot \ldots \cdot (100^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)\cdot \ldots \cdot (100^3+1)} = \frac{3367}{5050}.$$

Problema 7 (OBM/2003 - 3ª Fase). Mostre que $x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y + 2 > 0$.

Problema 8 (OMM/2018 - Nível 3 - modificada). Seja m um número tal que $m + \frac{1}{m} = 5$. Determine o valor de $m^3 + \frac{1}{m^3}$.

Problema 9 (POTI - Álgebra - Nível 2). Determine o valor do produto:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{1}{9^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right).$$

Problema 10 (EUA). Calcule

$$\frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)} \times \frac{(46^4+324)(58^4+324)}{(40^4+324)(52^4+324)}.$$

Problema 11 (POTI - Álgebra - Nível 2). Determine o número de pares ordenados (m, n) de números inteiros positivos que são soluções da equação $\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$.

Problema 12 (OCM). Encontre o quociente da divisão de $a^{128} - b^{128}$ por $(a^{64} + b^{64})(a^{32} + b^{32})(a^{32} + b^{32})(a^{16} + b^{16})(a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)$

Problema 13 (13^{th} Korean Mathematical Olympiad 2000 - 1^{st} Round - Nov/1999). Encontre todos os pares de números naturais (a, b) tais que $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{b}} = 1$.

Problema 14 (CMO). Sejam a, b, c números reais positivos, tais que $a^2 + b^2 = c^2$.
(a) Prove que $\left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right)^2 > 8$.
(b) Prove que não existe nenhum inteiro n para o qual possamos encontrar uma tripla pitagórica (a, b, c) satisfazendo $\left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right)^2 = n$.

Problema 15 (OBMEP/2018). Se $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} = \frac{7}{12}$, qual o valor de $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$?

(a) 2,2 (b) 2,4 (c) 2,6 (d) 2,8

Problema 16 (Autores). Suponha que $x^n + \frac{1}{x^n} = a$. Encontre, em função de a, os possíveis valores de $x^n - \frac{1}{x^n}$.

Referências

[1] Canadian Mathematical Olympiad. Disponível em: <https://cms.math.ca/competitions/cmo/>. Acesso em: 17 de Nov. de 2020.

[2] International Mathematical Olympiad. Disponível em: https://www.imo-official.org/>. Acesso em: 17 de Nov. de 2020.

[3] Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em: <https://www.obm.org.br/>. Acesso em 17 de Nov. de 2020.

[4] Olimpíada Cearense de Matemática. Disponível em: <http://www.mat.ufc.br/ocm/>. Acesso em 17 de Nov. de 2020.

[5] Olimpíada Mineira de Matemática. Disponível em: <http://150.164.25.15/olimpiada/>. Acesso em 17 de Nov. de 2020.

[6] The Korean Mathematical Olympiad. Disponível em: http://www.kmo.or.kr/main.html>. Acesso em 17 de Nov. de 2020.

[7] ANDREESCU, Titu; FENG, Zuming. 101 Problems in Algebra: From the Training of the USA IMO Team. Australian Mathematics Trust, 2001.

[8] Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo. Disponível em: <https://poti.impa.br/>. Acesso em 18 de Nov. de 2020.

2. Curiosidades

Matemática e arte por meio da obra do artista Escher

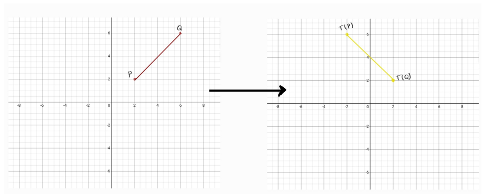
Allan Barreto dos Santos[1]
Renato dos Santos Diniz[2]

Alguns de nós certamente já ouvimos que a matemática está presente em toda parte e que ela nos cerca. Nesse sentido, até mesmo em áreas que para muitos são totalmente desagregadas da matemática, é possível perceber sua forte presença. Diante disso, na arte, em se tratando das obras do artista Maurits Cornelis Escher (1898-1972), a presença de conceitos e propriedades envolvendo grandes áreas da matemática como a Geometria e a Álgebra ocorre de forma significativa. Em especial, é possível estabelecer uma relação entre as obras de Escher e a classificação dos grupos cristalográficos de dimensão dois, os ditos grupos de papel de parede (*Wallpaper groups*). Para mais leituras a respeito dos grupos cristalográficos, recomendamos [1] e [2].

Historicamente, os grupos cristalográficos de modo geral foram classificados de maneira gradativa, por meio de alguns matemáticos que se dedicaram ao estudo das simetrias e isometrias, quer seja no $\mathbb{R}^2$ ou no $\mathbb{R}^3$. Inicialmente, destaca-se o trabalho de A. Bravais em 1848, que se empenhou em estudar e classificar todos os grupos de simetria de reticulados tridimensionais. No entanto, em 1867, C. Jordan estudou 176 grupos de isometrias e identificou 16 dos 17 grupos de papel de parede, sendo finalizado por E.S. Fedorov, entre 1885 e 1889, ao classificar todos os grupos cristalográficos de dimensão dois e três, como pode ser visto em [3].

A partir da necessidade de chegar à classificação de algumas obras de Escher segundo a ótica dos grupos cristalográficos de dimensão dois, torna-se indispensável apresentar, mesmo que de maneira breve, algumas definições matemáticas. Assim, primeiro destacaremos o que se entende por uma isometria no plano. Desse modo, uma isometria no plano, ou seja, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$, é uma transformação que preserva a distância entre dois pontos do plano, depois de ser aplicada a esses pontos tal transformação. Isso se traduz formalmente, da seguinte maneira: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função. Dizemos que T é uma isometria se $d(P, Q) = d(T(P), T(Q))$, para todo $P, Q \in \mathbb{R}^2$, sendo d uma função distância. Para melhor compressão, observe o que acontece na Figura 2.1.

Figura 2.1: Isometria no plano



FONTE: Os autores

Existem quatro isometrias no plano, a saber, translação, rotação, reflexão e reflexão com deslizamento.

Finalmente, podemos determinar a partir de observações feitas na obra de Escher, qual a classificação do grupo cristalográfico de dimensão dois que está realizando a ação. Para isso, é necessário recorrer ao quadro de classificação dos grupos de papel de parede, estabelecendo uma relação com as isometrias presentes em uma determinada obra de arte. Portanto, observe como está estruturado o quadro na Figura 2.2 percebendo a organização dos 17 grupos cristalográficos de dimensão dois.

Figura 2.2: Quadro de classificação

<table>
<tr><th rowspan="2">Menor simetria de rotação</th><th colspan="5">Existe uma reflexão?</th></tr>
<tr><th colspan="3">Sim</th><th colspan="2">Não</th></tr>
<tr><td>360°/6</td><td colspan="3">p6m</td><td colspan="2">p6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">360°/4</td><td colspan="3">Há eixos de reflexão que se intersectam a 45°?</td><td colspan="2" rowspan="2">p4</td></tr>
<tr><td>Sim: p4m</td><td colspan="2">Não: p4g</td></tr>
<tr><td rowspan="2">360°/3</td><td colspan="3">Há centros de rotações fora dos eixos de reflexão?</td><td colspan="2" rowspan="2">p3</td></tr>
<tr><td>Sim: p31m</td><td colspan="2">Não: p3m1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">360°/2</td><td colspan="3">Há eixos de reflexão perpendiculares?</td><td colspan="2" rowspan="2">Existe uma reflexão com deslizamento?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sim</td><td>Não</td></tr>
<tr><td colspan="2">Há centros de rotações fora dos eixos de reflexão?</td><td rowspan="2">pmg</td><td rowspan="2">Sim: pgg</td><td rowspan="2">Não: p2</td></tr>
<tr><td>Sim: cmm</td><td>Não: pmm</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nenhuma</td><td colspan="3">Há eixos de reflexões com deslizamento fora dos eixos de reflexão?</td><td colspan="2">Há reflexões com deslizamento?</td></tr>
<tr><td>Sim: cm</td><td colspan="2">Não: pm</td><td>Sim: pg</td><td>Não: p1</td></tr>
</table>

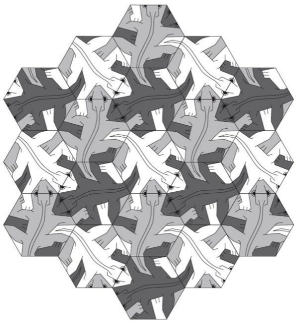
FONTE: Os autores

[1] Licenciando em Matemática e bolsista do PET-Educação e Sustentabilidade do Centro de Formação de Professores da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

[2] Professor do Centro de Formação de Professores da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

A obra que vamos classificar se chama "Os lagartos" (Escher, 1943), a qual pode ser visualizada na Figura 2.3.

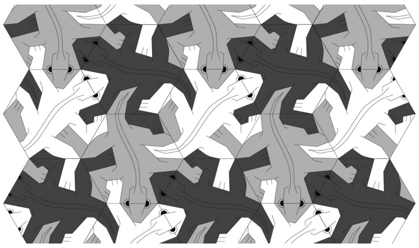
Figura 2.3: Os lagartos



FONTE: Imagem extraída do site pinterest (histora-arte.com)

Observe uma aproximação da Figura 2.3, conforme Figura 2.4.

Figura 2.4: Os lagartos



FONTE: Imagem extraída do site pinterest (histora-arte.com)

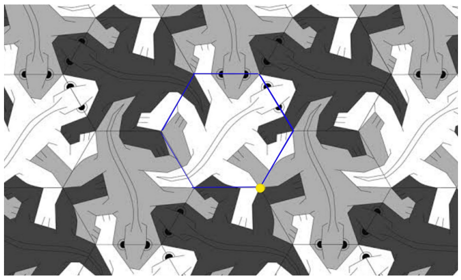
Na Figura 2.5 destacaremos a região denominada "Domínio fundamental", que basicamente é a parte que se repete em todo o papel de parede, de forma que seja possível ladrilha-lo completamente usando apenas essa região.

Figura 2.5: Domínio fundamental

FONTE: Imagem extraída do site pinterest (histora-arte.com)

Desse modo, podemos destacar o Domínio fundamental na Figura 2.4, a fim de observar as isometrias pedidas pelo quadro da Figura 2.2, como pode ser visto na Figura 2.6.

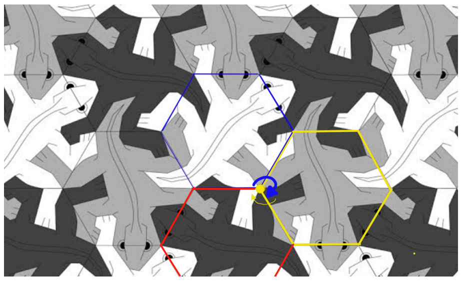
Figura 2.6: Domínio fundamental na obra



FONTE: Imagem extraída do site pinterest (histora-arte.com)

O que o quadro da Figura 2.2 nos pede inicialmente é a menor simetria de rotação, a qual podemos destacar na Figura 2.7.

Figura 2.7: Menor simetria de rotação

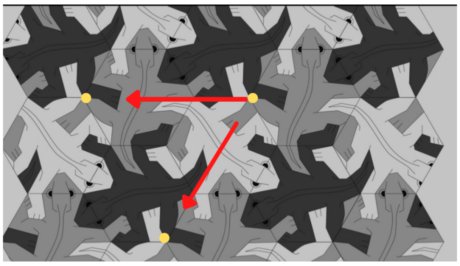


FONTE: Imagem extraída do site pinterest (histora-arte.com)

Observe que a menor simetria de rotação é $120°$, ou seja, $360°/3$. Assim, voltemos ao quadro na Figura 2.2 a fim de observar o próximo passo, que é perceber se há alguma reflexão a partir da Figura 2.4. Portanto, como é perceptível na Figura 2.4, não há reflexão. Assim, já podemos dizer que a obra "Os lagartos" é classificada pela ação do grupo de papel de parede p3.

Uma consideração importante, é notar duas translações independentes do grupo cristalográfico de dimensão dois que age nesse papel de parede. Para isto, observe a Figura 2.8.

Figura 2.8: Translações independentes



FONTE: Imagem extraída do site pinterest (histora-arte.com)

As obras do artista Escher são fascinantes aos olhares dos matemáticos por apresentarem regularidades que estão diretamente ligadas aos ramos da matemática. Segundo Da Conceição Esquincalha (2012), em [4], isso impressionava devido ao fato de que Escher provavelmente não tinha conhecimento profundo sobre as ideias dos conceitos matemáticos por trás dessas regularidades apresentadas em suas obras, além de não ser considerado um bom aluno e não ter se diplomado em cursos de nível superior.

Referências

[1] Charlap, L. Bieberbach. Groups and Flat Manifolds. Springer-Verlag. New York, 1986.

[2] Conway, J. H; Burgiel, H; Goodman, C. The Symmetries of Things. Ak Peters. Wellesley, 2008.

[3] Da Silva Lopes, I. C. Grupos Cristalográficos e orbifolds euclidianos bidimensionais. Dissertação de mestrado, Portugal, 2004.

[4] Da Conceição Esquincalha, A. Tópicos em topologia intuitiva. **Caderno dá licença**. 7,123-146, 2012.

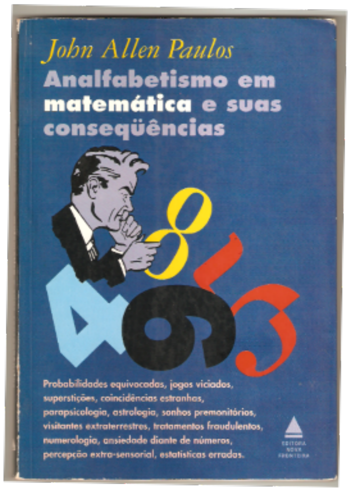
3. Indicações de Leituras/Filmes

Analfabetismo em Matemática e suas consequências

Por Severino Barros de Melo[3]

Movido pela curiosidade acerca de livros interessantes sobre matemática, com edição esgotada, encontro na estante virtual (site que vende livros usados) um exemplar de Analfabetismo em Matemática e suas consequências, escrito por John Allen Paulos e publicado pela Editora Nova Fronteira em 1994.

Na ocasião o autor, que é doutor em Matemática pela Universidade de Wisconsin, atuava como professor na Universidade de Temple (Filadelfia). Além disso, colaborava com diversos jornais, dentre eles The New York Times e Newsweek. Ele faz parte de um grupo de matemáticos que tem facilidade em comunicar essa ciência numa linguagem acessível ao grande público; como o alemão Albert Beautelpascher, já citado em números anteriores do Oxente, e o italiano Pergiorgio Odifreddi.



O livro em destaque, com 146 páginas, além da Introdução e do epílogo, está estruturado em 5 capítulos: Exemplos e princípios; probabilidade e coincidência; Pseudociência; Por que o analfabetismo em Matemática? e Estatísticas, trocas e sociedade.

A título de "degustação" seguem dois fatos narrados no livro: um médico ao consultar um cliente afirma que o tratamento proposto está associado a uma chance em um milhão de riscos; é 99% seguro e geralmente funciona muito bem. Um serviço de meteorologia anuncia 100% de probabilidade de chover no fim de semana: 50% no sábado e 50% no domingo.

[3]Professor do Departamento de Educação da UFRPE

Ao longo dos capítulos, Paulos apresenta dezenas desses fatos que refletem o problema da falta de base em matemática na sociedade norte americana, mas que encontra grande sintonia com a realidade brasileira. Na orelha do livro, o editor afirma que o autor "discute o custo social desse tipo de analfabetismo, argumentando que nossa falta de habilidade com os números e as probabilidades a eles associadas, resulta em decisões pessoais confusas, políticas governamentais equivocadas e imensa susceptibilidade para aceitarmos todo tipo de informações absurdas, raciocínios tortuosos e pseudociências".

O livro foi bem recebido pelo público, merecendo elogios de pessoas importantes no campo da ciência, como escritor e bioquímico Isaac Asimov que considerou a obra "uma análise inteligente sobre os disparates que resultam de um entendimento deficiente (muitas vezes, desentendimento) da ciência e, especificamente da matemática. Este livro agradável está destinado a melhorar a capacidade de pensar de todas as pessoas".

Douglas Hofstadter, PhD em Física na ocasião trabalhando na Universidade de Indiana e destacado escritor pontuou: "O analfabetismo em matemática - uma contrapartida do analfabetismo com as letras - é uma doença que se alastrou em nossa sociedade tecnológica. Para combatê-la, John Allen Paulos concebeu uma vacina perfeita: este livro, em muitos sentidos melhor que todo um curso de matemática das nossas escolas secundárias. Nossa sociedade seria inimaginavelmente diferente se as pessoas médias efetivamente entendessem as ideias desse livrinho importante e maravilhoso. Provavelmente é um sonho por demais otimista, mas eu espero que Analfabetismo em matemática possa ajudar a realizar uma revolução pedagógica nessa matéria".

Por ocasião do lançamento do livro nos Estados Unidos, a revista Veja (8/3/1989, p.61) fez referência ao fato, publicando inclusive um desabafo de Paulos: "As pessoas acreditam que a Matemática é uma disciplina esotérica, que nada tem a ver com a realidade. Isto é um absurdo".

Portanto, quem se arriscar na busca por este livro tão interessante e encontrá-lo, deixe que ele faça parte de sua estante física ou virtual.

4. Quem pergunta, quer saber!

A Geometria dos Ladrilhos

Por Severino Barros de Melo[4]

A seção "Quem pergunta, quer saber!" nesta edição volta a se debruçar sobre perguntas elaboradas pelos visitantes, do já conhecido dos leitores, o Matematikun, museu alemão dedicado à matemática (ver Oxente! número 16 <http://ematematicaoxente.com.br/wp-content/uploads/2020/09/jornal_16ed.pdf>). Tais perguntas respondidas pelo matemático alemão Albert Beautelpascher, diretor do museu, foram traduzidas por nós (tradução livre) do livro Matemáticas: 101 preguntas fundamentales (Alianza Editorial, Madri, 2015).

Pergunta do visitante:

Quais são os polígonos que se encaixam entre si?

Resposta de Beautelpascher:

Está claro que os quadriláteros, sobretudo os quadrados se encaixam entre si. Com certeza você observa isso toda manhã no seu banheiro. Você também sabe, mesmo que não entenda nada de xadrez, que o tabuleiro desse jogo é formado por quadrados. No xadrez temos oito quadrados por oito quadrados, no seu banheiro provavelmente existem mais. Poderia também ser muito mais: 30 por 40, ou 1000 por 1000. Sim, poderíamos ter infinitos quadrados; caberia imaginar todo plano infinito recoberto de quadrados. Em matemática se fala de "azulejar" (às vezes também "pavimentar"), quando uma quantidade de azulejos cobre por completo uma superfície, sem deixar vão e sem se sobrepor. Os mosaicos e o tabuleiro de xadrez são porções de "pavimentos" com quadrados de mesmo tamanho.

[4]Professor do Departamento de Educação da UFRPE

Faz sentido se perguntar se existem outros polígonos regulares com os quais se pode "pavimentar" um plano. Johannes Kepler (1571-1630) foi o primeiro a propor esta questão, e também a encontrar a resposta: os únicos polígonos regulares que permitiriam "pavimentar" um plano com réplicas de mesmo tamanho são o triângulo, o quadrado e o hexágono.

A pavimentação regular com hexágonos é conhecida por causa das colmeias das abelhas, mesmo visualizando com mais frequência no piso dos postos de combustíveis. Os "pavimentos" formados por triângulos equiláteros são mais raros; o tabuleiro do jogo halma é uma parte deles. Esta conclusão de Kepler não é difícil de inferir; na realidade, para ele, basta conhecer a medida do ângulo de um polígono regular de n lados. Raciocinemos primeiramente porque não pode existir nenhum pavimento coberto por pentágonos regulares. A soma dos ângulos internos de um pentágono é 540° (o pentágono pode ser decomposto em três triângulos; a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° ; de modo que a soma dos ângulos internos de um pentágono é 3 vezes 180°). Como todos os ângulos de um pentágono regular tem a mesma medida, a medida de cada ângulo é determinada por 540° : 5 = 108° . Vejamos, o valor 108 não é divisor de 36°. Desse modo não podemos ter em cada lado anexados três pentágonos regulares, posto que sobre um espaço vazio de 36o. Tampouco caberiam quatro pentágonos; teríamos que fazer uma artimanha. Daí, se conclui que não se pode formar nenhum pavimento com pentágonos regulares.

Com o heptágono, octógono e demais se pode defender ainda com mais argumentos: todos têm lados com ângulos maiores do que 120°. Desse modo não se pode encaixar três deles no mesmo vértice.

Uma das características que distingue a matemática, consiste no fato de que muitas vezes tudo se encaixa exatamente. Dá impressão que certas peças se encaixam perfeitamente no todo. Há quem fale inclusive da "maravilha de que tudo se encaixa". Esta propriedade pode ser bem apreciada especialmente nos "pavimentos"[5].

5. Eventos

Devido à pandemia do coronavírus a agenda de eventos está suspensa, uma vez que a maioria deles, se não todos, estão cancelados por tempo indeterminado ou estão ocorrendo na modalidade virtual, sendo divulgados à medida que ocorrem. Para conferir alguns eventos que estão ocorrendo de forma on-line, acessem `https://mathseminars.org/` e fiquem atentos às diversas redes sociais das instituições.

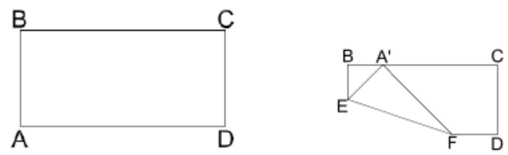
6. Problemas

Para concluir, deixamos para o leitor alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Problema 1. Determine os pares de números inteiros positivos m e n que satisfazem a equação:

$$m^2 = n^2 + m + n + 2018.$$

Problema 2 (Questão da 21ª OMU -2018)**.** O vértice A de uma folha de papel retangular será dobrado sobre o lado BC de forma que as medidas BE e BA' sejam iguais, como mostra a figura.



Nas condições dadas, qual a medida do ângulo $B\hat{A'}E$?

Problema 3 (CMO-2019)**.** Sejam a e b inteiros positivos tais que $a+b^3$ é divisível por $a^2+3ab+3b^2-1$. Prove que $a^2+3ab+3b^2-1$ é divisível pelo cubo de um inteiro maior que 1.

[5]Outras formas de "pavimentar", usando polígonos não regulares podem ser encontradas na seção curiosidades nessa mesma edição do Oxente!.

Enviem as soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, o envio deve ser realizado até **01/09/2021**.

7. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n.17, Dezembro de 2020**.

Problema 1 (Campinense 2019)**.** Seja $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$, uma função satisfazendo:

- $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)\ \forall a, b \in \mathbb{Z}$;
- $f(x) = 0$ se o algarismo da unidade de x for 4, para todo $x \in \mathbb{Z}$.

Encontre $f(2008)$.

Solução. Primeiramente, observe que

$$0 = f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) + f(2) = 2f(2),$$

daí $f(2) = 0$. Por outro lado, considerando 2008, que podemos reescrever como $2 \cdot 1004$, desta forma:

$$f(2008) = f(2 \cdot 1004) = f(2) + f(1004).$$

Aqui temos $0 + 0$. Portanto, $f(2008) = 0$. □

Problema 2 (Lavras 2019)**.** O símbolo $\lceil a \rceil$ denota o menor inteiro maior ou igual ao numero real a. Por exemplo $\lceil 5,7 \rceil = 6$, $\lceil -1,67 \rceil = -1$ e $\lceil 8 \rceil = 8$.

a) Calcule $\lceil 3,1415 \rceil$, $\lceil -4,3333 \rceil$ e $\lceil \sqrt{5} \rceil$.

b) Quais números inteiros $n \in \mathbb{Z}$ satisfazem a equação
$$\left\lceil \frac{2x^2}{x^2+4} \right\rceil = x - 1\ ?$$

Solução.

a) Pela definição temos:

$$\lceil 3,1415 \rceil = 4, \lceil -4,3333... \rceil = -4, \lceil \sqrt{5} \rceil = 3.$$

b) Note que a expressão $\left\lceil \frac{2x^2}{x^2+4} \right\rceil = x - 1$ também pode ser escrita da forma $\left\lceil 2 - \frac{8}{x^2+4} \right\rceil = x - 1$. O menor valor de $x^2 + 4$ é 4 (quando $x = 0$).

Logo, o lado esquerdo da expressão nunca será negativo. Com isso, a equação não terá soluções negativas.

Para $x = 0$, temos:

$$\begin{aligned} \left\lceil 2 - \frac{8}{x^2+4} \right\rceil &= \left\lceil 2 - \frac{8}{0^2+4} \right\rceil \\ &= \lceil 2 - 2 \rceil = 0 \neq 0 - 1. \end{aligned}$$

Para $x = 1$, temos:

$$\begin{aligned} \left\lceil 2 - \frac{8}{x^2+4} \right\rceil &= \left\lceil 2 - \frac{8}{1^2+4} \right\rceil \\ &= \left\lceil 2 - \frac{8}{5} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{2}{5} \right\rceil = 1 \neq 1 - 1. \end{aligned}$$

Para $x = 2$, temos:

$$\begin{aligned} \left\lceil 2 - \frac{8}{x^2+4} \right\rceil &= \left\lceil 2 - \frac{8}{2^2+4} \right\rceil \\ &= \left\lceil 2 - \frac{8}{8} \right\rceil \\ &= \lceil 2 - 1 \rceil = 1 = 2 - 1. \end{aligned}$$

Para $x = 3$, temos:

$$\begin{aligned} \left\lceil 2 - \frac{8}{x^2+4} \right\rceil &= \left\lceil 2 - \frac{8}{3^2+4} \right\rceil \\ &= \left\lceil 2 - \frac{8}{13} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{18}{13} \right\rceil = 2 = 3 - 1. \end{aligned}$$

também satisfazendo a equação.

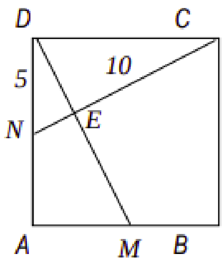
ISSN 2526-8651

Para todo inteiro x maior que 3, o termo $\left\lceil 2 - \frac{8}{x^2+4} \right\rceil$ é positivo e menor que 1 e, portanto, $\left\lceil 2 - \frac{8}{x^2+4} \right\rceil = 2$ para todo x maior que 3.

Isso implica que a equação não tem solução para $x > 3$, logo as únicas soluções são $x = 2$ e $x = 3$.

$\square$

Problema 3 (OPM 2005 – Nível 2)**.** Sejam $ABCD$ um quadrado cujo lado mede $10cm$, M e N os pontos médios de AB e AD, respectivamente, como mostra a figura. Determine a área do triângulo NED.



Solução. Observe que o triângulo AMD é retângulo em A. Então pelo Teorema de Pitágoras temos

$$\begin{aligned} (DM)^2 &= 10^2 + 5^2 \\ &= 5\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Além disso, os triângulos NED e AMD são semelhantes. Assim

$$\frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{DE}{10} = \frac{EN}{5}$$

logo $DE = 2\sqrt{5}$ e $EN = \sqrt{5}$. Portanto, a área A do triângulo NED será

$$A = \frac{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 5.$$

$\square$