É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 16, volume 1, Setembro de 2020
ISSN 2526-8651

Sumário

1. Artigo

Consequências da desigualdade de Cauchy–Schwarz

Leon Silva
UFRPE - CEGEN - Departamento de Matemática
52171-900 - Recife - PE - Brasil

Introdução

A *desigualdade de Cauchy-Schwarz* é uma das desigualdades mais úteis e conhecidas entre os matemáticos. Foi apresentada inicialmente pelo matemático francês *Augustin Louis Cauchy* (1789-1857) e décadas depois desenvolvida pelo alemão, e também matemático, *Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)*. Ao longo dos anos, foi ganhando mais generalizações e aumentando, portanto, sua aplicabilidade. Em configurações diferentes, a desigualdade está presente em conteúdos universitários como Álgebra Linear, Análise, Teoria das Probabilidades e outros. Atualmente é uma ferramenta indispensável para resolver um série de desigualdades propostas em olimpíadas de matemática. Há uma grande quantidade de problemas em que é possível aplicar a desigualdade diretamente, e outros que podem ser reduzidos de forma a permitir sua utilização. A *desigualdade de Cauchy-Schwarz* permitiu gerar várias outras que facilitam a abordagem de problemas com dificuldade elevada.

Neste artigo vamos mostrar o uso da *desigualdade de Cauchy-Schwarz* resolvendo uma variada lista de problemas de matemática olímpica. Nesse mesmo contexto, outras desigualdades derivadas, e também importantes, serão apresentadas com suas devidas demonstrações. Para manter o foco apenas na sua aplicabilidade, resolvemos omitir a demonstração da *desigualdade de Cauchy-Schwarz*. O leitor que quiser saber os aspectos teóricos da desigualdade, não terá problemas em encontrar um texto adequado. Para tal recomendamos o artigo da Revista Eureka [1].

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Teorema 1.1. *Sejam $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots b_n$ números reais, não todos nulos ($n > 1$). Então*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2.$$

A igualdade é verdadeira se e somente se $a_i = kb_i$, na qual k é um número real diferente de zero.

O Teorema 1.1 descreve a forma clássica da *desigualdade de Cauchy-Schwarz*. Veja no exemplo a seguir uma aplicação direta.

Exemplo 1 (Gazeta Matemática)**.** Sejam a, b, c números reais não negativos. Prove que

$$\left(ax^2 + bx + c\right)\left(cx^2 + bx + a\right) \geq \frac{\left(a+b+c\right)^2 x^2}{3}.$$

para todo número real x não negativo.

Solução. Como todos os números envolvidos são não negativos, podemos expandir o lado direito da desigualdade e afirmar que

$$\begin{aligned}&\left(ax^2 + bx + c\right)\left(cx^2 + bx + a\right)\\ &\qquad \geq \left(a^2x^2 + b^2x^2 + c^2x^2\right).\end{aligned}$$

Reescrevendo o lado direito da desigualdade acima e aplicando *desigualdade de Cauchy-Schwarz*, obtemos

$$\begin{aligned}&\left(a^2x^2 + b^2x^2 + c^2x^2\right) =\\ &\left(\frac{x^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{x^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{x^2}{(\sqrt{3})^2}\right)\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\\ &\qquad \geq \left(\frac{ax}{\sqrt{3}} + \frac{bx}{\sqrt{3}} + \frac{cx}{\sqrt{3}}\right)^2\\ &\qquad = \frac{\left(a+b+c\right)^2 x^2}{3}.\end{aligned}$$

□

O exemplo a seguir requer a aplicação de outros resultados antes de fazer uso da *desigualdade de Cauchy-Schwarz*. Neste caso, usaremos a fórmula de Herão[1] para o cálculo da área de um triângulo cujos lados são conhecidos. Alertamos também ao leitor a importância dos passos e dos resultados obtidos ao longo do exemplo mais adiante, uma vez que serão utilizados na demonstração da *desigualdade de Pedoe* (veja o Exemplo 7).

Exemplo 2 (Lema 1.2.1 de [3])**.** Prove que se a, b, c e x, y, z denotam o comprimento dos lados de dois triângulos quaisquer, então

$$\begin{aligned}&x^2(b^2 + c^2 - a^2) + y^2(a^2 + c^2 - b^2) +\\ &\qquad + z^2(a^2 + b^2 - c^2) > 0.\end{aligned}$$

Solução. Desenvolvendo o lado esquerdo da desigualdade é possível observar que o problema equivale a mostrar que

$$\begin{aligned}&(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2)\\ &\qquad > 2(x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2).\end{aligned}$$

Usando a Fórmula de Herão podemos afirmar que as expressões

$$\begin{aligned}&\left(a+b+c\right)\left(b+c-a\right)\left(a+c-b\right)\left(a+b-c\right),\\ &\left(x+y+z\right)\left(y+z-x\right)\left(x+z-y\right)\left(x+y-z\right)\end{aligned}$$

são positivas, já que estamos lidando com as áreas dos triângulos citados. Desenvolvendo as últimas duas expressões encontramos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4) > 0,\\ (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^4 + y^4 + z^4) > 0,\end{aligned}$$

que podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + c^2 > \sqrt{2(a^4 + b^4 + c^4)},\\ x^2 + y^2 + z^2 > \sqrt{2(x^4 + y^4 + z^4)},\end{aligned}$$

fornecendo que

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

[1] https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Her%C3%A3o

é maior do que

$$2\sqrt{(a^4+b^4+c^4)(x^4+y^4+z^4)}.$$

Mais uma vez aplicaremos a *desigualdade de Cauchy-Schwarz* para provar a desigualdade desejada, observe:

$$\begin{aligned}2\sqrt{(a^4+b^4+c^4)(x^4+y^4+z^4)}\\ \geq 2(x^2a^2+y^2b^2+z^2c^2).\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 3 (Retirado e adaptado da organização *Brilliant*[2])**.** Sejam a, b, c ($a > b > c$) inteiros e primos entre si. De acordo com a Figura 1 temos dois conjuntos de caixas:

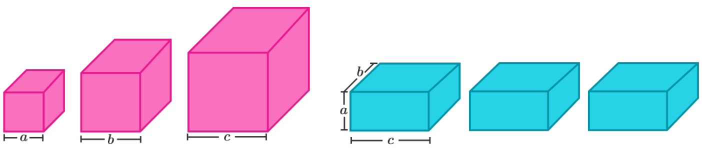


Figura 1: Caixas rosas à esquerda e azuis à direita. (Worranat Pakornrat, 2019)

1. Três caixas cúbicas na cor rosa com seus respectivos comprimentos a, b e c;

2. Três paralelepípedos azuis idênticos cujos lados medem a, b e c.

Qual conjunto possui uma área de superfície total maior?

Solução. Como a área total da superfície de todas as caixas rosas é $6a^2+6b^2+6c^2$ e a área total das superfície de todas caixas azuis é $6ab+6bc+6ca$, o problema pode ser resolvido usando desigualdades. Nesse sentido, vamos usar a desigualdade a seguir, obtida usando a *desigualdade de Cauchy-Schwarz.*

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(b^2+c^2+a^2\right) \geq (ab+bc+ca)^2.$$

Já que

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(b^2+c^2+a^2\right) = \left(a^2+b^2+c^2\right)^2,$$

obtemos

$$\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq ab+bc+ca.$$

Então

$$6a^2+6b^2+6c^2 \geq 6ab+6bc+6ca.$$

Uma vez que a, b, c são primos entre si, não são proporcionais. Daí,

$$6a^2+6b^2+6c^2 > 6ab+6bc+6ca,$$

ou seja, os cubos (caixas rosas) terão sempre área total da superfície maior que os paralelepípedos (caixas azuis). $\square$

Exemplo 4 (OPEMAT 2019)**.** Sejam a_1, a_2, a_3 e b_1, b_2, b_3 todos números reais positivos. Sabendo que $a_1a_2a_3 = 1$ e $b_1b_2b_3 = \pi^3$. Mostre a validade da desigualdade

$$\begin{aligned}\frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2}{a_1^2}+\frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2}{a_2^2}+\frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2}{a_3^2}\\ \geq 9\pi^2.\end{aligned}$$

Solução. Reescrevendo a desigualdade acima como

$$\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}\right)\cdot\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)$$

podemos aplicar a *desigualdade de Cauchy-Schwarz* e obter

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i^2}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{3}b_i^2\right) &\geq \left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i}\cdot b_i\right)^2\\ &= \left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}\right)^2\end{aligned}$$

Por outro lado, a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica (veja em [1]) fornece

$$\frac{\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{b_1\cdot b_2\cdot b_3}{a_1\cdot a_2\cdot a_3}} = \pi,$$

[2] https://brilliant.org/

donde segue que

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} \geq 3\pi$$

mostrando portanto a desigualdade desejada. □

Lema de Titu

A desigualdade a seguir, que é uma aplicação direta da *desigualdade de Cauchy-Schwarz*, se tornou muito popular por se mostrar uma técnica poderosa para demonstrações matemáticas e especialmente pelas suas aplicações em problemas de matemática olímpica. Por essa razão está presente em diversos textos e programas de treinamentos para olimpíadas de matemática. Também chamada de *Sedrakyan's inequality*, ficou mais popular como *Titu's lemma* (*Lema de Titu*, em português) devido ao Matemático Titu Andreescu[3].

Lema 1.2. *(Lema de Titu) Se $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$ são números reais positivos, então*

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

Demonstração. Segue imediatamente da *desigualdade de Cauchy-Schwarz* que

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1 + b_2 + \cdots b_n)$$
$$\geq \left(\sqrt{\frac{a_1^2}{b_1}} \cdot \sqrt{b_1} + \sqrt{\frac{a_2^2}{b_2}} \cdot \sqrt{b_2} + \cdots + \sqrt{\frac{a_n^2}{b_n}} \cdot \sqrt{b_n}\right)^2$$
$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$$

□

Exemplo 5 (Olimpíada de Matemática, Irlanda 1999)**.** Sejam a, b, c, d números reais positivos satisfazendo $a + b + c + d = 1$. Prove que

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}.$$

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Titu_Andreescu

Solução. Segue do *Lema de Titu*:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a}$$
$$\geq \frac{(a+b+c+d)^2}{2(a+b+c+d)} = \frac{1}{2}.$$

□

Exemplo 6 (Competição Tcheco-Eslovaca 1999)**.** Sejam a, b, c números reais positivos quaisquer. Prove a desigualdade

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

Demonstração. Primeiramente reescrevemos o lado direto da desigualdade acima como

$$\frac{a^2}{a(b+2c)} + \frac{b^2}{b(c+2a)} + \frac{c^2}{c(a+2b)}$$

e em seguida aplicamos o Lema de Titu, obtendo

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}.$$

Portanto é suficiente mostrar que

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca).$$

O que não é difícil uma vez que

$$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2,$$

implica em

$$3(a+b+c)^2 - 3(a^2+b^2+c^2) = 6(ab+bc+ca).$$

Daí, novamente pela *desigualdade de Cauchy-Schwarz*

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$$

que combinada com a igualdade anterior fornece

$$2(a+b+c)^2 = 3(a+b+c)^2 - (a+b+c)^2$$
$$\geq 6(ab+bc+ca),$$

como queríamos. $\square$

Desigualdade de Aczel

A nossa próxima aplicação da *desigualdade de Cauchy-Schwarz* é a clássica, porém não tão conhecida, *desigualdade de Aczel* [4]. Tal desigualdade foi apresentada por *Aczel* em 1956 e atualmente, por suas possibilidades de aplicações em diversas áreas da matemática, tem surgido como parte importante na solução de problemas olímpicos de matemática.

Teorema 1.3. *Sejam $a_1, \dots, a_n$ e $b_1, \dots b_n$ números reais positivos tais que $a_1^2 > a_2^2 + \cdots + a_n^2$ ou $b_1^2 > b_2^2 + \cdots + b_n^2$, então*

$$(a_1b_1 - a_2b_2 - \cdots - a_nb_n)^2 \geq \left(a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_n^2\right)\left(b_1^2 - b_2^2 - \cdots - b_n^2\right).$$

Demonstração. Definindo

$$a = a_2^2 + \cdots + a_n^2, \qquad b = b_2^2 + \cdots + b_n^2$$

Notamos que se $a_1^2 = a$ e $b_1^2 = b$ a desigualdade é verificada imediatamente. Portanto vamos assumir que

$$a_1^2 > a \quad \text{e} \quad b_1^2 > b.$$

A *desigualdade de Cauchy-Schwarz* fornece

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq a_1b_1,$$

uma vez que

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2} < a_1b_1.$$

Agora, observe que para provar a *desigualdade de Aczel* é suficiente verificar que

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n + \sqrt{(a_1^2 - a)(b_1^2 - b)} \leq a_1b_1.$$

Para isso, aplicamos duas vezes a *desigualdade de Cauchy-Schwarz*. Primeiro no lado esquerdo da desigualdade acima, resultando em

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n + \sqrt{(a_1^2 - a)(b_1^2 - b)} \leq \sqrt{ab} + \sqrt{(a_1^2 - a)(b_1^2 - b)}$$

e em seguida no lado direito da desigualdade anterior, obtendo

$$\sqrt{ab} + \sqrt{(a_1^2 - a)(b_1^2 - b)} \leq \sqrt{(a + a_1^2 - a)(b + b_1^2 - b)} = a_1b_1$$

que combinada com a desigualdade anterior, fornece a desigualdade desejada. $\square$

A seguir apresentamos uma desigualdade que envolve triângulos. Em muitos textos, desigualdades com essa natureza são chamadas de desigualdades geométricas.

Exemplo 7 (*Desigualdade de Pedoe* [3]). De acordo com a Figura 2, as constantes a, b, c são comprimentos dos lados do triângulo preenchido na cor rosa e x, y, z são os comprimentos dos lados do triângulo da cor azul. Denote por A_r e A_a as áreas dos triângulos nas cores rosa e azul, respectivamente. Prove que

$$x^2(b^2 + c^2 - a^2) + y^2(a^2 + c^2 - b^2) + z^2(a^2 + b^2 - c^2) \geq 16A_rA_a.$$

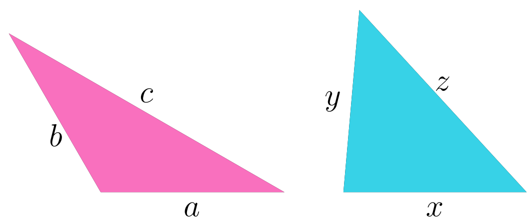


Figura 2: Triângulos quaisquer. Triângulo rosa (esquerda). Triângulo azul (direita).

Solução. Já que (veja Exemplo 2)

$$16(A_r)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4),$$
$$16(A_a)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^4 + y^4 + z^4),$$

podemos reescrever a desigualdade desejada como $(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) - 2(x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2) \geq$

$\sqrt{((a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4))((x^2+y^2+z^2)^2-2(x^4+y^4+z^4))}$. A partir das seguintes substituições

$$\begin{aligned} a_1 &= a^2+b^2+c^2, & a_2 &= \sqrt{2}a^2,\\ a_3 &= \sqrt{2}b^2, & a_4 &= \sqrt{2}c^2,\\ b_1 &= x^2+y^2+z^2, & b_2 &= \sqrt{2}x^2,\\ b_3 &= \sqrt{2}y^2, & b_4 &= \sqrt{2}z^2, \end{aligned}$$

é possível afirmar que (ver Exemplo 2):

$$a_1^2 > a_2^2+a_3^2+a_4^2 \quad \text{e} \quad b_1^2 > b_2^2+b_3^2+b_4^2.$$

Finalmente aplicamos a *desigualdade de Aczel* para $n=4$ e obtemos

$$\begin{aligned} &a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4\\ &\quad \geq \sqrt{a_1^2-(a_2^2+a_3^2+a_4^2)(b_1^2-(b_2^2+b_3^2+b_4^2))} \end{aligned}$$

que é a desigualdade pretendida. □

Problemas Propostos

Problema 1 (Olimpíada de Matemática Iran 1998)**.** Prove que, para todos $x,y,z>1$ tal que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$, temos

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

[*Sugestão. Note que* $\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}=1$]

Problema 2 (Desilgualdade de Nesbitt)**.** Se a,b,c são números números reais positivos, então

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Problema 3 (Olimpíada de Matemática Suíça 1983)**.** Sejam a,b e $c>0$. Prove que $abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

Problema 4 (Olimpíada Internacional de Zhautykov 2008)**.** Seja a,b,c números reais positivos tal que $abc=1$. Prove que

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{3}{2}$$

[*Sugestão: Use o Lema 1.2*]

Problema 5 (Seleção de Equipe USA 2004)**.** Sejam $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2\ldots,b_n$ números reais tais que

$$\begin{aligned} &(a_1^2+\ldots+a_n^2-1)(b_1^2+\ldots+b_n^2-1)\\ &\qquad > (a_1b_1+\ldots+a_nb_n-1)^2. \end{aligned}$$

Prove que $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2>1$ e $b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2>1$. [*Sugestão. Use a desigualdade de Aczel (Teorema 1.3)*]

Problema 6 (Olimpíada de Matemática Coreia 2001)**.** Prove que, para todo $a,b,c>0$, que a expressão

$$\sqrt{(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)}$$

é maior ou igual a

$$abc+\sqrt[3]{(a^3+abc)(b^3+abc)(c^3+abc)}.$$

[*Sugestão*: Use a *desigualdade de Cauchy–Schwarz e depois a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.*]

Referências

[1] NETO, Antonio Caminha Muniz. Desigualdades elementares. Eureka, p. 34-49, 1999.

[2] ANDREESCU, Titu et al. Problems From The Book. XYZ Press, 2010.

[3] LEE, Hojoo. Topics in Inequalities-Theorems and Techniques. Korea Institute for Advanced Study, 2007.

[4] ACZEL, Janos. Some general methods in the theory of functional equations in one variable. New applications of functional equations. Uspekhi Matematicheskikh Nauk, v. 11, n. 3, p. 3-68, 1956.

2. Curiosidades

A matemática dos cristais

Renato dos Santos Diniz[4]

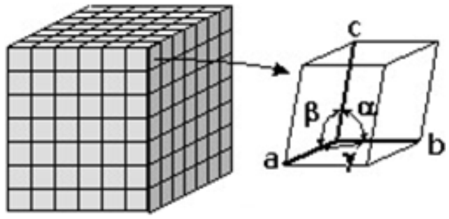
A beleza e a simetria que existem nos cristais nos chamam a atenção e, assim, diferentes profissionais e curiosos se interessam no seu estudo. Dos mais variados aspectos e pontos de vista, os cristais podem ser observados por cristalógrafos, químicos, físicos e matemáticos. Pois é! Os matemáticos estudam e se interessam pelas propriedades dos cristais de uma determinada maneira.

Alguns matemáticos no decorrer da história, das grandes civilizações humanas, enxergaram - e enxergam - a Matemática como uma linguagem, citando o caso, Galileu Galilei (1564-1642) afirmou que “a matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo”. Por meio de modelos e representações os matemáticos criam e descrevem quase tudo que lhes rodeiam. Alguns matemáticos, como por exemplo, A. Bravais (em 1848), C. Jordan (em 1867) e E.S. Fedorov (em 1885-1889) propuseram-se a estudar as simetrias na natureza, particularmente as que aparecem presentes nos cristais, ver [3].

Para que não haja ambiguidade quanto aos termos que empregaremos a seguir, é conveniente relembrar algumas definições. Um conjunto C, do plano ou do espaço, é chamado de *convexo* quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C. Um *poliedro* é uma região do espaço limitada por polígonos convexos, chamados as *faces* do poliedro. Os lados desses polígonos chamamos de *arestas* do poliedro e os vértices dos polígonos são também chamados *vértices* do poliedro. Exige-se ainda que a intersecção de duas faces quaisquer do poliedro seja uma aresta comum a essas faces, ou um vértice comum, ou seja vazia. Dizemos que um poliedro é convexo quando ele limita um sólido convexo no sentido da definição anterior. Observamos que a partir das definições apresentadas anteriormente é possível demonstrarmos que cada aresta de um poliedro convexo é lado de exatamente duas faces desse poliedro, ver [4, p.98].

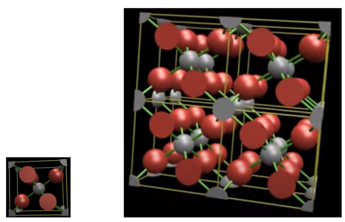
Figura 3: Sistema cristalino.

Sistema de cristalização	Eixos	Ângulos entre os eixos
Cúbico	a = b = c	α = β = γ = 90º
Tetragonal	a = b ≠ c	α = β = γ = 90º
Ortorrômbico	a ≠ b ≠ c ≠ a	α = β = γ = 90º
Hexagonal	a = b ≠ c	α = β = 90º; γ = 120º
Romboédrico ou Trigonal	a = b = c	α = β = γ ≠ 90º
Monoclínico	a ≠ b ≠ c ≠ a	α = γ = 90º; β ≠ 90º
Triclínico	a ≠ b ≠ c ≠ a	α ≠ β ≠ γ (todos ≠ 90º)



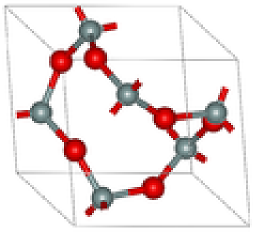
No caso da classificação dos cristais é suficiente observar a composição molecular do cristal e as simetrias da molécula, chamadas de grupos pontuais (Figura 4). Essas moléculas se organizam em poliedros convexos (“caixinhas” como na Figura **??**), chamada de sistema cristalino, ressaltando que são de sete tipos, ver [2]. Sendo assim, aspectos microscópicos, na composição molecular, influenciam em sua forma macroscópica, como os enxergamos na natureza. Notamos que as propriedades químicas não concernem ao campo de conhecimento da Matemática, pois foge da nossa competência; a título de exemplo, que tipo de ligação química, seja ela covalente, metálica ou iônica, os átomos que formam as moléculas estão submetidas.

Figura 4: Moléculas de TiO_2.



[4]Professor do Centro de Formação de Professores da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Figura 5: Moléculas de SiO_2.



FONTE: Imagem extraída do site www.wikipedia.org.

Segundo [3], a classificação completa de todos os cristais ocorreu em 1889 e 1891, pelos matemáticos E. Fedorov e A. M. Schoenflies, respectivamente. Eles provaram, com trabalhos independentes, que existem apenas 230 grupos de cristais que podem ser encontrados na natureza. As Figuras 6 e 7 mostram exemplos de cristais encontrados na natureza, a saber, o rutilo e o quartzo, respectivamente. Posteriormente, a teoria e os conceitos que envolviam os estudos iniciais dos cristais tornaram-se mais abstratos e sofisticados, como podemos ver em [1]. Destacamos a importância da tese de doutorado do matemático de L. Bieberbach em 1910, cujo trabalho traz dentre muitas contribuições, a definição do que é "grupo de cristais" em dimensões maiores, os chamados grupos cristalográficos, ver [1]. Dessa forma, faz sentido o seguinte questionamento: o que seriam "os grupos de cristais" em outras dimensões? Já existe resposta concreta para essa pergunta e foi respondida pelo matemático Ludwig Bieberbach em 1910, que em seu trabalho de tese, de forma abstrata, os nomeam de grupos cristalográficos. Indicamos a leitura de [1] para mais detalhes da teoria que envolve os grupos cristalográficos.

Figura 6: Cristal rutilo

FONTE: Imagem extraída do site www.wikipedia.org.

Figura 7: Cristal quartzo.

FONTE: Imagem extraída do site www.wikipedia.org.

Referências

[1] Charlap, L. Bieberbach. Groups and Flat Manifolds. Springer-Verlag. New York, 1986.

[2] Conway, J. H; Burgiel, H; Goodman, C. The Symmetries of Things. Ak Peters.

[3] Da Silva Lopes, I. C. Grupos Cristalográficos e orbifolds euclidianos bidimensionais. Dissertação de mestrado, Portugal, 2004.

[4] Lima, E. L. Meu professor de Matemática e outras histórias. 6. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 241p.

3. Indicações de Leituras/Filmes

Donald no País da Matemágica

Por Hellen Souza [5]

O curta "Donald no País da Matemágica" foi lançado nos Estados Unidos em 1959 e é estrelado pelo famoso personagem da Disney Pato Donald que simplesmente é levado a desbravar o País da Matemágica.

Inicialmente, nos deparamos com o personagem Pato Donald completamente desgostoso com o fato de adentrar no País da Matemágica, alegando que matemática era apenas para "intelectuais", ao mesmo tempo, demonstra desconhecer a história, as contribuições e a influência da matemática no mundo. Donald carrega consigo uma ideia de matemática resumida apenas a contas, e em muitos

[5] Aluna do curso de Licenciatura em Matemática da UFRPE

momentos podemos perceber sua surpresa ao ser apresentado ao contexto histórico matemático e a presença da matemática em diversas áreas e situações. Toda a trajetória de Donald pelo País da Matemática é acompanhada por um locutor que é a voz do "espírito da aventura".

No decorrer do curta, descobertas matemáticas são abordadas e elementos importantes são citados, dentre eles: A relação de Pitágoras e a música, o pentagrama, a regra de ouro, o retângulo de ouro e sua forte presença em arquiteturas e artes. Além disso, o conceito de infinito é apresentado, pelo espírito ao Donald, que descobre que o pentagrama pode ser desenhado infinitas vezes dentro de si mesmo; porém, o mesmo espírito explica que não há papel suficientemente grande a ponto de conseguirmos esboçar infinitos desenhos de pentagrama e que o infinito pode ser concebido apenas na mente .

Para além disso, e para a surpresa de Donald, ele se depara com a presença da matemática em jogos, exercícios mentais e até mesmo na natureza, fazendo o personagem perceber o quão grande é a relação da matemática com o universo. No final do filme Donald compreende e reconhece o valor da matemática e o curta termina com uma citação de Galileu Galilei: "A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o universo".

O curta "Donald no País da Matemágica" é leve, carismático, envolvente e recheado de informações. Além disso, desperta no telespectador a curiosidade acerca do mundo matemático e é possível assisti-lo de forma gratuita no Youtube. O desenho possui 27 minutos de duração e foi indicado ao Oscar como melhor curta documentário e até hoje é considerado o melhor desenho educativo da Disney.

4. Quem pergunta, quer saber!

A seção "quem pergunta quer saber" traz nesta edição novas perguntas elaboradas pelos visitantes do museu Matematikun (ver Oxente número 11), bem como as respostas dadas pelo seu diretor, o matemático alemão Albert Beautelpascher. Visitante: O que é o problema $(3n + 1)$?

Resposta de Beautelpascher: Escolha um número qualquer. Se for par, divida-o por 2. Se for ímpar multiplique por 3 e some 1. Em ambos os casos obteremos um novo número. Proceda novamente como na primeira vez: se o novo número for par divida-o por 2, se for ímpar multiplique por 3 e some 1. Siga o mesmo procedimento com o novo número resultante. Obtém-se uma sucessão de números na qual o número seguinte a um número n pode ser escrito do seguinte modo:

$\frac{n}{2}$ no caso de n ser um número par, $3n + 1$ se n for um número ímpar.

Se partirmos do número 6, vamos obter a sucessão 6,3,10,5,16,8,4,2,1. Se o primeiro número for 7 obtemos uma sucessão maior: 7, 22, 13, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, porém termina também no número 1. Qualquer dessas sucessões termina com o número 1. Você pode escolher qualquer número para iniciar, mas sempre chegará ao 1.

Este fato foi descoberto pelo matemático alemão Lothar Collatz (1910-1990) no ano de 1937. Para ser mais exato, ele se deparou com este problema e supôs que todas as sucessões criadas por este procedimento terminavam em 1. Não conseguiu demonstrar, apenas conjecturou que sempre é assim. Seu verdadeiro descobrimento [sic] foi o problema que em sua homenagem se denomina a conjectura de Collatz ou também o problema $(3n + 1)$.

O problema $(3n+1)$ tem a vantagem que se pode encontrar sem dificuldade todos os exemplos que se queira; se escolhe um número qualquer e se prova que chega a 1. Ademais, também se pode programar um computador para que comprove o resultado com muitos números. A conjectura de Collatz parece ser feita justamente para isso. Já se verificou para todos os números até a casa de um trilhão. Até aqui se constatou que a conjectura é válida. Porém não parece nada simples apresentar um contra- exemplo, se é que existe algum.

Entretanto, os cálculos com computador não é demonstração. Lothar Collatz não tinha nenhuma demonstração. E até o momento ninguém conseguiu demonstrar esta conjectura. Até agora essa sucessão iludiu todos aqueles que tentaram demonstrá-la. Um problema incrivelmente fácil de formular, que se entende num instante, que qualquer um pode comprovar diretamente, de cuja veracidade todos estão convencidos, porém apesar de todos os esforços, nenhum dentre os mais inteligentes matemáticos, conseguiu resolver até esta data.

5. Eventos

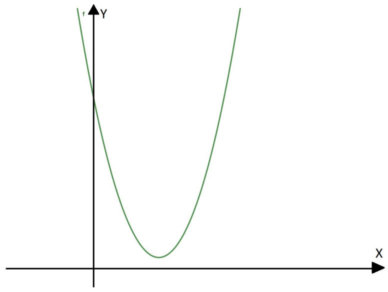
Devido à pandemia do coronavírus a agenda de eventos está suspensa, uma vez que a maioria deles, se não todos, estão cancelados por tempo indeterminado ou estão ocorrendo na modalidade virtual sendo divulgados à medida que ocorrem. Para conferir alguns eventos que estão ocorrendo de forma on-line acessem https://mathseminars.org/ e fiquem atentos às diversas redes sociais das instituições.

6. Problemas

Para concluir deixamos para o leitor alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

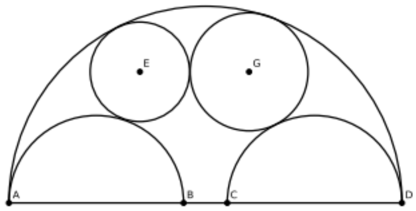
Problema 1 (OBM-2014 – Nível 3)**.** A sequência $a_1, a_2, a_3, \cdots$ satisfaz $a_1 = 1$e $a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 + n}$. Qual é o inteiro mais próximo de a_{2014}?

Problema 2. Seja f uma função real dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, cujo gráfico é representado a seguir.



Mostre que $-2\sqrt{ac} < b < 2\sqrt{ac}$ e que $b < 0$.

Problema 3 (OMEB 2015 – Nível 2)**.** Na figura a seguir, o círculo de centro E e raio r_1 é tangente aos semicírculos de diâmetros AB e AD. O círculo de centro G e raio r_2 é tangente aos semicírculos de diâmetros CD e AD. Sabendo que $AB = CD = 2r$, $AD = 2R$ e que os dois círculos são também tangentes, prove que $r_1 + r_2 = R - r$.



Mandem soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, sua solução deve ser enviada até **30/11/2020**.

7. Soluções dos Problemas

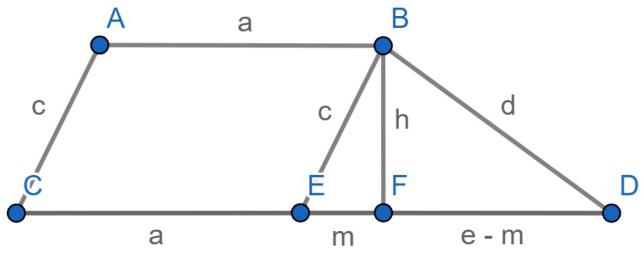
Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n.14, Março de 2020**.

Problema 1 (OCM – 2019)**.** Os lados e a altura de um trapézio são expressos por números inteiros. Mostre que o perímetro do trapézio é par e sua área é inteira

Solução. [6]

[6]Solução enviada pelo leitor Eudes Naziazeno Galvão, docente do DMat UFPE

Primeiramente, observe que o problema para o trapézio é equivalente ao mesmo problema só que para um triângulo (observe a figura).



(**Observação:** $\overline{ED} = e$ é inteiro, mas *a priori* não sabemos se m é inteiro)

De fato, sendo p o perímetro de $\triangle BED$, então o perímetro do trapézio $ABDC$ é $p + 2a$. Portanto, o perímetro do trapézio $ABDC$ é par se, e somente se, o perímetro de $\triangle BED$ é par. Analogamente, como a área do paralelogramo $ACEB$ é inteira, segue que: a área do trapézio é inteira se, e somente se, a área de $\triangle BED$ é inteira. Dito isso, basta provar o enunciado só que para $\triangle BED$.

Vamos mostrar inicialmente que o perímetro de $\triangle BED$, cujo valor é $d + c + e$, é par. De fato, observe que

$$d+c+e \text{ é par} \;\Leftrightarrow\; (d+c+e)^2 \text{ é par} \;\Leftrightarrow\; d^2+c^2+e^2 \text{ é par.}$$

Vamos mostrar que $d^2+c^2+e^2$ é par. Usando o Teorema de Pitágoras nos triângulos $\triangle BEF$ e $\triangle BDF$, temos $c^2 = h^2 + m^2$ (que mostra que m^2 é inteiro) e $d^2 = h^2 + (e - m)^2$ (que mostra que $(e - m)^2$ é inteiro). Daí

$$d^2 + c^2 + e^2 =$$

$$h^2+(e-m)^2+h^2+m^2+e^2 = 2h^2+2e^2-2em+2m^2$$

$$\Rightarrow\; d^2 + c^2 + e^2 = 2\big(h^2 + e^2 - m(e - m)\big)$$

Se mostrarmos que $m(e-m)$ (da última identidade acima) é inteiro, então estamos feitos, pois h e e são inteiros. Observe que esta última identidade também nos dá que $2m(e - m)$ é inteiro. Com isso, ficamos com os seguintes fatos:

Fato 1. m^2 é inteiro;

Fato 2. $(e - m)^2$ é inteiro;

Fato 3. $2m(e - m)$ é inteiro;

Fato 4. e é inteiro.

Vamos usar os fatos acima para provar que m é inteiro e, consequentemente, teremos que $m(e - m)$ é inteiro. Antes de prosseguir, vamos listar dois lemas que podem ser facilmente provados usando a fatoração única em produto de primos.

Lema 1: x^2 é inteiro se, e somente se, x é inteiro ou existem g e l inteiros tais que l seja livre de quadrados e $x = g\sqrt{l}$.

Lema 2: Se y e z são inteiros positivos livres de quadrados, então para todo x inteiro não nulo temos que

$$x\sqrt{yz} \text{ é inteiro se, e somente se, } y = z.$$

Suponha por absurdo que m não seja inteiro. Pelo Fato 4, isto equivale a dizer que $e - m$ também não é inteiro. Usando os Fato 1 e Fato 2 juntos com o Lema 1, temos que existem g, k, l e n, sendo l e n livres de quadrados, tais que $m = g\sqrt{l}$ e $e - m = k\sqrt{n}$. Daí, pelo Fato 3, temos que $2gk\sqrt{ln}$ é inteiro. Com isso, o Lema 2 nos dá que $l = n$. Logo, $m = g\sqrt{l}$ e $e - m = k\sqrt{l}$, que nos levaria a concluir que

$$e = m + (e - m) = (g + k)\sqrt{l}$$

sendo l livre de quadrado, o que é uma contradição com o Fato 4. Portanto, provamos que m é inteiro, o que conclui a prova de que o perímetro é par.

Vamos agora provar que a área de $\triangle BDE$ é inteira. Para isso, vamos usar o seguinte lema.

Lema 3: Se os lados de um triângulo retângulo são inteiros, então no máximo um cateto é ímpar.

Se h for par ou e for par, estamos feitos (pois assim área$(\triangle BDE) = he/2$ seria inteiro). Se h for ímpar, então pelo Lema 3 aplicado aos triângulos $\triangle BEF$ e $\triangle BDF$ podemos concluir que m e $e - m$ são pares e, consequentemente, que e é par. Provamos assim que pelo menos um elemento em $\{e, h\}$ é par e, consequentemente, que a área é inteira. □

Problema 2. Um supermercado está promovendo a seguinte campanha de reciclagem de dois tipos de embalagens: latinhas de alumínio e garrafas pet vazias.

- Se uma pessoa entrega duas embalagens do mesmo tipo, ela recebe de volta uma latinha de alumínio cheia de suco.

- Se uma pessoa entrega duas embalagens de tipos diferentes, ela recebe de volta uma garrafa pet cheia de suco.

Se uma família conseguiu juntar 432 latinhas de alumínio e 341 garrafas pet vazias, efetuando somente sucessivas trocas nesse supermercado, ao final essa família ficará com uma latinha de alumínio ou com uma garrafa pet vazia?

Solução. [7] Se denotarmos a embalagem de alumínio e a embalagem da garrafa pet, respectivamente, como A e G, podemos rescrever as informações do problema como três implicações da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 2A &\Rightarrow 1A & (1)\\ 1A &+ 1G \Rightarrow 1G & (2)\\ 2G &\Rightarrow 1A. & (3)\end{aligned}$$

Essas implicações nos diz que a cada duas embalagens entregues ao supermercado, recebemos de volta uma embalagem contendo suco e essa nova embalagem pode ser uma latinha de alumínio ou uma garrafa pet, de acordo com a relação acima. Sendo assim, é possível fazer as seguintes observações:

- por (1), não importa se possuírmos um número par ou ímpar de latinhas de alumínio, após sucessivas trocas dessas embalagens, sobrará apenas uma embalagem do mesmo material;

- por (2), se possuírmos um número ímpar de garrafas pet, após sucessivas trocas, sobrará apenas uma única embalagem desse mesmo material;

- por (3), se possuírmos um número par de garrafas pet, após sucessivas trocas dessas embalagens, sobrará apenas uma única latinha de alumínio.

Considerando as observações acima podemos concluir que

$$432A + 341G \Rightarrow 1A + 1G \Rightarrow 1G.$$

Note que o fator determinístico para que ao final de sucessivas trocas sobre apenas uma garrafa pet, é o fato da família em questão possuir um número ímpar de garrafas pet. É possível enxergar melhor essa afirmação adicionando diferentes embalagens a expressão (2) e posteriormente efetuar as trocas com o supermercado.

□

Problema 3. O professor Edgar confeccionou três poliedros regulares semelhantes P_1, P_2 e P_3 de arestas a_1, a_2 e a_3, respectivamente, usando uma impressora 3D. Ele percebeu que a área que envolve P_3 é 16 vezes maior que a área de P_1 e que o volume de P_3 é 125 vezes maior o volume de P_2. Qual relação podemos estabelecer entre as medidas das arestas a_1, a_2 e a_3?

(a) $16a_1 = 125a_2 = a_3$

(b) $4a_1 = 25a_2 = a_3$

(c) $4a_1 = 5a_2 = a_3$

(d) $a_1 = 100a_2 = 1000a_3$

Solução. [8] Para resolver este problema usaremos dois resultados preliminares

Resultado 1: Duas figuras F e F' são semelhantes por uma razão r se, e somente se, a razão entre as áreas de F e F' será r^2.

[7] Solução enviada pelo leitor Robert Miller L. Dos Santos, aluno do curso de Licenciatura em Matemática da UFRPE

[8] Solução enviada pelo leitor Neiviton Silva da Paz, aluno do PROFMAT e professor da Rede Estadual de Ensino.

Resultado 2: Se duas figuras F e F' são semelhantes por uma razão r se, e somente se, a razão entre os volumes de F e F' será r^3.

O problema informa que

$$A_{P_3} = 16 \cdot A_{P_1} \Rightarrow \frac{A_{P_3}}{A_{P_1}} = 16 \tag{4}$$

e

$$V_{P_3} = 125 \cdot V_{P_2} \Rightarrow \frac{V_{P_3}}{V_{P_2}} = 125. \tag{5}$$

Como os poliedros são regulares e semelhantes, podemos afirmar que

$$\frac{P_3}{P_1} = \frac{a_3}{a_1} = r_1 \tag{6}$$

e

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{a_3}{a_2} = r_2 \tag{7}$$

onde r_1, r_2 são as razões de semelhança entre P_3 e P_1 e P_3 e P_2, respectivamente.
Pelo resultado 1 e por 4

$$\frac{A_{P_3}}{A_{P_1}} = 16 = (r_1)^2 \Rightarrow r_1 = 4.$$

Substituindo o valor de r_1 em 6 temos

$$a_3 = 4 \cdot a_1.$$

Pelo resultado 2 e por 5 temos

$$\frac{V_{P_3}}{V_{P_2}} = 125 = (r_2)^3 \Rightarrow r_2 = 5.$$

Substituindo o valor de r_2 em 7 temos

$$a_3 = 5 \cdot a_2.$$

Portanto a resposta adequada seria $a_3 = 4 \cdot a_1 = 5 \cdot a_2$.

$\square$