É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

**Número 17, volume 1, Dezembro de 2020**

**ISSN 2526-8651**

## Sumário



# 1. Artigo

## Uma introdução às desigualdades

Everton Henrique Cardoso de Lira

Universidade Federal de Pernambuco - Núcleo de Formação Docente
Campus do Agreste
55014-560 - Caruaru - Pernambuco - Brasil

### Considerações Iniciais

Saber lidar com desigualdades é uma habilidade fundamental para todo aquele que deseja estudar a matemática de forma séria. Isto posto, a pergunta que se coloca em seguida é: "Por onde começar o estudo das desigualdades?". Neste texto propomos uma introdução a este belo assunto através de duas desigualdades cuja presença é garantida nos mais variados problemas de olímpiada de matemática, a saber, a *Desigualdade Triangular* e a *Desigualdade das Médias*.

Contudo, antes de abordá-las diretamente, apresentaremos alguns fatos básicos que fundamentarão o estudo que se segue.

**Fato 1.** Sejam $a$ e $b$ números reais. Se $a > 0$ e $b > 0$ então $a + b > 0$ e $ab > 0$.

**Fato 2.** Seja $a$ um número real. Apenas uma das três alternativas é possível: ou $a < 0$, ou $a = 0$ ou $a > 0$.

**Fato 3.** Sejam $a$ e $b$ números reais. Se $b - a > 0$ dizemos que $a$ é menor do que $b$; se $b - a < 0$ dizemos que $a$ é maior do que $b$; e se $b-a=0$ dizemos que $a$ é igual a $b$. Denotamos tais casos por $a<b, a>b$ e $a=b$, respectivamente.

Tais fatos nos conduzem a seguinte proposição.

**Proposição 1.1.** *Sejam $a$, $b$ e $c$ números reais e $n$ um inteiro. São válidas as seguintes propriedades:*
*i) Se $a<b$ e $b<c$ então $a<c$.*
*ii) Só pode ocorrer uma das três possibilidades: ou $a<b$, ou $a>b$ ou $a=b$.*
*iii) Se $a<b$, então para todo $c$, tem-se $a+c<b+c$. Se $a>b$, então para todo $c$, tem-se $a+c>b+c$.*
*iv) Se $a<b$, então para todo $c>0$, tem-se $ac<bc$. Caso $c<0$, então $ac>bc$.*
*v) Se $a<b$ e $a'<b'$, então $a+a'<b+b'$. Se $0<a<b$ e $0<a'<b'$, então $aa'<bb'$.*
*vi) Se $0<a<b$ e $n>1$, então $a^n<b^n$.*
*vii) Se $0<a<b$, então $1/a>1/b$.*

**Demonstração:** $i$) Se $a<b$ e $b<c$, então pelo Fato 3, $b-a>0$ e $c-b>0$, daí segue pelo Fato 1, que $c-a=(c-b)+(b-a)>0$, logo, $a<c$.
$ii$) Pelo Fato 2, só pode ocorrer uma das três possibilidades para o número $b-a$: ou $b-a>0$ e nesse caso temos $b>a$; ou $b-a<0$ e nesse caso temos $b<a$; ou $b-a=0$ e nesse caso temos $b=a$.
$iii$) Se $a<b$, então pelo Fato 3, $b-a=(b+c)-(c+a)>0$, logo, $a+c<b+c$. O caso $a>b$ se prova de forma análoga.
$iv$) Se $a<b$, então pelo Fato 3, temos $b-a>0$. Tomando $c>0$, segue pelo Fato 1, que $(b-a)c=bc-ac>0$, ou seja, $ac<bc$. O caso $c<0$ se prova de forma análoga.
$v$) Como $a<b$ e $a'<b'$, temos pelo Fato 3, que $b-a>0$ e $b'-a'>0$. Agora, pelo Fato 1, temos que $(b-a)+(b'-a')=(b+b')-(a+a')>0$, logo, $a+a'<b+b'$. Sabendo que $0<a<b$ e $0<a'<b'$, temos pelo Fato 3, que $b-a>0$ e $b'-a'>0$. Pelo Fato 1, temos que $(b-a)a'=ba'-aa'>0 \Rightarrow ba'>aa'$ e $b(b'-a')=bb'-ba'>0 \Rightarrow bb'>ba'$. Daí concluímos por $i$) que $aa'<bb'$.
$vi$) Basta aplicar $v$) $n$ vezes para $0<a<b$ que o resultado segue.
$vii$) Note que $1/a-1/b=\frac{b-a}{ab}=(b-a)\frac{1}{ab}>0$, visto que $b-a>0$ e $\frac{1}{ab}>0$, logo, $1/a>1/b$, pelo Fato 1.

O leitor interessado em uma exposição mais ampla, completa e rigorosa sobre os fundamentos das desigualdades entre números reais, sinta-se à vontade para consultar o capítulo 3 de [1], porém para os nossos objetivos neste texto tais propriedades serão suficientes. Vejamos agora alguns exemplos em que tais propriedades serão aplicadas.

**Exemplo 1.** Mostre que para todo $x\in\mathbb{R}$, tem-se $x^2\geq 0$.

*Solução:* Pelo Fato 2, ou $x<0$, ou $x=0$ ou $x>0$. No primeiro caso, temos $x<0$, e por $(iv)$ da Proposição 1.1, $x\cdot x=x^2>0\cdot x=0$, no segundo caso, temos de imediato $x=0\Rightarrow x^2=0$, finalmente no terceiro caso, temos $x>0$, e por $(iv)$ da Proposição 1.1 novamente, $x\cdot x=x^2>0\cdot x=0$. Logo, para todo $x\in\mathbb{R}$, tem-se $x^2\geq 0$.

**Exemplo 2.** Quem é maior $2^{300}$ ou $3^{200}$?

*Solução:* Primeiro note que calcular manualmente os números $2^{300}$ e $3^{200}$ e depois comparar qual o maior é uma tarefa quase impossível, porém, se nos valermos de um pouco de astúcia e da Proposição 1.1, obteremos facilmente a resposta para a pergunta. Com efeito, note que $2^3<3^2$, daí por $(vi)$ segue que $2^{300}=(2^3)^{100}<(3^2)^{100}=3^{200}$, o que responde a pergunta.

Passemos agora para um exemplo de resposta um pouco menos evidente.

**Exemplo 3.** (OBMEP - 2015) Seja $N$ a quantidade de dígitos do número $2^{100}$, determine um inteiro positivo $k$ tal que $k\leq N\leq k+5$.

*Solução:* Inicialmente note que $2^3<10$, por $(vi)$ novamente, temos $(2^3)^{33}=2^{99}<10^{33}$. Multiplicando ambos os membros da desigualdade por 2, obtemos $2^{100}<2\cdot 10^{33}$ e como $2\cdot 10^{33}<10\cdot 10^{33}=10^{34}$, concluímos por $(i)$, que $2^{100}<10^{34}$. Assim, $2^{100}$ tem no máximo 34 dígitos, ou seja, $N = 34$ e $k = 29$.

**Exemplo 4.** (OBMEP - 2016) Se $n$ e $k$ são inteiros positivos, então $(n+1)(n+2)\cdots(n+k) < (n+k)^k$. Use isto para determinar qual dos dois números a seguir é maior do que o outro: $(100!)!$ e $99!^{100!}100!^{99!}$.

*Solução:* Seja $x$ um inteiro positivo qualquer. Pela dica do enunciado podemos escrever

$$\begin{gathered} 1\cdot 2\cdots x < x^x \\ (x+1)(x+2)\cdots(2x) < (2x)^x \\ (2x+1)(2x+2)\cdots(3x) < (3x)^x \\ \vdots \\ (99x+1)(99x+2)\cdots(100x) < (100x)^x. \end{gathered}$$

Agora, multiplicando todas as desigualdades membro a membro, concluímos por $(v)$, que $(100x)! < (100!x^{100})^x = (100!)^x x^{100x}$. Tomando $x = 99!$, concluímos que $(100!)! < 99!^{100!}100!^{99!}$.

**Observação 1.** No que se segue, ainda continuaremos utilizando os Fatos 1, 2 e 3, bem como as propriedades da Proposição 1.1, porém no intuito de deixarmos a leitura mais fluida e agradável, não faremos mais menção às mesmas, ficando assim, subentendida a sua utilização.

## A Desigualdade Triangular

A desigualdade triangular recebe este nome, pois a mesma define a condição de existência de um triângulo no plano euclidiano, a saber, que a soma dos comprimentos de dois de seus lados deve ser maior do que o comprimento do terceiro. Ou seja, se $a, b$ e $c$ são os lados de um triângulo, então $a, b$ e $c$ devem satisfazer

$$\begin{gathered} a < b+c \\ b < a+c \\ c < a+b. \end{gathered}$$

Na figura abaixo, temos os segmentos $a, b$ e $c$ de comprimentos $6, 3$ e $2$, unidades de medidas, respectivamente. Note que $b < a+c, c < a+b$, porém $a > b+c$ o que não satisfaz a desigualdade triangular, ou seja, impede os mesmos de formarem um triângulo.

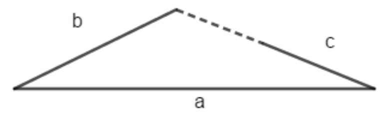



**Figura 1:** Segmentos que não formam um triângulo

Vejamos dois exemplos de aplicação mais imediata da desigualdade triangular.

**Exemplo 5.** Sabendo que $x+10, 2x+4$ e $20-2x$ são os lados de um triângulo, determine todos os possíveis valores inteiros assumidos por $x$.

*Solução:* Para que $x+10, 2x+4$ e $20-2x$ sejam os lados de um triângulo, devemos ter

$$\begin{gathered} x+10 < 2x+4+20-2x \Rightarrow x < 14; \\ 2x+4 < x+10+20-2x \Rightarrow x < \tfrac{26}{3}; \text{ e} \\ 20-2x < x+10+2x+4 \Rightarrow \tfrac{6}{5} < x. \end{gathered}$$

Tais condições nos levam a concluir que $\frac{6}{5} < x < \frac{26}{3}$. Logo, todos os valores inteiros possíveis são: $2, 3, 4, 5, 6$ e $7$.

**Exemplo 6.** Sejam $a, b$ e $c$ os comprimentos dos lados de um triângulo. Mostre que a função

$$f(x) = b^2x^2 + (b^2+c^2-a^2)x + c^2$$

é positiva, para todo $x$ real.

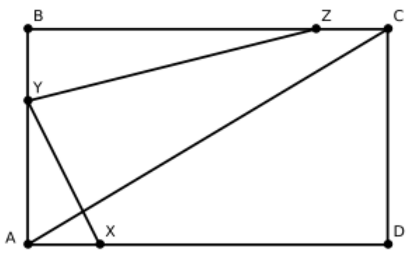
*Solução:* Como $f$ é uma função quadrática, sabemos que para que a mesma seja positiva para todo $x$ real, é suficiente que o discriminante delta $\Delta$ seja menor do que zero, ou seja, devemos mostrar que $\Delta = (b^2+c^2-a^2)^2 - 4b^2c^2 < 0$.

De fato, notando as sucessivas diferenças de quadrados, nós obtemos $\Delta = (b^2+c^2-a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2+c^2-a^2+2bc)(b^2+c^2-a^2-2bc) = [(b+c)^2 - a^2][(b-c)^2-a^2] = (b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a)$.

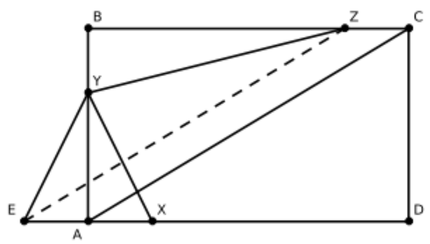
Como $a, b$ e $c$ são os lados de um triângulo, $a, b$ e $c$ são positivos e satisfazem a desigualdade triangular, ou seja, $a + b > c, b + c > a$ e $a + c > b$. Daí segue que $a + b + c > 0$, $b + c - a > 0, b - c + a > 0$ e $b - c - a < 0$, ou seja, $\Delta = (b + c + a)(b + c - a)(b - c + a)(b - c - a) < 0$, logo, a função dada é sempre positiva para todo $x$ real como queríamos mostrar.

Os exemplos anteriores, embora se refiram a triângulos, possuem soluções puramente algébricas. Vejamos agora exemplos mais relacionados com a Geometria.

**Exemplo 7.** (OBMEP - 2017) Os pontos $X, Y$ e $Z$ estão marcados nos lados $AD, AB$ e $BC$ do retângulo $ABCD$, respectivamente. Dado que $AX = CZ$ mostre que $XY + YZ \geq AC$.

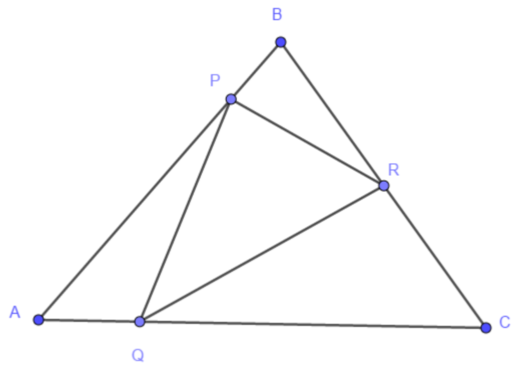



*Solução:* Prolongando $DA$ até o ponto $E$ de modo que $AE = AX$ obtemos o triângulo $EXY$, o qual tem $AY$ como mediana e altura, logo, $EXY$ é isósceles, ou seja, $EY = XY$.




Agora, note que $AE = AX$ implica em $AE = CZ$ e como $AE$ é paralelo a $CZ$, concluímos que $AEZC$ é um paralelogramo, logo, $EZ = AC$, aplicando a desigualdade triangluar ao triângulo $EYZ$ obtemos $EY + YZ \geq EZ \Rightarrow XY + YZ \geq AC$ o que prova o resultado.

**Exemplo 8.** Seja $ABC$ um triângulo e $P, Q$ e $R$ pontos sobre os lados $AB, AC$ e $BC$, respectivamente, conforme figura abaixo.

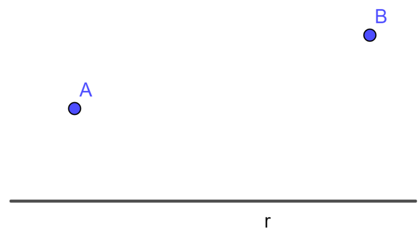



Mostre que o perímetro do triângulo $PQR$ é menor do que o do triângulo $ABC$.

*Solução:* Aplicando a desigualdade triangular aos triângulos $APQ, BPE$ e $CQR$ obtemos $PQ < AP + AQ, PR < BP + BR$ e $QR < CQ + CR$, respectivamente. Somando membro a membro as desigualdades obtemos $PQ + PR + QR < (AP + PB) + (AQ + QC) + (BR + RC) = AB + AC + BC$ o que prova o resultado.

Para encerrar esta seção apresentamos um exemplo clássico de aplicação da desigualdade triângular, o qual possui inúmeras aplicações, uma das quais apresentamos no Exercício 4.

**Exemplo 9.** No plano, sejam uma reta $r$ e dois pontos $A$ e $B$, não pertencentes a $r$ e no mesmo semiplano determinado por $r$.




Determine o ponto $P$ de $r$, para o qual $AP + PB$ é mínimo.

*Solução:* Sejam $B'$ o simétrico de $B$ em relação à reta $r$ e $P$ a intercessão do segmento $AB'$ com $r$ (ver Figura 2).

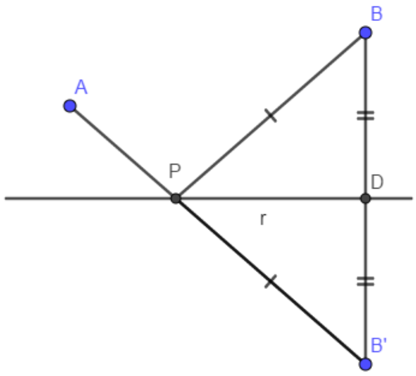



**Figura 2**

Afirmamos que $P$ é o ponto que minimiza $AP+PB$. De fato, pela construção feita, temos que o triângulo $PBB'$ é isósceles de base $BB'$, donde segue que $PB = PB'$. Seja agora $Q$ um ponto sobre $r$, mostraremos que $AQ+QB > AP+PB$ (ver Figura 3).

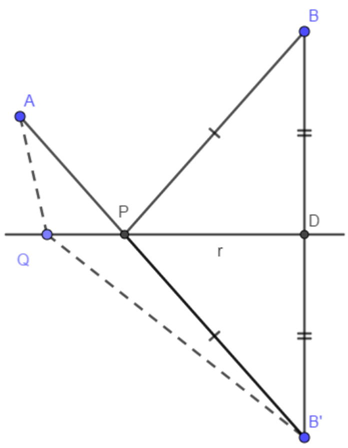



**Figura 3**

Com efeito, aplicando a desigualdade triângular ao triângulo $AB'Q$ obtemos $AQ + QB' = AQ + QB > AB' = AP + PB' = AP + PB$ o que prova o resultado.

## A Desigualdade das Médias

Para iniciarmos nossa discussão sobre a desigualdade das médias, cabe a seguinte definição.

**Definição 1.1.** Sejam $a_1, \ldots, a_n$ números reais positivos. Aos números

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \text{ e}$$
$$A = \tfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

chamamos, respectivamente, de média geométrica e média aritmética dos números $a_1, \ldots, a_n$.

**Observação 2.** Vale ressaltar aqui que a definição acima leva em consideração o fato de que para os números positivos $a_1, \ldots, a_n$, a sua média aritmética $A$, possui a característica de manter a soma destes números, ou seja, $A+\cdots+A = nA = a_1+\cdots+a_n \Rightarrow A = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$. A média geométrica $G$, por sua vez, possui a característica de manter o produto destes números, portanto, $G \cdot \ldots \cdot G = G^n = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \Rightarrow G = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

Passemos agora à demonstração de que as médias acima definidas satisfazem a *Desigualdade das Médias*, a saber, $G \leq A$.

Para demonstrarmos a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, vamos nos utilizar do seguinte lema, cuja demonstração, deixaremos a cargo do leitor ou pode ser encontrada em [2].

**Lema 1.2.** *Se $b_1, \cdots, b_n$ são números reais positivos tais que $b_1 \cdot \ldots \cdot b_n = 1$, então $n \leq b_1 + \cdots + b_n$.*

**Proposição 1.3.** *Dados $a_1, \cdots, a_n$ números reais positivos, tem - se*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \tfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$

*Com a igualdade sendo obtida se, e somente se, $a_1 = \cdots = a_n$.*

**Demonstração:**

Isto posto, note que $G^n = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$, logo, $\frac{a_1}{G} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{G} = 1$. Pelo Lema 3.2, segue que $n \leq \frac{a_1}{G} + \cdots + \frac{a_n}{G} \Rightarrow G \leq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \Rightarrow G \leq A$. Ademais, se no produto $\frac{a_1}{G} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{G} = 1$ todos os fatores forem iguais a 1, ou seja, $a_1 = \cdots = a_n$, teremos pelo Lema 3.2, que $\frac{a_1}{G} + \cdots + \frac{a_n}{G} = 1 + \cdots + 1 = n \Rightarrow \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = G \Rightarrow A = G$. Por outro lado, se $A = G$, temos $A^n = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \Rightarrow \frac{a_1}{A} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{A} = 1$, e pelo Lema 3.2, segue que $n \leq \frac{a_1}{A} + \cdots + \frac{a_n}{A} \Rightarrow n \leq \frac{a_1+\cdots+a_n}{A} \Rightarrow n \leq \frac{nA}{A} = n$. Da igualdade, concluímos que $\frac{a_1}{A} = \cdots = \frac{a_n}{A} = 1$, ou seja, $a_1 = \cdots = a_n$ como queríamos demonstrar.

**Observação 3.** Vale mencionar que a utilização do Lema 3.2 simplifica e muito a demonstração do resultado; para uma demonstração alternativa e mais técnica, ver [5]. Para o leitor com conhecimentos de Cálculo Diferencial e Integral em Várias Variáveis Reais, lembramos que uma outra demonstração desta desigualdade pode ser obtida pelo método dos *Multiplicadores de Lagrange* através da otimização da função $f(x_1, \cdots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$ sujeita as restrições $x_1 + \cdots + x_n = k, x_i > 0, i = 1, \cdots, n, k > 0$. Deixamos pois, aos interessados, esta tarefa!

Agora, vejamos como este belo resultado é utilizado na prática.

**Exemplo 10.** Seja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^4 + \frac{2}{x^2}$. Determine seu valor mínimo.

*Solução:* Note que como os valores de $x$ do domínio desta função são todos números positivos, nós podemos aplicar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. Com efeito, $f(x) = x^4 + \frac{2}{x^2} = x^4 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{x^4 \frac{1}{x^2} \frac{1}{x^2}} = 3\sqrt[3]{1} = 3$. Assim, o valor mínimo de $f$ é igual a 3, o qual, ocorre quando $x^4 = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^6 = 1 \Rightarrow x = 1$.

**Exemplo 11.** Sabendo que $a_1, \ldots, a_n$ são números positivos tais que $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, prove que $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n$.

*Solução:* A desigualdade entre as médias aritmética e geométrica garante as seguintes desigualdades $1 + a_1 \geq 2\sqrt{a_1}, 1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_2}, \cdots, 1 + a_n \geq 2\sqrt{a_n}$. Multiplicando as desigualdades membro a membro, obtemos

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n a_1 a_2 \cdots a_n$$

como, por hipótese, $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, segue o resultado.

**Exemplo 12.** (Olímpiada Cearense de Matemática - 2018 - Adaptado) Considere o polinômio $M(x, y) = 1 - 3x^2y^2 + x^2y^4 + x^4y^2$. Prove que $M(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

*Solução:* Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica aos números $1, x^2y^4$ e $x^4y^2$, nós obtemos

$$\frac{1+x^2y^4+x^4y^2}{3} \geq \sqrt[3]{x^6y^6} \Rightarrow 1 + x^2y^4 + x^4y^2 \geq 3x^2y^2 \geq 0 \Rightarrow 1 - 3x^2y^2 + x^2y^4 + x^4y^2 \geq 0 \Rightarrow M(x, y) \geq 0$$

como queríamos provar.

**Exemplo 13.** (Olímpiada Pessoense de Matemática - 2014) Seja $p(x) = x^{10} + b_9x^9 + b_8x^8 + \cdots + b_1x + 1$, com $b_i \geq 0, i = 1, \ldots, 9$. Demonstre que, se as raízes do polinômio $p(x)$ são todas reais, então $p(2) \geq 3^{10}$.

*Solução:* Sejam $r_1, r_2, \ldots, r_{10}$ as raízes de $p$. Note que, pelo fato de $b_i \geq 0, i = 1, \ldots, 9$, tem-se $r_i \leq 0, i = 1, \ldots, 10$ e como $b_{10} = 1, p(x)$ obtemos a seguinte decomposição

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_{10}), \text{ logo,}$$
$$p(2) = (2 - r_1)(2 - r_2) \cdots (2 - r_{10}) =$$
$$(1 + 1 + (-r_1))(1 + 1 + (-r_2)) \cdots (1 + 1 + (-r_{10})).$$

Agora, sabendo que $-r_i \geq 0, i = 1, \ldots, 9$ e pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, obtemos

$$1 + 1 + (-r_1) \geq 3\sqrt[3]{-r_1}, 1 + 1 + (-r_2) \geq 3\sqrt[3]{-r_2}, \cdots, 1 + 1 + (-r_{10}) \geq 3\sqrt[3]{-r_{10}}$$

Segue daí que

$$p(2) = (1 + 1 + (-r_1))(1 + 1 + (-r_2)) \cdots (1 + 1 + (-r_{10})) \geq 3^{10}\sqrt[3]{(-r_1)(-r_2) \cdots (-r_{10})} = 3^{10}\sqrt[3]{r_1 r_2 \cdots r_{10}} = 3^{10},$$

visto que, pelas *Relações de Girard*[1], $r_1 r_2 \cdots r_{10} = 1$.

**Exemplo 14.** (IMO - 2008) Sejam $a, b, c$ e $d$ números reais positivos tais que $abcd = 1$ e $a+b+c+d > \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}$. Prove que $a+b+c+d < \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}$.

[1]Para uma exposição das relações de Girard na resolução de problemas olímpicos, ver: É Matemática, Oxente! 2017- Número 3, volume 1, Agosto de 2017. Disponível em http://ematematicaoxente.com.br/wp-content/uploads/2016/12/jornal_3ed.pdf.

*Solução:* Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica aos números $\frac{a}{b}, \frac{a}{b}, \frac{b}{c}$ e $\frac{a}{d}$, obtemos:

$$a = \sqrt[4]{\frac{a^4}{abcd}} = \sqrt[4]{\frac{a}{b}\frac{a}{b}\frac{b}{c}\frac{a}{d}} \leq \frac{\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a}{d}}{4} \Rightarrow 4a \leq \frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a}{d}.$$

Procedendo de forma análoga para $b, c$ e $d$, encontra-se

$$4b \leq \frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{b}{a};$$

$$4c \leq \frac{c}{d}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}+\frac{c}{b}; \text{ e}$$

$$4d \leq \frac{d}{a}+\frac{d}{a}+\frac{a}{b}+\frac{d}{c}.$$

Somando membro a membro estas desigualdades, concluímos que

$$4(a+b+c+d) \leq 3(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{d}+\tfrac{d}{a}) + (\tfrac{b}{a}+\tfrac{c}{b}+\tfrac{d}{c}+\tfrac{a}{d})$$

logo,

$$4(a+b+c+d) - 3(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{d}+\tfrac{d}{a}) \leq (\tfrac{b}{a}+\tfrac{c}{b}+\tfrac{d}{c}+\tfrac{a}{d}) \qquad (1).$$

Por hipótese, sabemos que

$$a+b+c+d > \tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{d}+\tfrac{d}{a} \Rightarrow 4(a+b+c+d) > 4(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{d}+\tfrac{d}{a})$$

Donde segue que

$$4(a+b+c+d) - 3(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{d}+\tfrac{d}{a}) > a+b+c+d \qquad (2).$$

De (1) (2) concluímos que,

$$a+b+c+d < \tfrac{b}{a}+\tfrac{c}{b}+\tfrac{d}{c}+\tfrac{a}{d},$$

o que prova o resultado.

**Exemplo 15.** (Seleção para a Olímpiada do Cone Sul - 1998) Sejam $x, y$ reais positivos satisfazendo $x^2+xy+y^2 > 3$. Prove que pelo menos um dos números $x^2+xy$ e $y^2+xy$ é maior que dois.

*Solução:* Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica aos números $x^2+xy$ e $y^2+xy$ e lembrando que $x+y \geq 2\sqrt{xy}$, nós obtemos

$$(x^2+xy)+(y^2+xy) \geq 2\sqrt{(x^2+xy)(y^2+xy)} = 2\sqrt{xy(x^2+2xy+y^2)} = 2(x+y)\sqrt{xy} \geq 4xy \qquad (3).$$

Por outro lado, note que

$$x^2+xy+y^2 > 3 \Rightarrow (x+y)^2 - xy > 3 \Rightarrow (x+y-\sqrt{xy})(x+y+\sqrt{xy}) > 3 \Rightarrow \sqrt{xy}\cdot 3\sqrt{xy} > 3 \Rightarrow xy > 1 \qquad (4).$$

De (3) e (4) concluímos que $(x^2+xy)+(y^2+xy) > 4 \qquad (5).$

Provemos agora, que pelo menos um dos dois números $x^2+xy$ e $y^2+xy$, é maior do que dois. De fato, suponha por absurdo, que $x^2+xy < 2$ e $y^2+xy < 2$, somando membro a membro as desigualdades, obtemos $(x^2+xy)+(y^2+xy) < 4$ o que é um absurdo contra (5), logo, pelo menos um dos números $x^2+xy$ e $y^2+xy$ é maior que dois.

## Interpretação Geométrica da Desigualdade das Médias

Nesta seção interpretaremos geométricamente as desigualdades das médias para dois números positivos $a$ e $b, a > b$. Inicialmente, seja $\Gamma$ uma semi circunferência de centro $O$ e $PQ$ o seu diâmetro. Seja também $R$ sobre $PQ$, tal que $PR = a$ e $RQ = b$. É possível mostrar - construindo com régua e compasso, por exemplo - que os pontos $S$ e $T$ em $\Gamma$ são tais que $OT = \frac{a+b}{2}$ e $RS = \sqrt{ab}$, ou seja, são as médias aritmética e geométrica de $a$ e $b$, respectivamente, ver Figura 4.

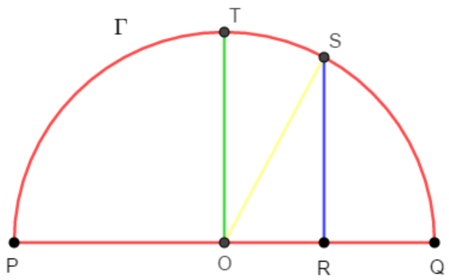



**Figura 4:** Médias como segmentos de reta

Considerando o triângulo $ORS$ e notando que $OS = OT$, temos pelo Teorema de Pitágoras, que

$(OS)^2 = (RS)^2 + (OR)^2 \Rightarrow (OS)^2 > (RS)^2 \Rightarrow OS > RS \Rightarrow \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $OR = 0$, ou seja, $PR = PQ \Rightarrow a = b$.

Por fim, indicamos ao leitor que deseja acompanhar com maiores detalhes as construções dos segmentos $OT$ e $RS$ a leitura de [2]. Para outra belíssima interpretação geométrica destas desigualdades, utilizando-se de um trapézio em vez de uma circunferência, indicamos a leitura de [3].

## Considerações Finais e Exercícios

Enfim, já que você chegou até aqui caro leitor, vamos deixar a melhor parte para você. A seguir compomos uma pequena lista com belos exercícios, os quais tem por objetivo permitir ao leitor um aprofundamento do que foi estudado e, em alguns casos, uma abordagem diferente para os conteudos que já foram explorados no texto.

**Exercício 1.1.** Ordene os números do maior para o menor: $5^{100}, 6^{91}, 7^{90}, 8^{85}$.

**Exercício 1.2.** Se $a, b$ e $c$ são os lados de um triângulo, prove que $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$.

**Exercício 1.3.** (Banco de questões da OBMEP - 2009 - Nível 2) A base $AD$ de um trapézio $ABCD$ mede $30cm$. Suponhamos que exista um ponto $E$ na base $AD$ tal que os triângulos $ABE, BCE$ e $CDE$ tenham perímetros iguais. Determine o comprimento de $BC$.

**Exercício 1.4.** Determine o triângulo $ABC$, com lado $AB$ dado e que possui perímetro mínimo. (**Dica:** Exemplo 9)

**Exercício 1.5.** Prove que se é possível construir um triângulo com lados $a, b$ e $c$, então é possível construir um triângulo com lados $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}$ e $\frac{1}{c+a}$.

**Exercício 1.6.** Se $a, b$ e $c$ são reais positivos, prove que $ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}$.

**Exercício 1.7.** (ITA - 2002) Sejam $x, y > 0$. Mostre que $(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x})^4 \geq C_{8,4}$, onde $C_{8,4}$ representa a combinação simples de 8 elementos tomados 4 a 4.

**Exercício 1.8.** (Olímpiada do Cone Sul - 1994) Seja $p$ um real positivo dado. Achar o mínimo valor de $x^3 + y^3$ sabendo que $x$ e $y$ são números reais positivos tais que $xy(x + y) = p$.

**Exercício 1.9.** Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dita convexa se para quaisquer $x, y \in [a, b]$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$ satisfaz $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

a) Mostre que, para $\lambda = \frac{1}{2}$ a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$ é convexa em qualquer intervalo $[a, b]$.

b) Faça o mesmo que no item a) agora para qualquer $\lambda \in [0, 1]$.

O próximo exercício tem por objetivo apresentar outra prova geométrica para a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para dois números positivos $a$ e $b$.

**Exercício 1.10.** (Olímpiada de Matemática do Distrito Federal - 2018) Zoroastro tem quatro peças de madeira no formato de um triângulo retangulo de catetos com medidas $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ $\quad (a \geq b)$, Figura 1. Com essas peças ele monta dois quadriláteros, Figura 2 e Figura 3.

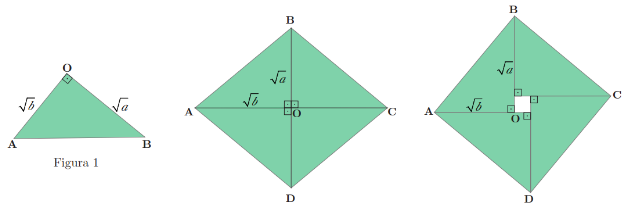


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Qual é o valor da área do quadrilátero ABCD da figura 2?

b) Qual é o valor da área do quadrilátero ABCD da figura 3? **(Obs.: Ignore o orifício retangular no seu centro e calcule a área limitada pelos 4 lados do quadrilátero.)**

c) Comparando a área dos quadriláteros das figuras 2 e 3 e dos quatro triângulos usados para formá-los demonstre a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, ou seja, mostre que se $a$ e $b$ são números positivos, então $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ e diga em que condições ocorre a igualdade.

**Exercício 1.11.** (Olímpiada Pernambucana de Matemática - 2017) a) Sabendo que a média aritmética de $k$ números positivos $x_1, \cdots, x_k$ é maior ou igual que a média geométrica desses números:

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{k} \geq \sqrt[k]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

mostre que

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{k-1}}{x_k} + \frac{x_k}{x_1} \geq k.$$

b) A alometria é a parte da biologia que estuda a variação na forma entre espécies e indivíduos da mesma espécie. As funções que descrevem esses fenomênos são ditas alométricas e são da forma $f(x) = ax^b$, com $a, b > 0$. Considere a seguinte combinação de funções alométricas:

$$f : [0, 1 + \tfrac{1}{n}] \to \mathbb{R}$$

dada por $f(x) = (n+1)x^n - nx^{n+1}$, com $n \in \mathbb{N}$. Verificar que $f$ é limitada inferiormente por 0 e superiormente por 1, ou seja, $0 \leq f(x) \leq 1$.

**Exercício 1.12.** (IMO 2012) - Seja $n > 3$ um inteiro e sejam $a_2, a_3, \cdots, a_n$ números positivos tais que $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Prove que $(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n \geq n^n$.

## Referências


[1] Lima, Elon Lages. Curso de Análise, Vol. 1. 14.ed. - Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2013.

[2] OBMEP, Clubes de Matemática. Sala de Estudo: Médias e Desigualdades. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-estudo-medias-e-desigualdades/. Acessado em 30/07/2020

[3] Silva, Mariana Freitas Tacanho. Médias, desigualdades das médias e resolução de problemas. 2019. 105 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2019.

[4] Nery, Chico. Uma aula sobre médias. Revista do Professor de Matemática. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/68/5.html. Acessado em 27/07/2020

[5] Oliveira, Krerley Irraciel Martins; Fernández, Adán José Corcho. Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções. - 2ª Ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[6] Banco de questões da obmep. Disponível em: http://147.65.23.40/banco.php. Acessado em 01/08/2020

[7] Banco de questões da IMO. Disponível em: http://www.imo-official.org/problems.aspx.. Acessado em 05/08/2020


# 2. Curiosidades

### Numberphile


Lyen Tower [2]


Brady Haran é um cineasta e jornalista especializado em divulgação científica que produz vídeos independentes. Em 15 de Setembro de 2011 ele criou o Numberphile, um canal com vídeos voltados para a área da Matemática que possui atualmente quase 3 milhões de inscritos e mais de 400.000.000 milhões de visualizações. Para se ter noção da grandiosidade deste canal, alguns desses vídeos tem como apresentadores o físico Edmund Copeland, o Astrônomo Clifford Stoll e o matemático James Grime.

Os vídeos são separados por assuntos ou apresentadores. Muitos deles tratam de curiosidades. Como exemplos vale destacar dois: um é sobre o cubo de Rubik com o número Pi. Outro, intitulado “The Scientific Way to Cut a Cake”, mostra que a forma como cortamos os bolos nas festas de aniversário está cientificamente errada. A partir disto ele mostra a maneira correta de fazê-lo. Outro que merece ser lembrado é o “Ellipitical Pool Table”, nele podemos ver a construção e a utilização de uma mesa de bilhar com intuito de que, independente de

[2] Licenciando em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco

qual direção batermos nas bolas, elas sempre cairão dentro do buraco. O que é mais interessante nesse vídeo, é o formato que a mesa terá que ter, para que isto ocorra. Além desses citados, o canal tem mais de 200 vídeos para aprender e se divertir.

Vale observar que o Numberphile é um canal Inglês, contudo a plataforma do Youtube onde ele se encontra, disponibiliza legendas em português; portanto, para aqueles que o acessarem não haverá problemas com o idioma.

## 3. Indicações de Leituras/Filmes

### As Cientistas: 50 mulheres que mudaram o mundo

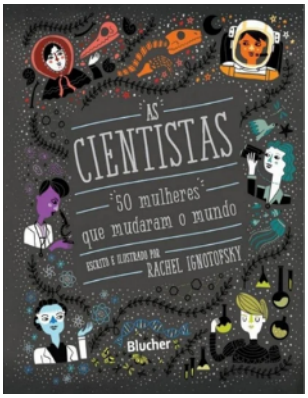
Por Juliana Martins [3]

Nas últimas décadas vemos uma crescente discussão sobre a participação das mulheres na sociedade. A história das ciências e, particularmente, a história da matemática não está aquém dessa discussão. Graças a pesquisas e trabalhos recentes, nomes de mulheres que produziram conhecimento em suas épocas cada vez mais estão ganhando destaque.

O livro As Cientistas destaca as contribuições de 50 mulheres notáveis para o campo das ciências, da tecnologia, da engenharia e da matemática, desde o mundo antigo até o contemporâneo. A autora convida o leitor a conhecer um pouquinho da história dessas mulheres, apresentando perfis biográficos de cada uma delas, seus estudos, as dificuldades que passaram para realizarem suas pesquisas na época em que viveram, entre outras curiosidades.

Matemáticas como Hipátia, Wang Zhenyi, Ada Lovelace, Hertha Ayrton, Emmy Noether, Katherine Johnson, Annie Easley e Maryam Mirzakhani (ganhadora da Medalha Fields em 2014) figuram nesse livro.

[3]Professora do Departamento de Educação da UFRPE




Ao todo, o livro possui 127 páginas. Após a introdução segue, por ordem cronológica, o texto sobre a vida da primeira "perfilada" (como a autora chama), que é a matemática Hipátia de Alexandria (c.a 350 e 415[?] d.c). Junto de cada texto está uma ilustração da perfilada. Cabe mencionar que os desenhos são de autoria da própria escritora do livro, Rachel Ignotofsky, que é designer por formação. No livro também são apresentados infográficos sobre equipamentos de laboratório, taxas de mulheres que trabalham atualmente em campos da ciência e um glossário científico ilustrado.

Segundo a autora, As Cientistas celebra as realizações dessas mulheres que abriram caminho para as próximas gerações de matemáticas, engenheiras, físicas, biólogas, astronautas e muito mais! Essas histórias servem de inspiração para meninas e meninos de todo o mundo; elas mostram que não importa o gênero, a raça ou os antecedentes, qualquer pessoa pode realizar coisas grandiosas.

### Referências

[1] Rachel Ignotofsky. As cientistas: 50 mulheres que mudaram o mundo. Tradução de Sonia Augusto. São Paulo: Blucher, 2017.

## 4. Quem pergunta, quer saber!

### Números de cabo a rabo

Por Severino Barros de Melo[4]

Sempre às voltas com a Revista do Professor de Matemática (RPM), (2005, p. 60), um leitor faz uma pergunta que provavelmente nossos leitores terão curiosidade de saber a resposta. Eis a pergunta: Um número chama-se palíndromo ou capicua (*) quando sua leitura da esquerda para a direita e da direita para a esquerda é a mesma. Por exemplo, 636, 142241, 33, são capicuas. Há um procedimento que produz capicuas: Escreva um número qualquer, inverta seus algarismos e some os dois números. Se o resultado for capicua, pare; se não for capicua, repita o procedimento com o resultado. ( Exemplos: 426+624= 1050; 1050+0501= 1551 que é capicua. 87+78=165; 165+561= 726; 726+627+1353; 1353+3531=4884). Um tal procedimento sempre termina?

Resposta da RPM: Até hoje não se sabe a resposta. Embora, para a maioria dos números testados, o procedimento acabe num número capicua, isso ainda não aconteceu com o número 196. Até setembro de 2003 haviam sido feitos mais de 250 milhões de interações a partir de 196, obtendo um número com mais de 115 milhões de algarismos, que ainda não era um número capicua. 196 é o menor número para o qual o procedimento ainda não terminou (* *).

Os asteriscos são por conta da redação do Jornal É Matemática, Oxente!

(*) Segundo a Wikipédia a palavra capicua tem origem catalã: “capi i cua”; ou seja, cabeça e cauda. Em “nordestinês” seria de cabo a rabo.

(* *) O leitor interessado, pode acessar a enciclopédia online de sequências de inteiros, em oeis.org sequência A023108, no qual é discutido o estado da arte no problema, são dadas mais referências e até um código em mathematica para quem quiser checar o problema computacionalmente

[4]Professor do Departamento de Educação da UFRPE

## 5. Eventos

Devido à pandemia do coronavírus a agenda de eventos está suspensa, uma vez que a maioria deles, se não todos, estão cancelados por tempo indeterminado ou estão ocorrendo na modalidade virtual sendo divulgados à medida que ocorrem. Para conferir alguns eventos que estão ocorrendo de forma on-line acessem https://mathseminars.org/ e fiquem atentos às diversas redes sociais das instituições.

## 6. Problemas

Para concluir deixamos para o leitor alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

**Problema 1** (Campinense 2019)**.** Seja $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$, uma função satisfazendo:

- $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)\ \forall a, b \in \mathbb{Z}$;
- $f(x) = 0$ se o algarismo da unidade de $x$ for 4, para todo $x \in \mathbb{Z}$.

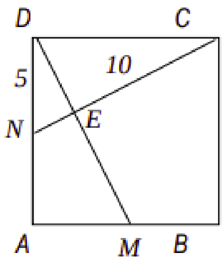
Encontre $f(2008)$ .

**Problema 2** (Lavras 2019)**.** O símbolo $\lceil a \rceil$ denota o menor inteiro maior ou igual ao numero real $a$. Por exemplo $\lceil 5,7 \rceil = 6$, $\lceil -1,67 \rceil = -1$ e $\lceil 8 \rceil = 8$.

a) Calcule $\lceil 3,1415 \rceil$, $\lceil -4,3333 \rceil$ e $\lceil \sqrt{5} \rceil$;

b) Quais números inteiros $x \in \mathbb{Z}$ satisfazem a equação
$$\left\lceil \frac{2x^2}{x^2+4} \right\rceil = x - 1\ ?$$

**Problema 3** (OPM 2005 – Nível 2)**.** Sejam $ABCD$ um quadrado cujo lado mede $10cm$, $M$ e $N$ os pontos médios de $AB$ e $AD$, respectivamente, como mostra a figura. Determine a área do triângulo $NED$.




Mandem soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, sua solução deve ser enviada até **01/03/2021**.

## 7. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n.15, Junho de 2020**. [5]

**Problema 1** (OPM – 2008)**.** Seja $ABC$ um triângulo isósceles de altura $8cm$ e base $4cm$, inscrito em uma circunferência de raio $R$. Determine o valor de $R$.

*Solução.* Defina $M$ o ponto médio do segmento $BC$, note que $BM = MC = \frac{BC}{2} = 2cm$, logo pelo Teorema de Pitágoras(em $\triangle ABM$), temos que $AB = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$.
Definindo $[X]$=Área do poligono $X$; obtemos que $[ABC] = BC \cdot \frac{AM}{2} = 16$ e como $[ABC] = \frac{abc}{4R}$, teremos que $48R = abc = \sqrt{68} \cdot \sqrt{68} \cdot 4 = 272 \Rightarrow R = \frac{17}{4}cm$. No qual $R$ é o raio do circuncirculo de $ABC$. □

**Problema 2.** Sobre os lados de um triângulo retângulo foram construídos quadrados. Se a área de um dos quadrados é $25cm^2$ e cada lado do triângulo tem medida inteira em $cm$, quanto valem essas medidas?

*Solução.* Seja $ABC$ o triângulo retângulo em $\angle B$; como a área vale 25, temos que um dos lados mede $5cm$, portanto divida nos seguintes casos:

- Se o lado medindo 5 for um cateto: Devemos ter, por Pitágoras, que o triângulo é da forma $(x, 5, \sqrt{x^2+25})$ e como os lados devem ser inteiros; consequentemente $x^2+25$ deve ser um quadrado perfeito: $x^2+25 = y^2 \Rightarrow 25 = (y-x)(y+x) \Rightarrow y-x = 1$ e $y+x = 25$, pois $y-x < y+x$, assim temos que $(y,x) = (13,12)$. Logo o triângulo $(5,12,13)$ é solução!
- Se for a hipotenusa: $25 = x^2+y^2$ com $x, y$ inteiros positivos; e $x < 5$ e $y < 5$, testando todos os casos só podemos ter o triângulo $(3,4,5)$.

□

**Problema 3.** Na seção "Quem pergunta quer saber" é respondida a seguinte questão: "Quantos triângulos obtusângulos existem, cujos lados são três inteiros consecutivos?". Responda agora, sob estas condições: Quantos são os triângulos retângulos? E quantos acutângulo?

*Solução.*

- Para o caso do triângulo retângulo: Devemos ter que triângulos são da forma $(a-1, a, a+1)$ e portanto $(a+1)^2 = a^2+(a-1)^2 \Rightarrow a^2+2a+1 = a^2+(a^2-2a+1) \Rightarrow a^2-4a = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $a = 4$, como $a$ é positivo; o triângulo só pode ser $(3,4,5)$.
- Para o caso do triângulo acutângulo: Pela lei dos cossenos, devemos ter que $(a+1)^2 < a^2+(a-1)^2 \Rightarrow a^2+2a+1 < a^2+(a^2-2a+1) \Rightarrow a^2-4a > 0 \Rightarrow a \geq 5$. E como a desigualdade triangular $a+1 < a+(a-1)$ é válida para $a > 2$, temos que tais triângulos existem; e portanto temos **infinitos** triângulos acutângulos da forma $(a-1, a, a+1)$.

□

[5] As soluções dos 3 problemas foram enviadas pelo leitor Ailton Silva