É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 15, volume 1, Junho de 2020

ISSN 2526-8651

Sumário

1. Artigo

O Teorema de Pitágoras e algumas de suas generalizações[1]

Letícia Mª. M. Santos, Yasmin L. Carvalho[2], Eudes M. Barboza[3]

Universidade Federal Rural de Pernambuco - Departamento de Matemática
Campus Recife (SEDE)
(52171-900) - Recife - Pernambuco - Brasil

Introdução

O pensamento matemático geralmente é construído por ideias simples que gradativamente vão se tornando mais complexas. Por exemplo, os teoremas, proposições matemáticas passíveis de demonstrações, podem ter versões diferentes em que uma apresenta resultados mais gerais que outra, às vezes, em mais de um aspecto. Por exemplo, podemos ter um teorema e uma generalização que partilham a mesma hipótese mas a última apresenta uma tese mais geral; ou que ambos tenham a mesma tese, no entanto, a hipótese do teorema seja mais simples; ou ainda que a hipótese e a tese da generalização sejam mais amplas. Percebemos, assim, que as ideias e descobertas matemáticas surgem de fatos relativamente simples e concretos que podem se tornar gradativamente mais abstratos e gerar resultados e indagações mais gerais.

[1]Este trabalho foi desenvolvido durante a participação das alunas no Projeto Escrevendo Matemática da UFRPE.
[2]Alunas do curso de Licenciatura em Matemática da UFRPE.
[3]Professor do Departamento de Matemática da UFRPE.

Teoremas que ilustram este fato são o Teorema de Pitágoras e a Generalização de Polya, cujos enunciados compartilham a mesma hipótese, porque são válidos para triângulos retângulos e diferem na tese, pois o Teorema de Pitágoras garante que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa, enquanto, na Generalização de Polya, esse resultado é válido para quaisquer figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo. Logo, o Teorema de Pitágoras é um caso particular da Generalização de Polya.

Vale ressaltar que um mesmo teorema pode possuir diversas generalizações diferentes. O Teorema de Pitágoras, por exemplo, possui várias generalizações. Além da Generalização de Polya, podemos citar a Lei dos Cossenos.

Neste artigo iremos demonstrar o Teorema de Pitágoras e em seguida, mostrar essas suas duas generalizações e algumas de suas aplicações, inclusive em questões de Olimpíadas de Matemática.

Teorema de Pitágoras

Pitágoras (570-495 a.C.) foi, dentre outras coisas, um matemático e místico, nascido em Samos, uma pequena ilha do Dodecaneso na Grécia. Durante suas viagens, adquiriu um vasto conhecimento matemático, com os egípcios especula-se que teve contato com o teorema mais famoso que leva seu nome, cujo enunciado atual segue abaixo.

Teorema 1.1 (Teorema de Pitágoras)**.** *Em todo triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

A situação descrita neste teorema pode ser ilustrada com a figura 1.

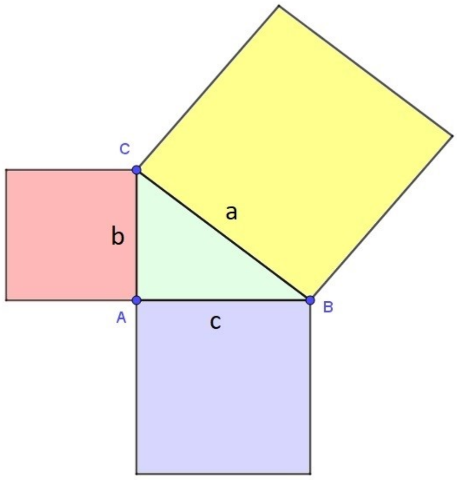


Figura 1: Teorema de Pitágoras

Fonte: Autoria própria

Demonstração. Vamos demonstrar agora o Teorema de Pitágoras. Para isto, considere a figura 2.

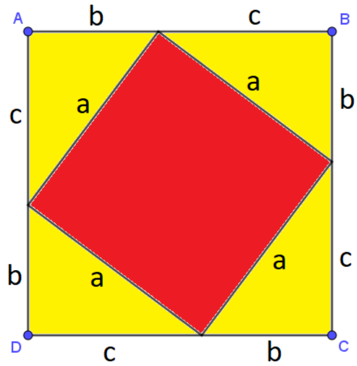


Figura 2: Teorema de Pitágoras

Fonte: Autoria Própria

Seja $ABCD$ um quadrado cujos lados são $b+c$. Desse modo, vamos expressar a área do quadrado $ABCD$ de duas formas distintas: como $(b+c)^2$ e como a soma das áreas dos 4 triângulos retângulos de catetos c e b e do quadrado de lado a. Assim, temos:

$$(c+b)^2 = \frac{4bc}{2} + a^2,$$

ou equivalentemente,

$$c^2 + 2cb + b^2 = 2bc + a^2.$$

Daí,

$$c^2 + b^2 = a^2.$$

Portanto, temos que o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

$\square$

Agora, apresentaremos alguns problemas olímpicos que tratam do Teorema de Pitágoras.

Exemplo 1. (OBMEP 2015) Na figura, as áreas dos quadrados P e R são iguais a $24cm^2$ e $168cm^2$, respectivamente. Qual é a área do quadrado Q?

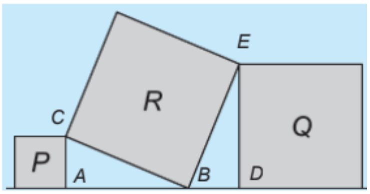


Figura 3

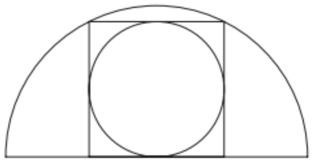
Fonte: Prova OBMEP 2015, nível 3, 1ª fase

A) $96cm^2$
B) $100cm^2$
C) $121cm^2$
D) $144cm^2$
E) $156cm^2$

Solução:

Observe que os triângulos ABC e DEB são congruentes e, portanto, o segmento AB tem a mesma medida do lado DE do triângulo Q. Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos que área de R = área de P + área de Q. Portanto, a área de Q é $168 - 24 = 144cm^2$.

Exemplo 2. (OBMEP 2016) O quadrado da figura está inscrito no semicírculo e o círculo está inscrito no quadrado. O círculo tem área igual a $10cm^2$. Qual é a área do semicírculo?



Fonte: Prova da OBMEP 2016, nível 3, 1ªfase

A) $25cm^2$
B) $30cm^2$
C) $35cm^2$
D) $40cm^2$
E) $45cm^2$

Solução:

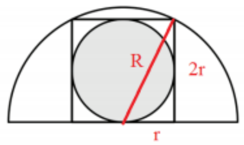


Figura 4: Representação ilustrativa do exemplo 2

Fonte: Solução da prova da OBMEP 2016, nível 3, 1ªfase

Vamos chamar de r o raio da circunferência inscrita no quadrado e R o raio do semicírculo. Como a circunferência está inscrita no quadrado, temos que o lado do quadrado mede $2r$. Observando o triângulo retângulo destacado na figura e usando o Teorema de Pitágoras, podemos escrever: $R^2 = 4r^2 + r^2 = 5r^2$. Assim, a área do semicírculo é $\frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{5}{2}\pi r^2 = \frac{5}{2} \cdot 10 = 25cm^2$.

Lei dos Cossenos

A Lei dos cossenos é uma das generalizações para o Teorema de Pitágoras e pode ser utilizada para todo triângulo, não apenas para o triângulo retângulo.

Teorema 1.2 (Lei dos Cossenos). *Em um triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.*

De acordo com a figura a seguir, esse teorema pode ser traduzido pela igualdade (1).

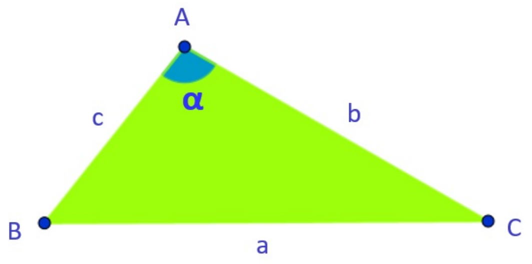


Figura 5: Teorema de Pitágoras

Fonte: Autoria Própria

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \qquad (1)$$

Demonstração. Inicialmente, consideremos o triângulo ABC com $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Seja H o pé da altura relativa ao lado AC e h seu comprimento. Consideremos separadamente os casos $\hat{A} < 90^o$, $\hat{A} = 90^o$ e $\hat{A} > 90^o$:

(a) $\hat{A} < 90^o$: Neste caso, os pontos H e C estão numa mesma semirreta, como ilustrado na figura 6.

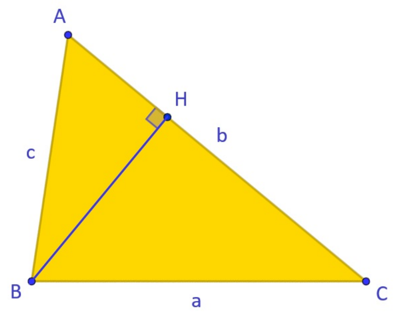


Figura 6: A lei dos cossenos: o caso $\hat{A} < 90^o$

Fonte: Autoria Própria

Assim, $\overline{AH} = c\cos\hat{A}$ e $h = c\,\mathrm{sen}\,\hat{A}$. Por outro lado, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo BCH, obtemos:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + \overline{CH}^2 \\ &= h^2 + (b - \overline{AH})^2 \\ &= (c\,\mathrm{sen}\,\hat{A})^2 + (b - c\cos\hat{A})^2 \\ &= b^2 + c^2(\mathrm{sen}^2\hat{A} + \cos^2\hat{A}) - 2bc\cos\hat{A}. \end{aligned}$$

Utilizando a relação fundamental da trigonometria ($\mathrm{sen}^2\hat{A} + \cos^2\hat{A} = 1$), verificamos que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}.$$

(b) $\hat{A} = 90^o$: Neste caso, pelo Teorema de Pitágoras temos que

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

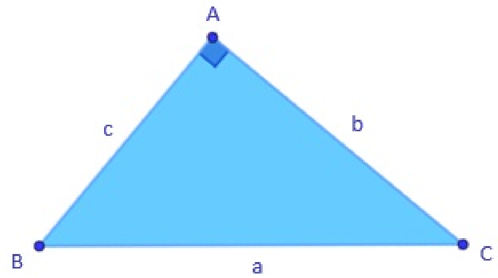


Figura 7: A lei dos cossenos: o caso $\hat{A} = 90^o$

Fonte: Autoria Própria

Como $\cos\hat{A} = 0$, segue o resultado.

(c) $\hat{A} > 90^o$: Neste caso, o vértice A pertence ao segmento $\overline{CH}$. Como ilustrado na figura 8.

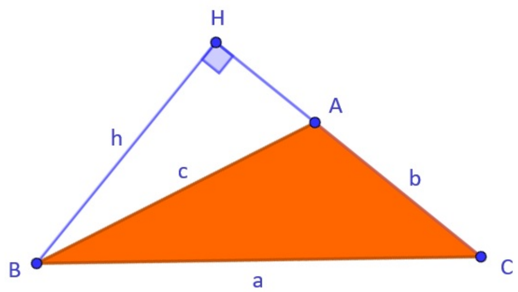


Figura 8: A lei dos cossenos: o caso $\hat{A} > 90$

Fonte: Autoria própria

Notemos que $B\hat{A}H = 180^o - \hat{A}$. Considerando o triângulo BHA, temos

$$\overline{AH} = c\cdot\cos(180^o - \hat{A})$$

$$= c\cdot(\mathrm{sen}(180^o)\cdot\mathrm{sen}(\hat{A}) + cos(180^o)\cdot\cos\hat{A}).$$

Portanto,

$$\overline{AH} = -c\cdot\cos(\hat{A}).$$

Temos, ainda que

$$\frac{h}{c} = \text{sen}(180^o - \hat{A}),$$

dessa forma, obtemos

$$h = c \cdot \text{sen}(180^o - \hat{A})$$

$$= c \cdot (-\,\text{sen}(180^o) \cdot (\cos(\hat{A})) - \cos(180^o) \cdot (\text{sen}(\hat{A})).$$

Logo,

$$h = c \cdot \text{sen}(\hat{A}).$$

Aplicando novamente o Teorema de Pitágoras ao triângulo BCH e prosseguindo como em (a), obtemos

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + \overline{CH}^2 = h^2 + (b + \overline{AH})^2 \\ &= (c \cdot sen\hat{A})^2 + (b - c \cdot \cos\hat{A})^2. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}.$$

□

A seguir apresentamos alguns problemas olímpicos nos quais podemos aplicar A Lei dos Cossenos.

Exemplo 3. (Portal do Saber - OBMEP) Dois lados de um triângulo medem 6 m e 10 m e formam entre si um ângulo de 120º. Determinar a medida do terceiro lado.

Solução: Seja a o lado oposto a 120º, então podemos escrever que

$$a^2 = 6^2 + 10^2 - 2.6.10.cos120^o$$

$$a^2 = 36 + 100 - 120.\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$a = \sqrt{196}$$

$$a = 14m.$$

Exemplo 4. (Portal do Saber - OBMEP) Dado um triângulo de lados 5 cm, 7 cm e 8 cm, determine o valor do cosseno e do seno do menor ângulo interno desse triângulo.

Solução: Seja α o menor ângulo interno. Ele será o oposto ao lado de medida 5 e, aplicando a lei dos cossenos, teremos

$$\begin{aligned} 5^2 &= 7^2 + 8^2 - 2.7.8.cos\alpha \\ -cos\alpha &= \frac{25 - 49 - 64}{2.7.8} \\ cos\alpha &= \frac{11}{14}. \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula fundamental, obteremos

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\text{sen}^2\alpha + \left(\frac{11}{14}\right)^2 = 1$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

Generalização de Polya

George Polya (1887-1985) foi um matemático nascido em Budapeste, Hungria. Polya é famoso por escrever o livro "A arte de resolver problemas" e foi responsável por uma das generalizações para o Teorema de Pitágoras, com a qual se mostra que esse resultado é válido não apenas para quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo, mas para quaisquer figuras semelhantes nessas condições. Em princípio, apresentaremos alguns resultados importantes que serão necessários na demonstração da generalização:

Definição 1.1. Podemos dizer que figuras semelhantes são resultantes de um processo de ampliação ou redução de uma dada figura, mantendo uma proporção entre as medidas da figura inicial e da outra ampliada ou reduzida. Especificamente, tratando-se de polígonos, estes são ditos semelhantes quando possuem ângulos correspondentes de mesma medida e lados correspondentes proporcionais.

Proposição 1.3. *As áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado de razão de semelhança.*

Demonstração. Inicialmente iremos tratar de regiões triangulares. Sejam ABC e EFG triângulos semelhantes, como ilustrados na figura 9, de modo que

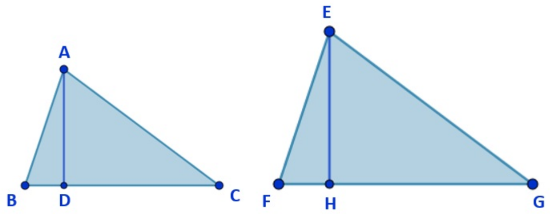


Figura 9

Fonte: Autoria própria

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}} = k \quad \text{com} \quad k > 0.$$

Considere $\overline{AD}$ a altura de ABC em relação a base $\overline{BC}$ e $\overline{EH}$ a altura de EFG em relação a base $\overline{FG}$. Como ABC e EFG são semelhantes, então $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{EH}} = k$. Denotando área de uma figura F por $[F]$, temos que

$$\frac{[ABC]}{[EFG]} = \frac{\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AD}}{2}}{\frac{\overline{FG}\cdot\overline{EH}}{2}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}}\cdot\frac{\overline{AD}}{\overline{EH}} = k^2.$$

Portanto, podemos concluir que a proposição é válida para quaisquer figuras, pois estas podem ser aproximadas por polígonos, que por sua vez podem ser decompostos em triângulos. □

Proposição 1.4. *Sejam a, b, c e d números reais tais que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$. Então,*

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Demonstração. Note que, se $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, então $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$.

Somando 1 em ambos os lados da igualdade $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ temos:

$$\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d},$$

logo

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}.$$

Portanto,

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

□

Agora, dispomos das ferramentas necessárias para demonstrar a Generalização de Polya.

Teorema 1.5 (Generalização de Polya)**.** *Se F, F' e F'' são figuras semelhantes construídas, respectivamente, sobre a hipotenusa a e os catetos b e c de um triângulo retângulo, então a área de F é igual à soma das áreas de F' e F''.*

Demonstração. Observe a figura a seguir.

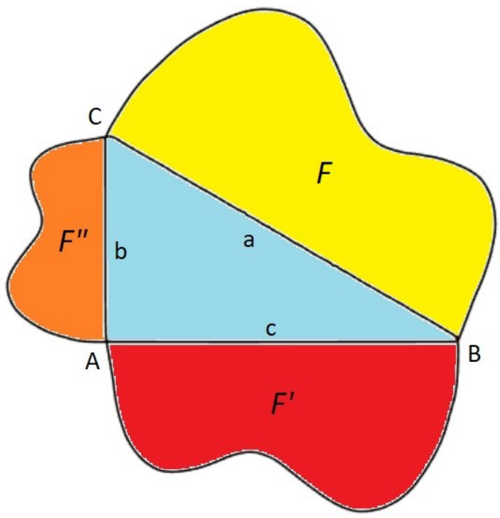


Figura 10: Generalização de Polya.

Fonte: Autoria própria

Considere o triângulo retângulo ABC, reto no vértice A. Sendo $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$. Considere figuras semelhantes quaisquer construídas sobre os lados do triângulo ABC, como ilustrado na figura 10. Utilizando a Proposição 1.3, segue que

$$\frac{[F']}{[F]} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \quad \text{e} \quad \frac{[F'']}{[F]} = \left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

Logo,

$$\frac{[F]}{a^2} = \frac{[F']}{c^2} = \frac{[F'']}{b^2}.$$

Pela Proposição 1.4, temos que

$$\frac{[F]}{a^2} = \frac{[F'] + [F'']}{b^2 + c^2}.$$

Portanto, como $a^2 = b^2 + c^2$, pelo Teorema de Pitágoras, podemos simplificar a equação anterior, obtendo

$$[F] = [F'] + [F''].$$

$\square$

A seguir um problema cuja solução é obtida usando o Teorema 1.5.

Exemplo 5. Sobre cada um dos lados de um triângulo ABC, foram construídos polígonos semelhantes. Sabendo que suas áreas são 25, x e $5x + 1$ unidades de área. Qual o valor da soma das áreas dos polígonos?

Solução: Se as áreas das figuras construídas sobre os lados do triângulo são 25, x e $5x + 1$, então as figuras que foram construídas sobre a hipotenusa poderão ter áreas iguais a 25 e $5x + 1$, uma vez que x é menor que $5x + 1$. Temos dois casos a analisar.

i) Quando 25 for a área da figura construída sobre a hipotenusa: Pela Generalização de Polya, temos que a área da figura construída sobre hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos, então

$$\begin{aligned} 25 &= 5x + 1 + x \\ 24 &= 6x \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Logo, as áreas são 25, 21 e 4 e, portanto, a sua soma é 50.

ii) Quando $5x + 1$ for área da figura construída sobre a hipotenusa: De forma análoga ao caso i), pela Generalização de Polya, temos

$$\begin{aligned} 5x + 1 &= 25 + x \\ 4x &= 24 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Logo, as áreas são 31, 25 e 6 e, portanto, a sua soma é 62.

Aplicação (Lúnulas de Hipócrates)

As lúnulas estudadas por Hipócrates de Chios (470 - 410 a.C.) foram as primeiras figuras não retilíneas a terem suas áreas calculadas. Utilizando a Generalização de Polya para o Teorema de Pitágoras pode-se demonstrar o resultado a seguir.

Teorema 1.6. *A medida da área do triângulo retângulo ABC é igual à soma das medidas das áreas das lúnulas construídas sobre seus catetos. De acordo, com a figura 11, temos*

$$[T] = [R] + [S].$$

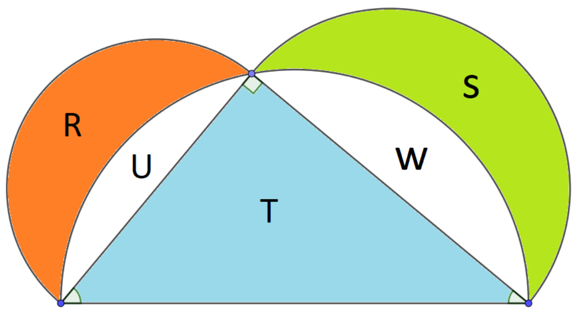


Figura 11: Representação das lúnulas de Hipócrates.

Fonte: Autoria própria

Demonstração. Considere um triângulo retângulo inscrito em um semicírculo. Agora, considere mais dois semicírculos com diâmetros construídos sobre os catetos do triângulo, visto na figura. Pela Generalização de Polya, temos que a área do semicírculo maior é igual à soma dos dois semicírculos menores. Logo, baseando-se na figura 11, temos

$$[U] + [W] + [T] = [S] + [W] + [R] + [U].$$

Portanto,

$$[T] = [S] + [R].$$

$\square$

Conclusão

Diante do que foi mostrado, percebemos que a hipótese e a tese da Lei dos cossenos abrangem as do Teorema de Pitágoras. Já a Generalização de Polya partilha a mesma hipótese do Teorema de Pitágoras, pois ambos são resultados válidos para triângulos retângulos, mas apresenta uma tese mais ampla. Dessa forma, tanto a Lei do Cossenos como a Generalização de Polya são exemplos de generalizações do Teorema de Pitágoras.

Problemas propostos

Problema 1 (OBMEP 2017)**.** Na figura, os ângulos $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}D$ medem 120^o, o ângulo $B\hat{A}D$ é reto, e os segmentos BC e CD medem 4 cm e 8 cm, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero $ABCD$ em cm^2?

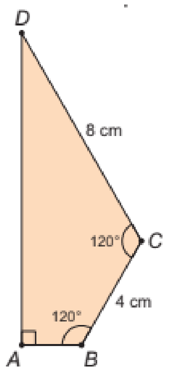


Figura 12

Fonte: Prova OBMEP 2017, nível 3, 1ª fase

A) $14\sqrt{3}$
B) $28\sqrt{3}$
C) $32\sqrt{3}$
D) $36\sqrt{3}$
E) $40\sqrt{3}$

Problema 2 (OBMEP 2018)**.** A figura mostra três regiões, a, b e c, determinadas por um quadrado de centro O, e suas circunferências inscrita e circunscrita. Qual das igualdades a seguir é verdadeira?

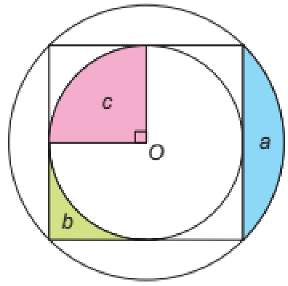


Figura 13

Fonte: Prova OBMEP 2018, nível 3, 1ª fase

A) $c = a + b$
B) $c = a - b$
C) $2a + b$
D) $a + 2b$
E) $2a - b$

Problema 3 (OBMEP 2015)**.** Uma lata cilíndrica, fechada embaixo e aberta na parte de cima, tem altura de $17cm$ e sua borda é uma circunferência de comprimento $30cm$. Na superfície interna da lata, a $4cm$ da borda superior, há uma mosca parada (ponto M). Na superfície externa da lata, a $1cm$ da base e no mesmo plano que passa pela mosca e que divide a lata em duas partes iguais, encontra-se uma aranha (ponto A), como na figura. A aranha anda pela superfície da lata até chegar à mosca, fazendo o caminho mais curto entre elas. Quantos centímetros a aranha anda sobre a superfície da lata?

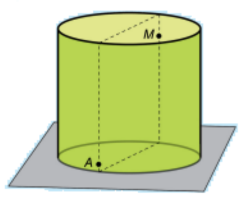


Figura 14

Fonte: Prova OBMEP 2015, nível 3, 1ª fase

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Problema 4 (Portal do Saber - OBMEP)**.** Os lados de um triângulo são 3, 4 e 6. O cosseno do maior ângulo interno desse triângulo vale:

A) $\frac{11}{24}$

B) $-\frac{11}{24}$

C) $\frac{3}{8}$

D) $-\frac{3}{8}$

E) $-\frac{3}{10}$

Problema 5 (Portal do Saber - OBMEP)**.** Um ΔABC tem lados AB, AC e BC que medem, respectivamente, 5 cm, 10 cm e 9 cm. Determine a medida da mediana relativa ao lado AC.

Problema 6 (Portal do Saber - OBMEP)**.** Em um paralelogramo $ABCD$, os lados AB e AD medem, respectivamente, $x\sqrt{2}$ cm e x cm, e θ é o ângulo obtuso formado entre eles. Se a diagonal maior mede $2x$ cm, então qual o valor do seno do ângulo θ?

Problema 7. (30º Olimpíada de Matemática do Estado do Rio Grande do Norte) Na figura, $AD = 2$ cm, $AB = \sqrt{3}$ cm, a medida do ângulo $B\hat{A}C$ é 30º e $BD = DC$, onde D é ponto do lado AC. A medida do lado BC, em cm, é

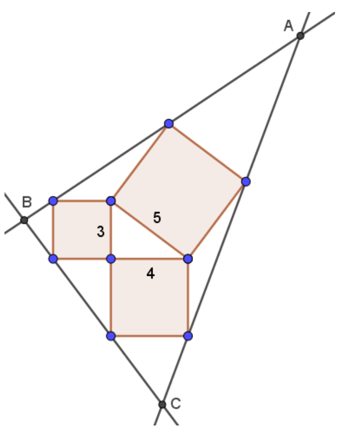


Figura 15

Fonte: Autoria própria

Problema 8. Sobre os lados de um triângulo retângulo foram construídas figuras semelhantes com áreas medindo 2x , 50 e 30 unidades de área. Quais os possíveis valores para x?

Referências

[1] BARBOSA, J. L. M., *Geometria euclidiana plana*; Coleção do professor de matemática, Rio de Janeiro: SBM, 11ª edição, 2012.

[2] BOYER, Carl B. *História da matemática*; tradução de Elza e Gomide, São Paulo: Edgard Blucher, 2ª edição, 1996.

[3] EUCLIDES, *Os Elementos*; tradução e introdução de Irineu Bicudo, São Paulo: UNESP, 2009.

[4] D. C. Morais Filho, *Um convite à matemática com técnicas de demonstração e notas históricas*, coleção do professor de matemática, Rio de Janeiro: SBM, 3ª edição, 2016 pp. 89-98.

[5] E. M. Barboza, I. C. A. A. Lima; *Abstração: um caminho possível para entender matemática*, EDUPE, 1ª edição, 2016.

[6] A. C. Muniz Neto; *Tópicos de matemática elementar*, Rio de Janeiro: SBM, 2ª edição, 2013.

[7] LIMA, Elon Lages. *Meu professor de matemática e outras histórias*; Rio de Janeiro: SBM, 6ª edição, 2012.

[8] Portal OBMEP do Saber. Disponível em: portaldosaber.obmep.org.br. Acesso em: 12 de Jan. de 2020.

[9] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Disponível em: obmep.org.br/provas.htm. Acesso em: 12 de Jan. de 2020.

2. Soluções de Olimpíadas

Nesta edição apresentaremos a resolução de três questões discursivas da prova da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2019 referentes ao nível 3.

Questão 1. O $\pi - raia$ convidou dois grupos de amigos $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ e $\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$, todos números reais positivos, para uma tarde de jogo com desigualdades.

1. Os grupos quando estão juntos ficam "mais fortes" do que misturados. Mostre que essa "força" satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\left(\sum_{i=1}^{3} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{3} a_i b_i\right)^2.$$

Sugestão: Defina a função

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) =\ & \sum_{i=1}^{3} (a_i \cdot x - b_i)^2. \end{aligned}$$

2. Sabendo que o $\pi - raia$ e seus amigos satisfazem a relação

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 1 \quad \text{e} \quad b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = \pi^3.$$

Mostre, usando a "força" do item 1, a validade da seguinte desigualdade:

$$\frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2}{a_1^2}+\frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2}{a_2^2}+\frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2}{a_3^2} \geq 9{\cdot}\pi^2.$$

Solução: 1. Seguindo a sugestão, defina

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) =\ & \sum_{i=1}^{3} (a_i \cdot x - b_i)^2. \end{aligned}$$

Uma vez que $(a_i \cdot x - b_i)^2 \geq 0$, para cada $i \in \{1,2,3\}$, segue que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado,

$$(a_i \cdot x - b_i)^2 = a_i^2{\cdot}x^2{-}2{\cdot}a_i{\cdot}b_i{+}b_i^2, \quad \forall\, i \in \{1,2,3\}.$$

De onde, concluímos que

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i^2\right){\cdot}x^2{-}2{\cdot}\left(\sum_{i=1}^{3} a_i \cdot b_i\right){\cdot}x{+}\left(\sum_{i=1}^{3} b_i^2\right).$$

Assim, f é uma função do segundo grau não-negativa, isto é, f tem no máximo uma raiz real.

Em outras palavras, temos que o discriminante referente a equação

$$\left(\sum_{i=1}^{3} a_i^2\right){\cdot}x^2{-}2{\cdot}\left(\sum_{i=1}^{3} a_i \cdot b_i\right){\cdot}x{+}\left(\sum_{i=1}^{3} b_i^2\right) = 0$$

é negativo. Então,

$$\begin{aligned} \left[-2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \cdot b_i\right)\right]^2 - 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} b_i^2\right) &\leq 0 \\ 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \cdot b_i\right)^2 - 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} b_i^2\right) &\leq 0 \\ \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \cdot b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{3} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} b_i^2\right). \end{aligned}$$

2. Em primeiro lugar, note que

$$\begin{aligned} &\frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2}{a_1^2}+\frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2}{a_2^2}+\frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2}{a_1^2} \\ &\quad = \left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}\right) \cdot \left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Daí, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}\right) \cdot \left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right) \\ &\quad = \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i^2}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} b_i^2\right) \\ &\quad \geq \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_1} \cdot b_i\right)^2 \\ &\quad = \left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}\right)^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Por outro lado, usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos

$$\begin{aligned}\frac{\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}}{3} &\geq \sqrt[3]{\frac{b_1}{a_1}\cdot\frac{b_2}{a_2}\cdot\frac{b_3}{a_3}}\\ &= \sqrt[3]{\frac{b_1\cdot b_2\cdot b_3}{a_1\cdot a_2\cdot a_3}}\\ &= \sqrt[3]{\pi^3}\\ &= \pi.\end{aligned}$$

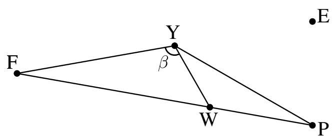
De onde, segue que

$$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}\geq 3\cdot\pi. \tag{4}$$

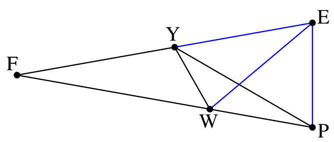
Das estimativas (2), (3) e (4), segue a desigualdade desejada.

□

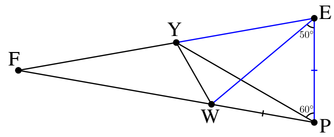
Questão 2. Dois feixes de luz são lançados do ponto F na figura abaixo em direção aos pontos E e P que estão a mesma distância do ponto F . No caminho do feixe que sai de F na direção de E, é colocado um espelho num ponto Y para desviar o feixe em direção ao ponto W no feixe FP. Porém, o feixe refletiu em direção ao ponto P. Sabe-se que o ângulo $F\hat{Y}P$ mede $140°$, que a medida do segmento EP é igual à medida do segmento WP, que o triângulo ΔFYP é isósceles e que ao rotacionar um pouco o espelho mantendo o ponto Y fixo conseguiu-se um feixe incidente em W. Sendo β o ângulo entre o feixe incidente em Y e o feixe refletido que passa por W, determine β.



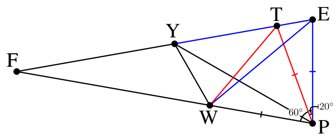
Solução: Complete o desenho para um triângulo isósceles com vértice em F, trace o segmento EW.



Observe que o ângulo $Y\hat{P}E$ mede $60°$, e o ângulo $P\hat{E}W$ mede $50°$, pois, por construção o ΔWPE é isósceles e possui ângulo do vértice igual a $80°$, visto que o triângulo ΔFPE é isósceles e o ângulo $P\hat{F}E$ mede $20°$.

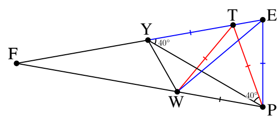


Agora, construa um segmento TP de forma que o triângulo ΔPTE seja isósceles com ângulo do vértice medindo $20°$.



Olhando para o triângulo ΔPWT, observe que a medida do segmento WP é igual à medida do segmento TP e o ângulo $W\hat{P}T$ mede $60°$. Assim, o triângulo ΔPWT é equilátero e o ângulo $T\hat{W}E$ mede $10°$.

Desta forma, o ângulo $Y\hat{P}T$ mede $40°$ e o ângulo $T\hat{Y}P$ mede $40°$ (para ver isso olhe para o triângulo ΔYPE, observando a soma dos ângulos internos).



Segue que o triângulo ΔYPT é isósceles e, assim, a medida do segmento TP é igual à medida do segmento TY. E como a medida do segmento TW é igual à medida do segmento TP, segue que o triângulo ΔTWY é isósceles e com o ângulo do vértice $W\hat{T}Y$ medindo $40°$. Assim, o ângulo $W\hat{Y}P$ mede $30°$ e consequentemente β mede $110°$, pois o ângulo $T\hat{Y}W$ mede $70°$.

□

Questão 3. Um par de números inteiros (a,b) é chamado de *acidental* quando ambas as razões abaixo

$$\frac{a^2-b+a}{ab-a-1} \quad \text{e} \quad \frac{b^2-a+b}{ab-b-1},$$

são números naturais. Encontre todos os pares de inteiros acidentais com $a>1$ e $b>1$.

Solução: Como $a > 1$ e $b > 1$ temos que $ab - a - 1$ e $ab - b - 1$ são ambos positivos. Como

$$\frac{a^2 - b + a}{ab - a - 1} \quad \text{e} \quad \frac{b^2 - a + b}{ab - b - 1}$$

são números naturais, segue que $a^2 - b + a$ e $a^2 - a + b$ são ambos positivos.

Uma vez que $ab - a - 1 | a^2 - b + a$ e $ab - b - 1 | b^2 - a + b$ obtemos:

$$\begin{aligned} a^2 - b + a &\geq ab - a - 1 > 0 \text{ e} \\ b^2 - a + b &\geq ab - b - 1 > 0. \end{aligned}$$

O que nos dá

$$\begin{aligned} (a + 1)(a - b + 1) &> 0 \text{ e} \\ (b + 1)(b - a + 1) &> 0. \end{aligned}$$

Desse modo, como a e b são inteiros positivos, temos que $1 \geq b - a$ e $1 \geq a - b$, o que implica em $a = b$ ou $a = b + 1$ ou $b = a + 1$.

Se $a = b$, então $\dfrac{a^2}{a^2 - a - 1}$ é natural, o que nos dá a solução $a = b = 2$.

Se $a = b + 1$, então $\dfrac{b^2 + 2b + 2}{b^2 - 2} = 1 + \dfrac{2b - 4}{b^2 - 2}$ é natural. Como $b > 3$ implica em $b^2 - 2 > 2b - 4$, a única solução nesse caso é $b = 2$ e $a = 3$.

O caso $b = a + 1$ é simétrico ao caso anterior e nos dá uma única solução dada por $a = 2$ e $b = 3$.

Assim, as soluções para o nosso problema são $a = 2$ e $b = 2$; $a = 3$ e $b = 2$ e; $a = 2$ e $b = 3$.

□

3. Curiosidades

Números Perfeitos

Maria Ângela Caldas Didier [4]
Rennan Lopes Carbas [5]

Uma das grandes motivações dos matemáticos como Fermat, Euler e tantos outros foi estudar propriedades e relações dos números. Muitos desses matemáticos acharam números com propriedades interessantíssimas, os números perfeitos fazem parte deste achado.

Um número perfeito é aquele cuja soma de todos os seus divisores naturais é igual ao dobro dele, ou ainda, se o número for igual à soma dos seus divisores naturais distintos dele mesmo. Por exemplo, os números 6 e 28. Note que os divisores de 6 são: $1, 2, 3$ e 6, cuja soma é $1 + 2 + 3 + 6 = 12$ e que os divisores de 28 são: $1, 2, 4, 7, 14$ e 28 cuja soma é $1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56$. Um fato curioso é que todos os números perfeitos conhecidos são pares. Nada se sabe sobre a existência ou não de números perfeitos ímpares.

Acerca dos números perfeitos pares, temos um teorema que os caracterizam. Este teorema, em parte atribuído a Euclides e em parte devido a Euler, relaciona os números perfeitos pares aos números de Mersenne.[6] Tais números são os primos da forma $M_p = 2^p - 1$, com p primo. Não se sabe ao certo se existem infinitos primos desta forma. O teorema de Euclides-Euler nos diz que um número natural n, par é perfeito se, e somente se, $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, onde $2^p - 1$ é um número primo de Mersenne. Ou seja, todo número primo de Mersenne gera um número perfeito par.

Os matemáticos da Antiguidade fizeram várias conjecturas sobre os números perfeitos baseados nos quatro que conheciam $(6, 28, 496, 8128)$, mas ficou provado que a maior parte delas era falsa. Uma dessas conjecturas era que, sendo os números $2, 3, 5$ e 7 precisamente os quatro primeiros primos, o quinto número perfeito seria obtido com $n = 11$, que é o quinto primo. Todavia, $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ não é primo e daí $n = 11$ não gera um número perfeito. Um teorema interessante dos números perfeitos pares é o de que eles sempre terminam em 6 ou em 8.

Outro fato relevante relacionado aos números

[4] Professora Doutora do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

[5] Graduando do curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco.

[6] Mersenne foi um matemático eclesiástico fundamental para a divulgação científica do século $XVII$. Ele costumava trocar cartas com os maiores cientistas de sua época, como Fermat, Torricelli e Descartes.

primos de Mersenne é que o maior número primo conhecido atualmente é um primo de Mersenne. Ele foi descoberto em 7 de dezembro de 2018 pelo projeto de pesquisa mundial Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS). Tal número primo possui 24.862.048 de dígitos e é gerado tomando $p = 82.589.933$. O projeto GIMPS foi criado em 1996, ele permite que se faça o *download* de um *software* que pode ser executado em computadores de uso doméstico para encontrar números primos. Desde então, foram descobertos os últimos 17 primos de Mersenne. A pessoa que encontrou o número $M_{82.589.933}$ foi Patrick Laroche, um profissional da área de TI de Ocala (Flórida, EUA). Essa descoberta lhe rendeu um prêmio de aproximadamente 11 mil reais.

Referências

[1] HEFEZ, ABRAMO. - *Elementos de Aritmética*. Coleção PROFMAT. Segunda edição. Rio de Janeiro: SBM, 2016.,

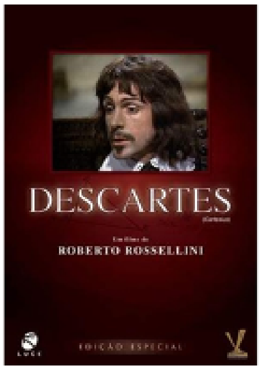
[2] GREAT INTERNET MERSENNE PRIME SEARCH. 51st Known Mersenne Prime Found!.[S.I.], 2018. Disponível em: https://www.mersenne.org. Acesso em: 2 nov. 2019.

4. Indicações de Leituras/Filmes

René Descartes

Por Severino Barros de Melo [7]

Todo aluno do ensino médio já foi apresentado a Geometria Analítica. Sobretudo para aqueles apaixonados pela Matemática é a ocasião de adentrar em um novo mundo, no qual a união indissolúvel entre Álgebra e Geometria propicia uma abordagem até então inédita nesse campo do conhecimento. A História atribui ao matemático e filósofo francês Renè Descartes (1596-1650) a criação deste novo ramo da matemática. Continuando minha navegação no youtube, a qual me referi na edição anterior do nosso jornal, eis que nos deparamos com um outro achado: um filme sobre Descartes, que sem dúvida merece também nossa indicação. O título da obra é Descartes, drama legendado em português e dirigido pelo Italiano Roberto Rossellini, sempre interessado em divulgar grandes filósofos da humanidade. Foi produzido em 1974 e tem a duração de 162 minutos, quase uma minissérie! Na versão em DVD foi inserido o depoimento de Homero Santiago, então professor de Filosofia da Universidade de São Paulo.



Na apresentação do filme os divulgadores afirmam que "Em quase três horas, Rossellini realiza com o seu realismo característico um retrato fascinante da vida de Descartes e de sua busca incessante pelo conhecimento. Acompanhamos várias décadas da vida do pensador incluindo a escrita e a publicação do Discurso do método e de suas principais obras, o debate em torno do método cartesiano e seus estudos de Geometria Analítica. (...) Descartes é um filme obrigatório para todos os interessados em filosofia, incluindo professores, estudantes e pesquisadores."

Portanto, mais uma indicação que vale a pena conferir!

5. Quem pergunta, quer saber!

No número 48 da Revista do Professor de Matemática (RPM), (2002, p. 53), um leitor pergunta: quantos triângulos obtusângulos existem cujos lados são três números inteiros e consecutivos?

[7] Professor do Departamento de Educação da UFRPE

Resposta da RPM: Somente um, de lados 2,3 e 4. Supondo que as medidas dos lados sejam $a-1, a$ e $a+1$, é necessário que $a+1 < a+a-1$, isto é, $a > 2$. (*)

A lei dos cossenos nos diz que nos triângulos obtusângulos $(a+1)^2 > a^2 + (a-1)^2$ (**).

Efetuando os cálculos, obtém-se $a < 4$. Portanto, $a = 3$ e os outros lados medem 2 e 4.

Os asteriscos são por conta da redação do Jornal É Matemática Oxente!

(*) Aplicação da desigualdade triangular: "Em todo triângulo cada lado é menor que a soma dos outros dois".

(**) A desigualdade justifica-se pela supressão, na lei dos cossenos, da parcela contendo o produto dos outros dois lados pelo cosseno do ângulo que eles formam, uma vez que este ângulo é obtuso e, dessa forma, possui cosseno negativo. Precisamente, temos que

$$\begin{aligned}(a+1)^2 &= a^2 + (a-1)^2 - 2a(a-1)\cos(\alpha)\\ &> a^2 + (a-1)^2,\end{aligned}$$

em que α é o ângulo obtuso entre os lados de medidas a e $(a-1)$.

6. Eventos

Devido à pandemia do coronavirus a agenda de eventos está suspensa, uma vez que a maioria deles, se não todos, estão cancelados por tempo indeterminado ou estão ocorrendo na modalidade virtual sendo divulgados à medida que ocorrem. Para conferir alguns eventos que estão ocorrendo de forma on-line acessem `https://mathseminars.org/` e fiquem atentos às diversas redes sociais das instituições.

7. Problemas

Para concluir deixamos para o leitor alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Problema 1 (OPM – 2008)**.** Seja ABC um triângulo isósceles de altura $8cm$ e base $4cm$, inscrito em uma circunferência de raio R. Determine o valor de R.

Problema 2. Sobre os lados de um triângulo retângulo foram construídos quadrados. Se a área de um dos quadrados é $25cm^2$ e cada lado do triângulo tem medida inteira em cm, quanto valem essas medidas?

Problema 3. Na seção "Quem pergunta quer saber" é respondida a seguinte questão: "Quantos triângulos obtusângulos existem, cujos lados são três inteiros consecutivos?". Responda agora, sob estas condições: Quantos são os triângulos retângulos? E quantos acutângulo?

Mandem soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, sua solução deve ser enviada até **30/09/2020**.

8. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n.13, Dezembro de 2019**.

Problema 1 (XXXVII OCM – Nível 2)**.** Seja n um número natural

(a) Mostre que $8^n - 1$ é multiplo de 7;

(b) Encontre todos os valores de n para os quais $\dfrac{8^n-1}{7}$ é primo.

Solução. (a) Para $n = 0$ temos que $8^0 - 1 = 0$, que é um múltiplo de 7. Para $n = 1$ temos $8^1 - 1 = 7$ que também é múltiplo de 7. Suponha agora que $n \geq 2$. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ a expressão $x^n - y^n$ fatora-se como:

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Agora tomando $x = 8$ e $y = 1$ temos que:

$$\begin{aligned} 8^n - 1 &= (8-1)(8^{n-1} + 8^{n-2} + \cdots + 8 + 1) \\ &= 7(8^{n-1} + 8^{n-2} + \cdots + 8 + 1). \end{aligned}$$

Logo, $8^n - 1$ é um múltiplo de 7.

(b) O item (a) nos garante que $\dfrac{8^n-1}{7} \in \mathbb{N}$. Restando então determinar quando o mesmo é primo. Suponha que $n \geq 1$. Lembre que $8 = 2^3$, logo $8^n - 1 = 2^{3n} - 1 = (2^n)^3 - 1$. Mas para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, pondo $x = 2^n$, temos que:

$$8^n - 1 = (2^n - 1)(2^{2n} + 2^n + 1).$$

Uma vez que 7 é um divisor de $(2^n - 1)(2^{2n} + 2^n + 1)$ e 7 é primo, segue que 7 divide $(2^n - 1)$ ou 7 divide $(2^{2n} + 2^n + 1)$ Teremos então dois casos a serem estudados.

Caso 1: se 7 divide $(2^n - 1)$. Teremos a fatoração

$$\frac{8^n-1}{7} = \left(\frac{2^n-1}{7}\right)(2^{2n} + 2^n + 1),$$

onde $\dfrac{2^n-1}{7}, 2^{2n}+2^n+1 \in \mathbb{Z}$. Se ambos forem maiores que 1, temos que $\dfrac{8^n-1}{7}$ é composto. Assim, para que $\dfrac{8^n-1}{7}$ seja primo se faz necessário que pelo menos um desses fatores seja 1 e o outro seja primo. Note que $\dfrac{2^n-1}{7} = 1$, implica que $n = 3$. Neste caso, verifica-se que

$$\frac{8^3-1}{7} = 73,$$

e realmente é primo. Por outro lado, note que não existe n tal que $2^{2n} + 2^n + 1 = 1$, pois isso implicaria que $2^n + 1 = 0$.

Caso 2: Suponha agora que 7 divide $2^{2n} + 2^n + 1$. Neste caso temos a fatoração

$$\frac{8^n-1}{7} = (2^n - 1)\left(\frac{2^{2n}+2^n+1}{7}\right)$$

onde $2^n - 1$, $\dfrac{2^{2n}+2^n+1}{7} \in \mathbb{Z}$. Novamente, um desses números deve ser 1 e o outro primo. Observe que se $2^n - 1 = 1$ temos que $n = 1$. Neste caso,

$$\frac{8^1-1}{7} = 1$$

que não é solução. Agora se $\dfrac{2^{2n}+2^n+1}{7} = 1$ implica que $n = 1$. Que já vimos que não é solução.

Portanto, a única solução é $n = 3$.

$\square$

Problema 2. Errata: Caro leitor percebemos que há algumas imprecisões no enunciado da questão proposta número 2, da 13ª edição, da olimpíada do Japão 1991. Pedimos desculpas por conta disso e reescrevemos o enunciado correto abaixo:

Dado um número qualquer com 16 algarismos, mostre que é possível extrair um bloco, subsequência formada pelos algarismos desse número na ordem em que se encontram, com um ou mais dígitos consecutivos tais que o produto desses dígitos é um quadrado perfeito.

Solução. Vamos resolver esse problema com o princípio da casa dos pombos nos expoentes dos algarismos. Sejam $d_1, d_2, \ldots, d_{16}$, os algarismos desse número, se algum deles for $0, 1, 4$ ou 9. O problema está resolvido, pois estes já são quadrados perfeitos. Então suponhamos que todos os algarismos desse número sejam $2, 3, 5, 6 = 2 \cdot 3, 7, 8 = 2^3$. Defina $x_0 = 1$ e x_i como o produto dos dígitos de d_1 até d_i, com $i = 0, 1, 2, \ldots, 16$. Observe que cada x_i é da forma $x_i = 2^{a_i} \cdot 3^{b_i} \cdot 5^{c_i} \cdot 7^{d_i}$. Observe que cada um dos elementos a_i, b_i, c_i, d_i é par ou impar. Logo temos 16 possibilidades de paridade para os expoentes. Pelo princípio da casa dos pombos, como há 17 dos x_i's, pelo menos dois deles possuem os expoentes com mesma paridade. Digamos que sejam x_j e x_k, $j < k$, definimos $\dfrac{x_k}{x_j} = d_{j+1} \cdot d_{j+2} \cdot \ldots \cdot d_k$, é um bloco de dígitos consecutivos que é um quadrado perfeito. $\square$

Problema 3 (OBMEP-2019- Nível 3)**.** As amigas Ana, Beatriz, Cláudia e Diana têm uma bola cada uma. Quando toca um sinal, cada menina escolhe, ao acaso, uma de suas três amigas para jogar sua bola. Qual a probabilidade de que Ana receba três bolas?

Solução. Para que Ana receba três bolas, todas as outras três amigas devem necessariamente mandar sua bola para ela. Note que cada garota pode mandar a bola para uma dentre três possíveis pessoas. Assim, a probabilidade de que Beatriz mande a bola para Ana é $\frac{1}{3}$. Empregando o mesmo raciocínio, percebemos que a probabilidade de que Cláudia mande a bola para Ana é $\frac{1}{3}$ e de que Diana mande a bola para Ana também é $\frac{1}{3}$. Todos esses lançamentos são independentes, isto é, o resultado de um lançamento não afeta o resultado de outro lançamento. Assim, a probabilidade de Ana receber as três bolas será de $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$. $\square$