É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 14, volume 2, Março de 2020

ISSN 2526-8651

Sumário

1. Artigo

Polinômios de Tchebyshev

Carlos A. Gomes

UFRN - CCET - Departamento de Matemática.
(59.078-970) - Natal-RN - Brasil

Introdução

Neste artigo, apresentaremos os chamados *Polinômios de Tchebyshev*, que levam esse nome em homenagem ao famoso matemático russo Pafnuti Lvovitch Tchebyshev (1821 - 1894). Como veremos, esses polinômios gozam de propriedades interessantíssimas. Vamos mostrar que esses polinômios são ferramentas bastante úteis para a resolução de muitos problemas algébricos.

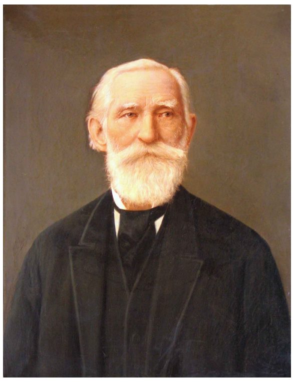


Figura 1: Pafnuti Lvovitch Tchebyshev.

Polinômios de Tchebyshev

Para motivar a introdução dos *Polinômios de Tchebyshev* iniciaremos relembrando algumas identidades trigonométricas envolvendo o $\cos(n\alpha)$, com $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. A partir deste ponto, usaremos $\mathbb{Z}[x]$ e $\mathbb{R}[x]$ para denotar o conjunto dos polinômios na variável x e coeficientes inteiros e reais, respectivamente. Mais precisamente, temos:

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) = &\ \cos(\alpha+\alpha)\\ = &\ \cos\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha\\ = &\ \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\\ = &\ 2\cos^2\alpha - 1\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}\cos(3\alpha) = &\ \cos(2\alpha+\alpha)\\ = &\ \cos 2\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha\operatorname{sen}\alpha\\ = &\ (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha -\\ &\ 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\\ = &\ 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha\\ = &\ 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha\\ = &\ 2\cos^3\alpha - \cos\alpha + 2\cos^3\alpha - 2\cos\alpha\\ = &\ 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.\end{aligned}$$

Seguindo um raciocício completamente análogo podemos provar que

$$\cos(4\alpha) = 8cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha - 1.$$

Diante do exposto, podemos perceber que $cos2\alpha, \cos 3\alpha$ e $\cos 4\alpha$ podem ser escritos em função do $\cos\alpha$. Mais ainda, na verdade existem polinômios $T_2(x), T_3(x), T_4(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tais que

$$\cos 2\alpha = T_2(\cos\alpha),\ \cos 3\alpha = T_3(\cos\alpha)$$

$$\text{e } \cos 4\alpha = T_4(\cos\alpha).$$

Esses polinômios são

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x \text{ e}$$

$$T_4(x) = 8x^3 - 8x - 1.$$

Nesse ponto é natural fazermos a pergunta: Dado $n \in \mathbb{N}$, existe um polinômio $T_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $\cos(n\alpha) = T_n(\cos\alpha)$? A resposta a essa pergunta é sim, conforme revela o teorema a seguir.

Teorema 1.1. *Dados um inteiro $n \geq 1$, existe um polinômio $T_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que*

$$\cos(n\alpha) = T_n(\cos\alpha).$$

Demonstração:

Pela fórmula do Binômio de Newton, tem-se que:

$$(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos\alpha)^{n-k}(i\operatorname{sen}\alpha)^k.$$

Por outro lado, usando a fórmula de Moivre (para potenciação de um número complexo), seque que

$$(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\operatorname{sen}(n\alpha).$$

Portanto,

$$\cos(n\alpha) + i\operatorname{sen}(n\alpha) =$$
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos\alpha)^{n-k}(i\operatorname{sen}\alpha)^k =$$
$$\left[\binom{n}{0}\cos^n(\alpha) - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\operatorname{sen}^2\alpha + \ldots\right] +$$
$$i\left[\binom{n}{1}\cos^{n-1}\operatorname{sen}\alpha - \ldots\right]$$

igualando-se as partes reais dos dois membros, segue que

$$\cos(n\alpha) =$$
$$\binom{n}{0}\cos^n(\alpha) - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\operatorname{sen}^2\alpha + \ldots$$

Usando o fato de que $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ e que os senos que aparecem na identidade acima aparecem em expoentes pares, podemos então obter um polinômio $T_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $\cos(n\alpha) = T_n(\cos\alpha)$, como queríamos demonstrar.

Note que o resultado do teorema acima revela um novo caminho para obtermos os polinômios

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x \text{ e}$$

$$T_4(x) = 8x^3 - 8x - 1$$

que obtivemos no início da nossa discussão. De fato,

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) = &\binom{2}{0}\cos^2\alpha - \binom{2}{2}\operatorname{sen}^2\alpha\\ &= \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)\\ &= 2\cos^2\alpha - 1.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\cos(3\alpha) = &\ \binom{3}{0}\cos^3\alpha - \binom{3}{2}\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\\ = &\ \cos^3\alpha - 3\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)\\ = &\ \cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3\cos^3\alpha\\ = &\ 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 1.\end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}\cos(4\alpha) = &\ \binom{4}{0}\cos^4\alpha - \binom{4}{2}\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}^2\,\alpha +\\ &\ \binom{4}{4}\mathrm{sen}^4\,\alpha\\ = &\ \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)+\\ &\ (1-\cos^2\alpha)^2\\ = &\ \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha + 6\cos^4\alpha + 1\\ - &\ 2\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\\ = &\ 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1.\end{aligned}$$

Notemos ainda que $T_0(x) = 1$, pois para $n = 0$, tem-se que $\cos(n\alpha) = \cos(0.\alpha) = \cos(0) = 1$, o que revela que

$$1 = T_0(\cos(0.\alpha)) = \cos(0.\alpha) = \cos(0) = 1,$$

e $T_1(x) = x$, pois para $n = 1$, temos que $\cos(n\alpha) = \cos(1.\alpha) = \cos\alpha$. Assim, $\cos(1.\alpha) = T_1(cos(\alpha))$. O procedimento acima revela, pois, uma forma explícita de determinarmos $T_n(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.1. Para cada inteiro $n \geq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ o polinômio $T_n \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $\cos(n\alpha) = T_n(\cos\alpha)$ é denominado de n-ésimo polinômio de Tchebyshev.

Há uma lei de recorrência, que é bastante útil para obtermos os membros da família de polinômios de Tchebyshev, conforme revela a proposição a seguir.

Proposição 1.2. *Seja $(T_n(x))_{n\geq 0}$ a sequência dos polinômios de Tchebyshev. Para cada inteiro $n \geq 0$ é válida a seguinte relação de recorrência*

$$T_0(x) = 1 \ \text{ e } T_1(x) = x,$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração:
De fato,

$$\cos[(n+1)\alpha] = cos(n\alpha + \alpha) =$$

$$cos(n\alpha)\cos\alpha - \mathrm{sen}(n\alpha)\,\mathrm{sen}\,\alpha =$$

$$2cos(n\alpha)\cos\alpha - \cos(n\alpha)\cos\alpha -$$

$$\mathrm{sen}(n\alpha)\,\mathrm{sen}\,\alpha =$$

$$2cos(n\alpha)\cos\alpha - [\cos(n\alpha)\cos\alpha +$$

$$\mathrm{sen}(n\alpha)\,\mathrm{sen}\,\alpha] =$$

$$2cos(n\alpha)\cos\alpha - \cos(n-1)\alpha.$$

Ora, como

$$\cos[(n+1)\alpha] = T_{n+1}(\cos\alpha),$$

$$\cos\alpha = T_1(\cos\alpha),$$

$$\cos(n\alpha) = T_n(\cos\alpha) \text{ e}$$

$$\cos(n-1)\alpha = T_{n-1}(\cos\alpha),$$

segue que

$$\cos[(n+1)\alpha] = 2cos(n\alpha)\cos\alpha - \cos(n-1)\alpha \Rightarrow$$

$$T_{n+1}(\cos\alpha) = 2T_1(\cos\alpha)T_n(\cos\alpha) -$$

$$T_{n-1}(\cos\alpha) \Rightarrow$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

como queríamos demonstrar.

Ora, como $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$, podemos utilizar a recorrência acima para obter os demais membros $(T_n(x))_{n\geq 0}$ da sequência dos polinômios de Tchebyshev, conforme ilustramos a seguir.

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$$

Usando essa lei de recorrência podemos obter os primeiros termos da sequência dos polinômios de Tchebyshev:

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = 1$

$T_2(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$

$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$

$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$

$\vdots$

Polinômios de Tchebyshev do segundo tipo

Os polinômios de Tchebyshev que acabamos de introduzir são conhecidos na literatura como *polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo*. Podemos definir uma nova sequência de polinômios $(U_n(x))_{n\geq 0}$ utilizando a mesma lei de recorrência dos polinômios de Tchebyshev (do primeiro tipo), isto é,

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x),$$

mas modificando as condições iniciais para $U_0(x) = 1$ e $U_1(x) = 2x$. Os primeiros polinômios dessa sequência são:

$$\begin{aligned}
U_0(x) &= 1\\
U_1(x) &= 2x\\
U_2(x) &= 4x^2 - 1\\
U_3(x) &= 8x^3 - 4x\\
U_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1\\
U_5(x) &= 32x^5 - 32x^3 + 6x\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Os polinômios dessa sequência são conhecidos na literatura como *Polinômios de Tchebyshev do segundo tipo*. Esses polinômios cumprem a seguinte condição:

$$U_n(\cos\alpha) = \frac{\operatorname{sen}[(n+1)\alpha]}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Vamos demonstrar esse fato por indução sobre n.

- Para $n = 0$, por um lado temos que $U_0(x) = 1$, o que implica que $U_0(\cos\alpha) = 1$ e por outro lado a expressão $\frac{\operatorname{sen}[(n+1)]\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}[(0+1)\alpha]}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = 1$, o que mostra que a igualdade $U_n(\cos\alpha) = \frac{\operatorname{sen}[(n+1)\alpha]}{\operatorname{sen}\alpha}$ ocorre para $n = 0$.

- Suponhamos que para um certo natural $n > 0$ seja válida a igualdade $U_n(\cos\alpha) = \frac{\operatorname{sen}[(n+1)\alpha]}{\operatorname{sen}\alpha}$ (Hipótese da indução).

- Por fim, vamos provar que a igualdade $U_n(\cos\alpha) = \frac{\operatorname{sen}[(n+1)\alpha]}{\operatorname{sen}\alpha}$ também ocorre para $n+1$, isto é, vamos mostrar que $U_{n+1}(\cos\alpha) = \frac{\operatorname{sen}[(n+2)\alpha]}{\operatorname{sen}\alpha}$.
  De fato, utilizando a recorrência
  $$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x),$$
  segue que
  $$\begin{aligned}
  U_{n+1}(\cos\alpha) &= 2\cos\alpha U_n(\cos\alpha)\\
  &\quad - U_{n-1}(\cos\alpha)\\
  &= \frac{\operatorname{sen}(n+2)\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}
  \end{aligned}$$

o que demonstra a validade da expressão $U_n(\cos\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(n+1)\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ para todo inteiro $n \geq 0$.

Podemos utilizar os polinômios de Tchebyshev para provar a irracionalidade dos cossenos de alguns arcos reais. Antes de enunciar o teorema principal vamos mostrar um exemplo para motivar essas ideias.

Questão 1 (OMRN-Lista de preparação)**.** Considere os itens a seguir:

(a) Se α é um número real tal que $\cos(\alpha)$ é irracional, então $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ é irracional.

(b) Mostre que $\cos\left(\frac{\pi}{2048}\right)$ é irracional.

Resolução:

(a) Vamos provar a contra-positiva da afirmação, ou seja, vamos provar que se $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ é racional, então $\cos(\alpha)$ é racional. De fato, Se $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, segue que

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1\\ &= 2\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 1\\ &= \frac{p^2-q^2}{q^2} \in \mathbb{Q}.\end{aligned}$$

(b) Sabemos que $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é irracional. Pelo teorema anterior, segue que os números

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \cos\left(\frac{\pi}{16}\right), \ldots, \cos\left(\frac{\pi}{2048}\right)$$

são todos irracionais, pois

$$\frac{\pi}{8} = \frac{\pi/4}{2}, \frac{\pi}{16} = \frac{\pi/8}{2},$$

$$\frac{\pi}{32} = \frac{\pi/16}{2} \ldots, \frac{\pi}{2048} = \frac{\pi/1024}{2}.$$

Motivados pelas ideias do exemplo anterior temos o seguinte:

Teorema 1.3. *Se α é um número real tal que $\cos(\alpha)$ é irracional, então $\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)$ é irracional, para todo inteiro $n \geq 1$.*

Demonstração:

Mais uma vez vamos demonstrar a contra-positiva, isto é, se $\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)$ é racional, então $\cos(\alpha)$ é racional. De fato, suponha que $\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$. Sabemos que $\cos(n\alpha) = T_n(\cos\alpha)$, onde $T_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ é um polinômio de Tchebyshev. Assim,

$$\cos(\alpha) = \cos(n \cdot \frac{\alpha}{n}) = T_n(\cos\frac{\alpha}{n}) = T_n(\frac{p}{q}) \in \mathbb{Q},$$

pois os coeficientes de $T_n(x)$ são todos inteiros.

Note que a recíproca desse teorema não é verdadeira. Por exemplo, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é irracional, mas $\cos\pi = -1$ é racional.

Questão 2. Mostre que $\cos 1°$ é irracional.

Resolução:

De fato, $\cos 1° = \cos\left(\frac{\pi}{180}\right)$. Pelo item ($a$), sebemos que se $\cos(\alpha)$ é irracional, então $\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$ também é irracional. Ora, como $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é irracional, segue que $\cos\left(\frac{\pi/4}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ é irracional. Da mesma forma como $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ é irracional, segue que $\cos\left(\frac{\pi/12}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{36}\right)$ é irracional. Mais uma vez pelo teorema acima, se $\cos(\alpha)$ é irracional, então $\cos\left(\frac{\alpha}{5}\right)$ também é irracional. Assim, como $\cos\left(\frac{\pi}{36}\right)$ é irracional, segue que $\cos\left(\frac{\pi/36}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{180}\right)$ é irracional, como queríamos demonstrar.

Soma dos coeficientes dos polinômios de Tchebyshev

A soma dos coeficientes do polinômio de Tchebyshev $T_n(x)$ é igual a 1. Lembrando que a soma dos coeficientes de um polinômio qualquer $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ é $p(1)$, segue que a soma dos coeficientes de $T_n(x)$ é igual a

$$T_n(1) = T_n(\cos 0) = \cos(n.0) = 1.$$

Alguns coeficientes especiais

Para todo inteiro $k \geq 0$, tem-se que:

- O termo linear em $T_{2k+1}(x)$ é
$$(-1)^k(2k+1)x.$$
- O termo constante em $T_{2k}(x)$ é $(-1)^k$.

Essas propriedades podem ser verificadas fazendo uma indução sobre k e usando a recorrência $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$. Elas podem ser bastante úteis para calcularmos produtos de certos valores de senos e cossenos, como ilustram o exemplos a seguir.

Com relação aos polinômios de Tchebyshev do segundo tipo, para todo inteiro $k \geq 0$, tem-se que:

- O coeficiente dominante de $U_k(x)$ é 2^k.
- O termo constante de $U_{2k}(x)$ é igual a $(-1)^k$.
- O termo linear de $U_{2k+1}(x)$ é igual a
$$(-1)^k(2k+2)x.$$

Essas igualdades também podem ser demonstradas utilizando indução sobre k com o auxílio da recorrência para os polinômios de Tchebyshev do segundo tipo.

Valores especiais

Para cada inteiro $n \geq 0$ o polinômio de Tchebyshev $T_n(x)$, cumpre as seguintes condições:

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

$$T_n(1) = 1$$

$$T_n(-1) = (-1)^n$$

$$T_{2n}(0) = (-1)^n$$

$$T_{2n+1}(0) = 0.$$

A comprovação desses valores pode ser realizada sem maiores problemas usando a definição e a lei de recorrência para os polinômios de Tchebyshev.

O grau e o coeficiente dominante dos polinômios de Tchebyshev

Observando os primeiros termos da sequência dos polinômios de Tchebyshev $(T_n(x))_{n\geq 0}$, segue que:

$$\begin{aligned}
&T_0(x) = 1 \Rightarrow gr(T_0(x)) = 0\\
&T_1(x) = x \Rightarrow gr(T_1(x)) = 1\\
&T_2(x) = 2x^2 - 1 \Rightarrow gr(T_2(x)) = 2\\
&T_3(x) = 4x^3 - 3x \Rightarrow gr(T_3(x)) = 3\\
&\vdots
\end{aligned}$$

o que sugere que $gr(T_n(x)) = n$ para todo inteiro $n \geq 0$. Podemos provar formalmente isso, por indução sobre n. Para $n = 0$ temos que $gr(T_0(x)) = 0$. Suponhamos que $gr(T_n(x)) = n$ (hipótese da indução). Por outro lado, sabemos que:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Então,

$$\begin{aligned}
gr(T_{n+1}(x)) &= gr(2xT_n(x))\\
&= gr(2x) + gr(T_n(x)) = 1 + n.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$gr(T_{n+1}(x)) = n + 1.$$

Um outro fato que pode ser provado por indução é que para $n \geq 1$ o coeficiente dominante de $T_n(x)$ é igual a 2^{n-1}. Com efeito, se $n = 1$, temos que $T_1(x) = x$, cujo coeficiente dominante é 1, que é exatamente igual a $2^{1-1} = 2^0 = 1$. Suponha, que o resultado seja verdadeiro para $T_n(x)$, isto é, o coeficiente dominante de $T_n(x)$ é 2^{n-1} (hipótese da indução).

Usando a relação de recorrência,

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$

segue que o coeficiente dominante de $T_{n+1}(x)$ é igual a

$$2.2^{n-1} = 2^n = 2^{(n+1)-1}.$$

Seguindo as mesmas ideias, pode-se provar que para cada inteiro $n \geq 0$, no caso do polinômio de Tchebyshev do segundo tipo $U_n(x)$ o grau é igual a n e o seu coeficiente dominante é 2^n.

Composição de polinômios de Tchebyshev

Nesta seção, estabeleceremos mais uma importante propriedade dos polinômios de Tchebyshev que surge quando fazemos a composição de dois polinômios de Tchebyshev. A partir da relação de recorrência dos polinômios de Tchebyshev, a chamada *identidade de composição* (também conhecida como *propriedade de aninhamento* dos polinômios de Tchebyshev), a saber: para quaisquer inteiros $m, n \geq 0$, tem-se que:

$$T_{mn}(x) = T_m((T_n(x)) = T_n(T_m(x)), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} T_{mn}(\cos\alpha) &= \cos(mn\alpha) \\ &= \cos(m(n\alpha)) = T_m(\cos(n\alpha)) \\ &= T_m(T_n(\cos\alpha)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{mn}(\cos\alpha) &= \cos(nm\alpha) \\ &= \cos(n(m\alpha)) = T_n(\cos(m\alpha)) \\ &= T_n(T_m(\cos\alpha)). \end{aligned}$$

Assim,

$$T_{mn}(x) = T_m(T_n(x)) = T_n(T_m(x)),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

como queríamos demonstrar.

Zeros dos polinômios de Tchebyshev

Como os polinômios de Tchebyshev estão intimamente relacionados com os cossenos de certos números reais, é natural investigar se para cada inteiro $n > 0$ o polinômio $T_n(x)$ possui raízes da forma $x = \cos\alpha$. Ora, se $x = \cos\alpha$ for uma raíz do polinômio $T_n(x)$, segue que

$$T_n(x) = 0 \Leftrightarrow T_n(\cos\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos(n\alpha) = 0.$$

Por outro lado,

$$\cos(n\alpha) = 0 \Leftrightarrow n\alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \frac{(2k+1)}{2n}\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Fazendo $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ os n números reais (distintos)

$$x_0 = \cos\frac{\pi}{2n}, x_1 = \cos\frac{3\pi}{2n}, x_2 = \cos\frac{5\pi}{2n}, \ldots,$$

$$x_{n-1} = \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n},$$

são as n raízes do polinômio $T_n(x)$, pois o Teorema Fundamental da Álgebra assegura que um polinômio de grau n possui no máximo n raízes distintas. Isso revela que todas as raízes de um polinômio de Tchebyshev são raízes simples e como todas elas são valores de cossenos de números reais, segue que todas essas raízes pertencem ao intervalo $[-1, 1]$. A figura abaixo, mostra as representações gráficas dos 6 primeiros polinômios de Tchebyshev e suas raízes.

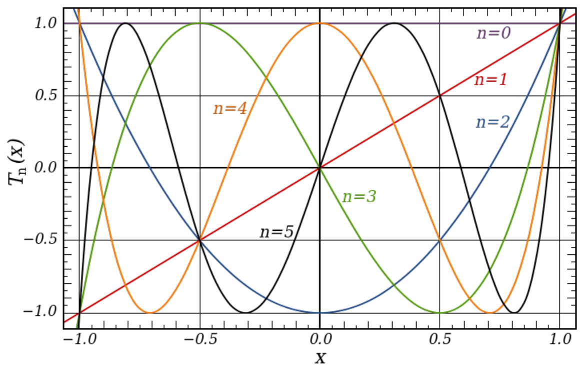


Figura 2: Gráficos de $T_0(x), T_1(x), \ldots, T_5(x)$

Um resultado bastante conhecido da teoria dos polinômios é: se $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ são as raízes do polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$, então

$$p(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

onde a_n é o coeficiente dominante de p. Se $n \geq 1$, no caso dos polinômios de Tchebyshev, o coeficiente dominante de $T_n(x)$ é 2^{n-1}, segue que:

$$T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(x - \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right).$$

No caso dos polinômios de Tchebyshev do segundo tipo, se procurarmos raízes do tipo $x = \cos\alpha$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, segue que

$$0 = U_n(x) = U_n(\cos\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(n+1)\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}(n+1)\alpha = 0.$$

Mas ocorre que

$$\operatorname{sen}(n+1)\alpha = 0 \Rightarrow (n+1)\alpha = k\pi,\ \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

Fazendo $k = 1, 2, \ldots, n$ obtemos então n raízes para

$U_n(x)$, a saber:

$$x_1 = \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right), x_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{n+1}\right), \ldots,$$

$$\ldots x_n = \cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right).$$

Ora, como o polinômio $U_n(x)$ tem grau n e esses números são todos distintos, segue que $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são todas as raízes de $U_n(x)$. Lembrando que o coeficiente dominante de $U_n(x)$ é 2^n, segue que

$$U_n(x) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(x - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

A seguir, mostraremos alguns exemplos interessantes em que podemos utilizar as propriedades acima para obter uma solução.

Questão 3 (OMRN - Lista de preparação)**.** Calcule o valor do produto

$$P = \cos\left(\frac{\pi}{2020}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2020}\right)\cdots\cos\left(\frac{2019\pi}{2020}\right).$$

Resolução:

Sabemos que os números

$$x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{2020}\right), x_1 = \cos\left(\frac{3\pi}{2020}\right), \ldots,$$

$$\ldots, x_{1009} = \cos\left(\frac{2019\pi}{2020}\right)$$

são as raízes do polinômio de Tchebyshev $T_{1010}(x)$. Pelas relações de Girard-Viéte, o produto das raízes de um polinômio

$$p(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$$

é dado por $(-1)^k \cdot \frac{a_0}{a_k}$. Lembrando que o coeficiente dominante do polinômio de Tchebyshev $T_n(x)$ é 2^{n-1} e o termo constante de $T_{2k}(x)$ é $(-1)^k$, segue que no caso do polinômio de Tchebyshev $T_{1010}(x)$ tem-se que $a_{1010} = 2^{1010-1} = 2^{1009}$ e $a_0 = (-1)^{505} = -1$. Assim,

$$\begin{aligned} P &= \cos\left(\frac{\pi}{2020}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2020}\right)\cdots\cos\left(\frac{2019\pi}{2020}\right) \\ &= (-1)^{1010}\cdot\frac{(-1)}{2^{1009}} \\ &= -\frac{1}{2^{1009}} \end{aligned}$$

Questão 4 (JEE - Índia)**.** Mostre que

$$\begin{aligned} S &= \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) \\ &+ \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) \\ &+ \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) \\ &+ \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) \\ &+ \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) \\ &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$

Resolução: Sabemos que os números

$$x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right), x_1 = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) x_3 = \cos\left(\frac{5\pi}{10}\right)$$

$$x_4 = \cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) \;\; e \;\; x_5 = \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)$$

são as raízes do polinômio de Tchebyshev $T_5(x)$. Pelas relações de Girard-Viète, a soma dos produtos (tomadas 4 a 4) das raízes de um polinômio

$$p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$$

é dado por $\frac{a_1}{a_5}$. Lembrando que o coeficiente dominante do polinômio de Tchebyshev $T_n(x)$ é 2^{n-1} e o termo constante de $T_{2k+1}(x)$ é $(-1)^k(2k+1)x$, segue que no caso do polinômio de Tchebyshev $T_5(x)$ tem-se que $a_5 = 2^{5-1} = 2^4 = 16$ e $a_1 = (-1)^2.(2.2+1) = 5$. Assim, $S = \frac{5}{16}$.

Questão 5. Mostre que:

(a) $\cos\left(\frac{\pi}{22}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{22}\right)\cdots\cos\left(\frac{9\pi}{22}\right) = \frac{\sqrt{11}}{32}$.

(b) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{11}\right)\text{sen}\left(\frac{2\pi}{11}\right)\cdots\text{sen}\left(\frac{5\pi}{11}\right) = \frac{\sqrt{11}}{32}$.

Resolução:

(a) Sabemos que os números

$$x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{22}\right), x_1 = \cos\left(\frac{3\pi}{22}\right), \ldots$$

$$\ldots, x_{10} = \cos\left(\frac{21\pi}{22}\right)$$

são as raízes do polinômio

$$T_{11}(x) = 2^{10}x^{11} - a_9x^9 + \cdots - 11x.$$

Note que $x_6 = \cos\left(\frac{11\pi}{22}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ é uma das raízes. Ora, como

$$\begin{aligned} T_{11}(x) &= 2^{10}x^{11} - a_9x^9 + \cdots - 11x \\ &= (2^{10}x^{10} - a_9x^8 + \cdots - 11)x \end{aligned}$$

Segue que as demais raízes, a saber:

$$\cos\left(\frac{\pi}{22}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{22}\right), \cos\left(\frac{5\pi}{22}\right), \cos\left(\frac{7\pi}{22}\right),$$

$$\cos\left(\frac{9\pi}{22}\right), \cos\left(\frac{13\pi}{22}\right), \cos\left(\frac{15\pi}{22}\right),$$

$$\cos\left(\frac{17\pi}{22}\right), \cos\left(\frac{19\pi}{22}\right), \cos\left(\frac{21\pi}{22}\right)$$

são as raízes do polinômio

$$f(x) = 2^{10}x^{10} - a_9x^8 + \cdots - 11.$$

Além disso, note que

$$\cos\left(\frac{19\pi}{22}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{22}\right)$$

$$\cos\left(\frac{17\pi}{22}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{22}\right)$$

$$\cos\left(\frac{15\pi}{22}\right) = -\cos\left(\frac{7\pi}{22}\right)$$

Assim, fazendo a mudança de variáveis $x^2 = t$, no polinômio

$$f(x) = 2^{10}x^{10} - a_9x^8 + \cdots - 11,$$

obtemos que

$$f(t) = 2^{10}t^5 - a_9t^4 + \cdots - 11$$

e suas raízes são

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{22}\right), \cos^2\left(\frac{3\pi}{22}\right), \cos^2\left(\frac{5\pi}{22}\right),$$

$$\cos^2\left(\frac{7\pi}{22}\right), \cos^2\left(\frac{9\pi}{22}\right).$$

Por fim, usando as relações de Girard-Viète, segue que o produto dessas raízes é

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{22}\right)\cos^2\left(\frac{3\pi}{22}\right)\ldots\cos^2\left(\frac{9\pi}{22}\right) = \frac{11}{2^{10}}$$

Assim,

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{22}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{22}\right)\ldots\cos\left(\frac{9\pi}{22}\right)\right]^2 = \frac{11}{2^{10}}$$

Portanto,

$$\cos\left(\frac{\pi}{22}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{22}\right)\ldots\cos\left(\frac{9\pi}{22}\right) = \frac{\sqrt{11}}{32}$$

(b) Para obter o resultado

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{11}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{11}\right)\cdots\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{11}\right) = \frac{\sqrt{11}}{32},$$

vamos utilizar a identidade que acabamos de demonstrar no item anterior e o fato

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vejamos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{22}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{22}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{11}\right)$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{22}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{22}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{11}\right)$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{22}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{22}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{11}\right)$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{22}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{22}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{11}\right)$$

$$\cos\left(\frac{9\pi}{22}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{22}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{11}\right)$$

Multiplicando membro a membro as igualdades acima, segue que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{11}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{11}\right)\ldots\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{11}\right) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{22}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{22}\right)\cdots\cos\left(\frac{9\pi}{22}\right) = \frac{\sqrt{11}}{32}$$

Questão 6. Mostre que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)\ldots\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) = \frac{1}{32}.$$

Resolução: Sabemos que os números

$$x_1 = \cos\left(\frac{\pi}{11}\right), x_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{11}\right),$$

$$x_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right), x_4 = \cos\left(\frac{4\pi}{11}\right),$$

$$x_5 = \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right), x_6 = \cos\left(\frac{6\pi}{11}\right)$$

$$, x_7 = \cos\left(\frac{7\pi}{11}\right), x_8 = \cos\left(\frac{8\pi}{11}\right),$$

$$x_9 = \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right), x_{10} = \cos\left(\frac{10\pi}{11}\right)$$

são as raízes do polinômio

$$U_{10}(x) = 2^{10}x^{10} + a_8x^8 + a_6x^6 + \ldots - 1.$$

Por outro lado,

$$\cos\left(\frac{\pi}{11}\right) = -\cos\left(\frac{10\pi}{11}\right)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right) = -\cos\left(\frac{9\pi}{11}\right)$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) = -\cos\left(\frac{8\pi}{11}\right)$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{11}\right) = -\cos\left(\frac{7\pi}{11}\right)$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) = -\cos\left(\frac{6\pi}{11}\right)$$

Assim, fazendo a mudança de variáveis $t = x^2$ em $U_{10}(x)$, segue que os números

$$x_1 = \cos^2\left(\frac{\pi}{11}\right), x_2 = \cos^2\left(\frac{2\pi}{11}\right),$$

$$x_3 = \cos^2\left(\frac{3\pi}{11}\right), x_4 = \cos^2\left(\frac{4\pi}{11}\right)$$

$$x_5 = \cos^2\left(\frac{5\pi}{11}\right)$$

são as raízes do polinômio

$$p(t) = 2^{10}t^5 + a_8t^4 + a_6t^3 + \ldots - 1.$$

Assim, usando as relações de Girard-Viète, segue que o produto das raízes desse polinômio é igual a

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{11}\right)\cos^2\left(\frac{2\pi}{11}\right)\ldots\cos^2\left(\frac{5\pi}{11}\right) = \frac{(-1)^6}{2^{10}},$$

Portanto,

$$\cos\left(\frac{\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)\ldots\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) = \frac{1}{32}.$$

Limitação dos polinômios de Tchebyshev

Para todo inteiro $n \geq 0$, tem-se que $|T_n(x)| \leq 1, \forall x \in [-1,1]$, pois para todo $x \in [-1,1]$ existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x = \cos\alpha$. Assim,

$$T_n(x) = T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha) \in [-1,1] \Rightarrow$$

$$|T_n(x)| \leq 1, \forall x \in [-1,1].$$

Polinômios de $\mathbb{R}[x]$ versus polinômios de Tchebyshev

Por outro lado, para todo inteiro $n \geq 0$, a potência x^n pode ser escrita em função dos polinômios de Tchebyshev.

$$
\begin{aligned}
1 &= T_0(x)\\
x &= T_1(x)\\
x^2 &= \tfrac{1}{2}(T_0+T_2)(x)\\
x^3 &= \tfrac{1}{4}(3T_1+T_3)(x)\\
x^4 &= \tfrac{1}{8}(3T_0+4T_2+T_4)(x)\\
x^5 &= \tfrac{1}{16}(10T_1+5T_3+T_5)(x)\\
x^6 &= \tfrac{1}{32}(10T_0+15T_2+6T_4+T_6)(x)\\
x^7 &= \tfrac{1}{64}(35T_1+21T_3+7T_5+T_7)\\
x^8 &= \tfrac{1}{128}(35T_0+56T_2+28T_4+8T_6+T_8)(x)\\
x^9 &= \tfrac{1}{256}(126T_1+84T_3+36T_5+9T_7+T_9)(x)
\end{aligned}
$$

As igualdades acima são casos particulares da identidade

$$x^n = 2^{1-n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{k}T_{n-2k}(x),$$

cuja prova encontra-se em [6]. Na identidade acima o somatório $\sum'$ significa que o k-ésimo termo é multiplicado por $\frac{1}{2}$ se n é par e $k=\frac{n}{2}$, além disso no somatório acima $\lfloor n/2\rfloor$ representa parte inteira de $n/2$. Apenas para ilustrar melhor o que acabamos de dizer observe o seguinte caso particular:

$$
\begin{aligned}
x^4 &= 2^{-3}\sum_{k=0}^{2}\binom{4}{k}T_{4-2k}(x)\\
&= \frac{1}{8}\left[T_4(x)+\binom{4}{1}T_2(x)+\frac{1}{2}\binom{4}{2}T_0(x)\right]\\
&= \frac{1}{8}T_4(x)+\frac{1}{2}T_2(x)+\frac{3}{8}T_0(x).
\end{aligned}
$$

Um resultado muito interessante que decorre do fato de que x^n para cada inteiro $n\geq 0$ pode ser escrito em função dos polinômios de Tchebyshev é que qualquer polinômio em $\mathbb{R}[x]$ é uma combinação linear de Polinomios de Tchebyshev, como revela o teorema a seguir.

Teorema 1.4. *Qualquer polinômio de grau n e coeficientes reais pode ser escrito como uma soma de polinônios de Tchebyshev de primeira ordem de grau máximo n. Isto é, se $p(x)\in\mathbb{R}[x]$ então existem números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que*

$$p(x) = a_0T_0(x)+a_1T_1(x)+\ldots+a_nT_n(x).$$

Demonstração:

A demonstração desse fato decorre da igualdade do fato de que x^n para todo inteiro $n\geq 0$ pode ser escrito como uma combinação linear de polinômios de Tchebyshev, conforme o que expomos anteriormente.

Questão 7. Para m e n inteiros não negativos tais que $m\geq n$. Mostre que os polinômios de Tchebyshev $T_n(x)$ e $T_m(x)$ cumprem a seguinte condição

$$T_{m+n}(x)+T_{m-n}(x) = 2T_m(x)T_n(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Resolução:

Sabemos que

$$T_m(\cos\alpha)=\cos(m\alpha), T_n(\cos\alpha)=\cos(n\alpha),$$

$$T_{m+n}(\cos\alpha)=\cos(m+n)\alpha \text{ e}$$

$$T_{m-n}(\cos\alpha)=\cos(m-n)\alpha.$$

Por outro lado,

$$\cos(m+n)\alpha+\cos(n-n)\alpha =$$

$$2\cos\left(\frac{(m+n)\alpha+(m-n)\alpha}{2}\right)\cdot$$

$$\cos\left(\frac{(m+n)\alpha-(m-n)\alpha}{2}\right) =$$

$$2\cos(m\alpha)\cos(n\alpha).$$

Assim, $T_{m+n}(x)+T_{m-n}(x) = 2T_m(x)T_n(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

Observação 1. Pode parecer estranho que concluímos que a propriedade acima é válida para todo x real, se de certa forma só a provamos para valores no intevalo $[-1,1]$, já que o argumento que apresentamos acima foi dado para valores de cossenos de números reais. Mas isso não causa nenhum problema visto que, como já mostramos anteriormente, todas as raízes dos polinômios de Tchebyshev pertencem ao intervalo $[-1,1]$, o que define completamente o polinômio em $\mathbb{R}$.

Problemas propostos

Nesta seção vamos mostrar alguns exemplos em que os polinômios de Tchebyshev se mostram como ferramentas adequadas para a sua solução.

1. Prove que para todo $n \geq 1$, os polinômios de Tchebyshev do primeiro e do segundo tipo cumprem as seguintes condições:

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) - (1-x^2)U_{n-1}(x)$$

$$U_n(x) = xU_{n-1}(x) + T_n(x).$$

2. Para todo inteiro $n \geq 1$, mostre que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 2x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2x \end{pmatrix} = T_n(x),$$

onde $T_n(x)$ é o n-ésimo polinômio de Tchebyshev.

3. (IIT - Índia) Para todo inteiro $k > 0$, mostre que

$$\cos\left(\frac{\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)\cdots\cos\left(\frac{k\pi}{11}\right) = \frac{1}{2^k}.$$

4. (JEE - Índia) Para todo inteiro $k > 0$, mostre que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2k+1}\right)\cdots\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2k+1}\right) = \frac{\sqrt{2k+1}}{2^k}.$$

5. Para todo inteiro $k > 0$, mostre que:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2k+1}\right)\cdots\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{2k+1}\right) = \sqrt{2k+1}.$$

6. (Ibero-2018)Sejam $p(x)$ um polinômio com coeficientes reais tal que

$$grau(p) \leq 2018, \quad e \quad |p(x)| \leq \frac{1}{|x-\sqrt{3}|}$$

para $x \in [-2, 2]$. Prove que:

$$|p(\sqrt{3})| \leq 2019.$$

7. Se $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\cos(r\pi)$ também é racional, mostre que $\cos(r\pi) \in \left\{0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}\right\}$.

8. (IMO-1976)Seja $P_1(x) = x^2 - 2$ e $P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x))$ para $j = 2, 3, \dots$ Mostre que para todo inteiro positivo n, as raízes da equação $P_n(x) = x$ são reais e distintas.

9. (IMO-1978 - Longlist) Dada a expressão

$$P_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2^n},$$

Prove que $P_n(x)$ satisfaz a identidade

$$P_n(x) - xP_{n-1}(x) + \frac{1}{4}P_{n-2}(x) = 0,$$

e que $P_{mn}(x) = P_m(P_n(x))$ quaisquer que sejam os inteiros não negativos m e n.

10. Seja $P(x)$ um polinômio de grau n e coeficientes reais. Mostre que existe algum $t \in [-1, 1]$ tal que $|P(t)| \geq \frac{1}{2^n}$.

Referências

[1] ANDREESCU, TITU. GELCA, RAZVAN *Mathematical Olympiad Challenges* Birkhäuser - 2000.

[2] ANDREESCU, TITU. GELCA, RAZVAN *Putnam and Beyond* Second edition - Springer Verlag - 2017.

[3] BARBEAU, EDWARD J. *Polynomials* Springer Verlag - 2003.

[4] CHANG, GENGZHE. SEDERBERG, THOMAS W. *Over and over again* The Mathematical Association of America - MAA - 1997.

[5] DUSAN DJUKIC, VLADIMIR JANKOVIC, IVAN MATIC, NIKOLA PETROVIC. *The IMO compendium a collection of problems suggested for the international mathematics olympiads* Springer Verlag - MAA - 2006.

[6] MASON, J. C., HANSCOMB, D. C. *Chebyshev Polynomials* CRC - Press - 2002.

2. Soluções de Olimpíadas

Nesta edição apresentaremos a resolução de três questões discursivas da prova da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2019 referentes ao nível 2.

Questão 1. Na terra de π-raia, um observador registrou que um cometa X e um cometa Y poderiam ser vistos a cada período de 76 e y anos, respectivamente. Sabendo que este ano os dois cometas foram vistos juntos, e que a próxima vez que eles serão vistos juntos novamente ocorre daqui a 684 anos, responda os seguintes itens.

a) Quantas vezes os cometas serão vistos juntos durante os próximos 13.000 anos?

b) Determine todos os possíveis valores para y.

Solução: Dividiremos a resolução em duas etapas:

1. Como os cometas se encontram a cada 684 anos, e foram vistos este ano, basta verificar a quantidade de vezes que 684 cabem em 13.000 e isso ocorre em um total de 19 vezes, pois $19 \cdot 684 = 12996$.

2. Perceba que $mmc(76, y) = 684$. Fatorando temos que $76 = 2^2 \cdot 19$ e $684 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 19$. Desta forma, como 684 é um múltiplo de y, então y é da forma $y = 2^j \cdot 3^2 \cdot 19^k$, em que $j = 0, 1, 2$ e $k = 0, 1$, temos assim os seguintes possíveis valores para y

   (a) Se $j = 0$ e $k = 0$, $y = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 19^0 = 9$.
   (b) Se $j = 0$ e $k = 1$, $y = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 19^1 = 171$.
   (c) Se $j = 1$ e $k = 0$, $y = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 19^0 = 18$.
   (d) Se $j = 1$ e $k = 1$, $y = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 19^1 = 342$.
   (e) Se $j = 2$ e $k = 0$, $y = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 19^0 = 36$.
   (f) Se $j = 2$ e $k = 1$, $y = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 19^1 = 684$.

□

Questão 2. Ao observar a sua sopa de letrinhas, Dafne percebe que é possível formar palavras com as letras que estão flutuando na sopa.

Admitindo que a sopa possui ao menos uma letra de cada letra do alfabeto e que as letrinhas aparecem em quantidade suficiente para formar as palavras pedidas, calcule:

1. O número de palavras com 3 letras, utilizando-se apenas as letras de A até E em que cada letra pode ser escolhida mais de uma vez e letras distintas devem estar ordenadas alfabeticamente

2. O número de palavras com 10 letras, utilizando-se apenas as letras de A até G e supondo que cada letra deva ser escolhida pelo menos uma vez.

Solução:

1. Temos 3 casos a considerar: (i) as três letras da palavra são idênticas; (ii) a palavra têm duas letras idênticas e uma segunda letra distinta da primeira; (iii) a palavra possui três letras distintas. No caso (i), temos 5 possibilidades: AAA, BBB, CCC, DDD, EEE. No caso (ii), temos 5 possibilidades para escolher a primeira letra e 4 possibilidades para escolher a segunda letra. Logo, 20 possibilidades para escolher as duas letras que irão figurar na palavra. Entretanto, cada palavra escolhida assim foi contada duas vezes. Logo, devemos dividir por dois a nossa resposta, o que nos dá $5 \times 4/2 = 10$ modos. Por fim, escolhemos qual dessas duas letras irá se repetir, o que pode ser feito de 2 maneiras. Portanto, pelo

ISSN 2526-8651

princípio multiplicativo, temos $10 \times 2 = 20$ palavras. No caso (iii), temos 5 possibilidades para escolher a primeira letra, 4 possibilidades para escolher a segunda e 3 possibilidades para escolher a terceira letra. Como as letras devem permanecer em ordem alfabética, devemos descontar o número de maneiras que essas letras podem ser reordenadas, ou seja, devemos dividir nossa resposta por $3! = 6$. Portanto, o número de palavras neste caso é $5 \times 4 \times 3/6 = 10$. Pelo princípio aditivo, temos $5 + 20 + 10 = 35$ palavras possíveis.

2. Temos três casos possíveis: (i) uma mesma letra aparece 4 vezes na palavra e as 6 letras restantes são todas distintas entre si; (ii) uma mesma letra aparece 3 vezes na palavra, outra letra aparece 2 vezes e as 5 letras restantes são todas distintas entre si; (iii) três letras distintas aparecem em pares na palavra e as 4 letras restantes são todas distintas entre si.

   (i) Temos 7 maneiras de escolher a letra que irá se repetir e $10 \times 9 \times 8 \times 7$ modos de escolher as 4 posições na palavra que serão ocupadas por esta letra, pois temos 10 maneiras de escolher a primeira posição, 9 maneiras para a segunda posição, 8 maneiras para a terceira posição e 7 maneiras para a quarta posição. Fazendo deste modo, entretanto, cada palavra foi contada a mais $4! = 24$ vezes, pois as 4 letras que irão ocupar as 4 posições escolhidas são idênticas, logo permutando-as entre si enquanto se mantêm as demais fixas formariam a mesma palavra. Portanto, devemos dividir nossa resposta final por $4!$. Para concluir, temos 6 letras restantes para ocuparem os 6 espaços que sobraram, o que pode ser feito de $6! = 720$ modos. Assim, a resposta nesse caso é $7 \times \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!} \times 6! = 1058400$ palavras.

   (ii) Temos 7 maneiras de escolher a letra que irá se repetir 3 vezes e 6 maneiras de escolher a letra que irá se repetir 2 vezes. Para a letra que irá se repetir 3 vezes, assim como no caso anterior, temos $10 \times 9 \times 8/3!$ modos de posicionar essas letras. Para a letra que irá se repetir duas vezes, assim como no caso anterior, temos $7 \times 6/2!$ modos de posicionar essas letras. Para concluir, temos 5 letras restantes para ocuparem os 5 espaços que sobraram, o que pode ser feito de $5! = 120$ modos. Assim, a resposta nesse caso é $7 \times 6 \times \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3!} \times \dfrac{7 \times 6}{2!} \times 5! = 12700800$.

   (iii) Temos 7 maneiras de escolher a primeira letra que irá se repetir, 6 maneiras de escolher a segunda letra que irá se repetir e 5 maneiras de escolher a terceira letra que irá se repetir, uma vez feito isso, precisamos dividir por $3!$, pois a ordem dessas escolhas não faz diferença. Agora, precisamos escolher as posições que essas letras irão ocupar. Temos $10 \times 9/2!$ maneiras de escolher as posições para o primeiro par de letras, $8 \times 7/2!$ maneiras de escolher as posições para o segundo par de letras e $6 \times 5/2!$ maneiras de escolher as posições para o terceiro par de letras. Para concluir, temos 4 letras para ocupar os 4 espaços que sobraram, o que pode ser feito de $4!$ maneiras. Assim, a resposta nesse caso é $\dfrac{7 \times 6 \times 5}{3} \times \dfrac{10 \times 9}{2!} \times \dfrac{8 \times 7}{2!} \times \dfrac{6 \times 5}{2!} \times 4! = 15876000$.

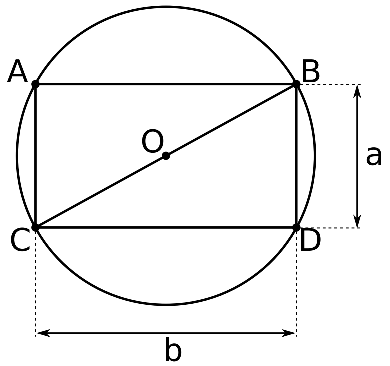
Portanto, pelo princípio aditivo temos $15876000 + 12700800 + 1058400 = 29635200$ palavras distintas que podem ser formadas satisfazendo as condições do enunciado.

□

Questão 3. Durante os intervalos de seu estudo para Olimpíadas de Matemática, o aluno Pedro desenhou uma circunferência C e um retângulo R inscrito naquela circunferência.

Se C e R têm respectivamente π e 1 unidades de área, quais são as medidas dos lados do retângulo R?

Solução: A figura abaixo auxiliará na compreensão da resolução.



Vamos supor que as medidas dos lados de R sejam a e b. Como a área de R é 1 unidade então

$$a \cdot b = 1. \tag{1}$$

Sendo a área de C de π unidades, então seu raio é 1. Sabendo que R está inscrito em C então obtemos que o segmento de reta que liga o centro de C até um dos vértices de R é 1 unidade, e consequentemente, a diagonal de R mede 2 unidades. Considere o triângulo retângulo com catetos cuja medidas sejam a e b, hipotenusa cuja medida seja 2. No que segue, vamos mostrar uma relação entre as medidas dos catetos e a hipotenusa usando semelhança de triângulos. Vamos denominar esse triângulo por ΔABC, onde AB e AC denotam os catetos e BC denota a hipotenusa. No triângulo ΔABC, retângulo em A, a altura AH (perpendicular a BC, no qual H é um ponto do segmento BC), referente à hipotenusa, origina dois triângulos semelhantes ao triângulo maior, em vista da congruência dos ângulos ($B\hat{A}C$ e $C\hat{A}H$).

Portanto, temos proporcionalidade entre os lados, um para cada triângulo parcial ou total. Além disso, denote por m e n as medidas dos segmentos BH e HC, respectivamente. Consequentemente, temos um triângulo retângulo com altura h e projeções m e n dos catetos a e b, respectivamente.

Logo,

$$\frac{b}{2} = \frac{m}{b} \quad \text{e} \quad \frac{a}{2} = \frac{n}{a}.$$

A expressão acima fornece $b^2 = 2m$ e $a^2 = 2n$. Assim, obtemos

$$a^2 + b^2 = 2m + 2n = 2(m+n) = 2 \cdot 2 = 4,$$

isto é,

$$a^2 + b^2 = 4. \tag{2}$$

Substituindo a relação (1) em (2) segue que

$$\begin{aligned} a^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2 &= 4 \quad \Rightarrow \qquad (3) \\ a^2 + \frac{1}{a^2} &= 4 \quad \Rightarrow \\ \frac{a^4+1}{a^2} &= 4 \quad \Rightarrow \\ a^4 - 4a^2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Faça $y = a^2$, onde $a > 0$ e $y > 0$. Logo, a partir de (3), temos

$$y^2 - 4y + 1 = 0.$$

Resolvendo a equação acima encontramos as seguintes raízes $y = 2 - \sqrt{3}$ e $y = 2 + \sqrt{3}$, onde ambas as raízes são positivas.

Assim, da relação $y = a^2$ temos que

$$a = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad a = \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Usando a relação (1) garantimos que, se $a = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ então $b = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ ou vice-versa.

Portanto, as medidas dos lados de R são $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ e $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

□

 ISSN 2526-8651

3. Curiosidades

Entrando no caos

por Everton Henrique Cardoso de Lira[1]

Caos, do grego *kháos*, palavra que na mitologia designa o vazio primordial no qual jaziam latentes as forças criativas de todas a coisas. Na filosofia, diz respeito ao estado desordenado dos elementos cósmicos anterior a ação do *Demiurgo*[2] ou da força organizadora do Universo. Nas conversações do dia a dia, caos é entendido como sinônimo de situação desorganizada e desarmoniosa, na qual, geralmente ninguém deseja se encontrar. Por outro lado, para os matemáticos caos não é sinônimo de desordem, muito pelo contrário, é um fenômeno bem compreendido por estes e que pode ser estudado de forma organizada e sistemática, na chamada Teoria do Caos.

Em 1972, o meteorologista Edward N. Lorenz[3] (1917 - 2008) apresentou diante da Sociedade Americana para o Avanço da Ciência, a icônica palestra intitulada: "Previsibilidade: o bater das asas de uma borboleta no Brasil desencadeia um tornado no Texas?", a qual popularizou o termo *efeito borboleta* como um sinônimo de situaçõs inesperadas, resultantes de pequenas ações, como é claro, o bater das asas de uma borboleta. Em matemática, sistemas que possuem semelhante comportamento são conhecidos como *caóticos*, e para dar ao leitor o gostinho de como as coisas funcionam, apresentamos a seguir uma sequência que é um bom exemplo disto.

A sequência de diferença logística, ou simplesmente sequência logística, é dada pela recorrência $a_{n+1} = ka_n(1 - a_n)$, em que $k > 0, 0 < a_0 < 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Convidamos o leitor a investigar o que ocorre com esta sequência quando tomamos diferentes valores de k. Para mostrar como a mesma se comporta de forma totalmente diferente para valores relativamente próximos de k apresentamos a Figura 1, na qual, temos os 100 primeiros termos da sequência para $k = 3,35$ e $k = 3,8$, respectivamente, em que é possível notar a mudança de um comportamento relativamente previsível, para um totalmente imprevisível e caótico. O ponto aqui é o seguinte: pequenas modificações nas condições iniciais da sequência são capazes de gerar enormes mudanças em seu comportamento (torná-lo imprevisível), fato este que não é observado em sequencias como as progressões aritméticas e geométricas, por exemplo.

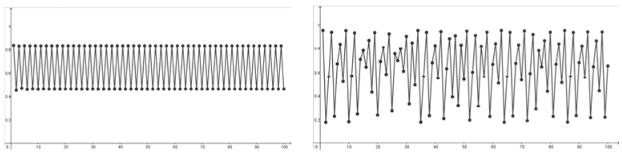


Figura 3: Sequência nos casos $k = 3,35$ e $k = 3,8$

E aí, o que achou desta sequência? Ficou curioso com o comportamento da mesma? Que tal dar mais um passo dentro deste interessante mundo? Dois ótimos guias podem ser a série de vídeos da vídeoteca dos Clubes de Matemática da OBMEP[4], ou o documentário "Alta ansiedade: A Matemática do Caos[5]", no quais você encontrará maiores explicações sobre conceitos básicos dos sistemas dinâmicos, efeito borboleta e teoria do caos. Se você quiser, também pode baixar o arquivo[6] GeoGebra que criamos, contendo a sequência que gerou a Figura 1 e experimentar o que acontece com a mesma para diferentes valores de k e a_0.

[1]Professor do Núcleo de Formação Docente da UFPE - CA, email: everton.ufpe@hotmail.com

[2]Nome que Platão e seus discípulos davam ao criador e ordenador do mundo, diferente de Deus, pura Inteligência.

[3]Para saber mais sobre a relação de Lorenz com a matemática do caos, ver: https://www.youtube.com/watch?v=C4eHJ8ZJgG4

[4]Para o primeiro vídeo da série, acesse: http://clubes.obmep.org.br/blog/video-038/

[5]Link para o vídeo no YouTube: https://www.youtube.com/watch?v=PCnxd9wX91c

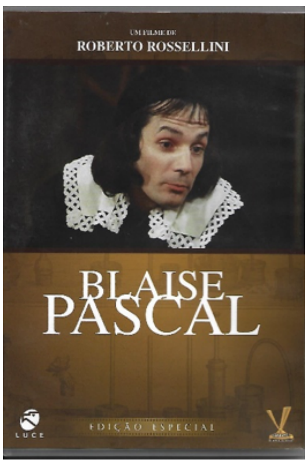
[6]Acesse o link: https://www.dropbox.com/s/8mpuleuvmcimd61/SequC3AAncia20logC3ADstica.ggb?dl=0

4. Indicações de Leituras/Filmes

Blaise Pascal

Por Severino Barros de Melo [7]

Dentre os mais importantes matemáticos do século XVII, não podemos deixar de citar o francês Blaise Pascal (1623-1662). Geralmente o único contato dos alunos do ensino médio com Pascal se dá por meio do célebre Triângulo Aritmético que leva seu nome, cujos elementos compõem os coeficientes da expansão binomial conhecida como Binômio de Newton. Mas a obra de Pascal não se resume a isso. Tudo o que ele produziu seria hoje considerado um trabalho de ponta pela sua visão interdisciplinar da ciência. Vejamos. Na matemática Pascal trabalhou fundamentalmente em três campos: geometria projetiva, Cálculo das probabilidades e o problema da cicloide. Na física fez estudos sobre o vácuo e repetiu nas montanhas da França a experiência da pressão atmosférica feita pelo italiano Evangelista Torriceli. Criou a primeira máquina de calcular e foi pioneiro na implantação de transportes coletivos em Paris. No campo da filosofia escreveu dentre outras obras Os Pensamentos, trabalho de reflexão que ainda hoje é de grande atualidade. Além disso, fez uma experiência religiosa de grande profundidade, buscando uma vida de autenticidade inspirada nos primeiros tempos do cristianismo. Portanto, uma grande bagagem como matemático, físico, filósofo e teólogo.



[7]Professor do Departamento de Educação da UFRPE

Navegando no youtube, eis que nos deparamos com um filme sobre Pascal, que sem dúvida merece indicação. O título da obra é Blaise Pascal, drama legendado em português e dirigido pelo Italiano Roberto Rossellini, sempre interessado em divulgar grandes filósofos da humanidade. Foi produzido em 1972 e tem a duração de 129 minutos. Na versão em DVD foi inserido o depoimento de Franklin Leopoldo e Silva, então professor de Filosofia da Universidade de São Paulo. Na apresentação do filme os divulgadores afirmam que “Rossellini acompanha a trajetória de Pascal dos 17 anos até a sua morte precoce, mostrando seus célebres estudos de Matemática e Geometria, incluindo a criação da primeira calculadora mecânica: seus trabalhos revolucionários sobre o vácuo, os fluidos e a pressão atmosférica; a relação com o Jansenismo e a concepção de suas principais obras filosófico-religiosas. Com austeridade, ternura e realismo, Rossellini realizou um filme de extrema beleza sobre os conflitos religiosos e filosóficos de um personagem histórico fascinante”. Portanto, vale à pena conferir!

5. Quem pergunta, quer saber!

No número 39 da Revista do Professor de Matemática (RPM), (1999, p.57) a redação escreve: "Com frequência a RPM recebe de seus leitores pedidos de esclarecimento sobre a solução da equação incompleta $x^2 - ax = 0$, com perguntas do tipo: o que está errado na solução abaixo?

$$x \cdot x = a \cdot x \tag{4}$$

$$x = \frac{ax}{x} = a\text{”}. \tag{5}$$

Resposta da RPM:

A passagem de (4) para (5) equivale a “cancelar” o x. Evidentemente, $x = a$ é a solução da equação, mas $x = 0$ também é solução e não é obtida pela resolução feita.

Acontece que, na passagem de (4) para (5), dividimos ambos os lados da igualdade por x, e ao fazermos isso, impomos $x \neq 0$, uma vez que não se define divisão por zero (ver RPM 1, pág.7); logo, com esse procedimento só obtemos soluções diferentes de zero.

Uma maneira correta de resolver é: $x \cdot (x - a) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = a$.

Já que o produto de dois números é zero se, e só se, pelo menos um deles é igual a zero. Esse procedimento fornece então as duas soluções $x = 0$ e $x = a$. É claro que se pode também utilizar a fórmula de resolução da equação do segundo grau, mas esse procedimento mecânico não traz nenhuma vantagem para o aprendizado.

6. Eventos

Devido a pandemia do coronavirus a agenda de eventos está suspensa, uma vez que a maioria dos eventos, se não todos, estão cancelados por tempo indeterminado.

7. Problemas

Para concluir deixamos para o leitor alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Problema 1 (OCM – 2019)**.** Os lados e a altura de um trapézio são expressos por números inteiros. Mostre que o perímetro do trapézio é par e sua área é inteira.

Problema 2. Um supermercado está promovendo a seguinte campanha de reciclagem de dois tipos de embalagens: latinhas de alumínio e garrafas pet vazias.

- Se uma pessoa entrega duas embalagens do mesmo tipo, ela recebe de volta uma latinha de alumínio cheia de suco.
- Se uma pessoa entrega duas embalagens de tipos diferentes, ela recebe de volta uma garrafa pet cheia de suco.

Se uma família conseguiu juntar 432 latinhas de alumínio e 341 garrafas pet vazias, efetuando somente sucessivas trocas nesse supermercado, ao final essa família ficará com uma latinha de alumínio ou com uma garrafa pet vazia?

Problema 3. O professor Edgar confeccionou três poliedros regulares semelhantes P_1, P_2 e P_3 de arestas a_1, a_2 e a_3, respectivamente, usando uma impressora 3D. Ele percebeu que a área que envolve P_3 é 16 vezes maior que a área de P_1 e que o volume de P_3 é 125 vezes maior o volume de P_2. Qual relação podemos estabelecer entre as medidas das arestas a_1, a_2 e a_3?

(a) $16a_1 = 125a_2 = a_3$

(b) $4a_1 = 25a_2 = a_3$

(c) $4a_1 = 5a_2 = a_3$

(d) $a_1 = 100a_2 = 1000a_3$

Mandem soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, sua solução deve ser enviada até **30/06/2020**.

8. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n.12, setembro de 2019**.

Problema 1. João tem l diamantes, e uma faixa infinita (em ambas as direções) de quadrados está desenhada no chão. Ele então distribui aleatoriamente estes diamantes sobre a faixa. E começa a fazer a seguinte brincadeira, se num determinado quadrado há dois diamantes é permitido pegá-los e passar um para o quadrado anterior e o outro para casa posterior. É possível voltar a configuração inicial após uma quantidade finita desses movimentos?

Solução. Enumeramos a faixa, com inteiros consecutivos, e denotaremos por n_i, o número marcado na casa ocupada pelo diamante i. Definimos a seguinte soma, X é a soma dos quadrados do número marcado na casa que a peça i ocupa. Isto é, $X = \sum_{i=1}^{l} n_i^2$. Observe agora que ao retirarmos da casa t dois diamantes, essa soma decresce, em $2t^2$, e ao passar um para a casa anterior e outro para a casa posterior, ela cresce em: $(t-1)^2+(t+1)^2 = 2t^2+2$. Portanto a nova soma é $X' = X+2$. Ou seja, a cada passo da brincadeira ampliamos a soma em duas unidades da soma da configuração inicial. Logo, como estamos sempre aumentado o valor, nunca podemos voltar a este valor inicial. $\square$

Problema 2 (OPM – 2005)**.** Mostre que não existe função injetiva $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com a propriedade de que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x^2) - [f(x)]^2 \geq \frac{1}{4}.$$

Solução. Fazendo $x = 0$ na expressão dada, teremos

$$\begin{aligned} f(0) - [f(0)]^2 &\geq \frac{1}{4} \\ 4[f(0)]^2 - 4f(0) + 1 &\leq 0 \\ (2f(0)-1)^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Concluímos então que

$$2f(0) - 1 = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2}.$$

Analogamente, fazendo $x = 1$

$$\begin{aligned} f(1) - [f(1)]^2 &\geq \frac{1}{4} \\ 4[f(1)]^2 - 4f(1) + 1 &\leq 0 \\ (2f(1)-1)^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Então

$$2f(1) - 1 = 0 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2}.$$

Como $f(0) = f(1)$ concluímos que f não pode ser injetiva. $\square$

Problema 3 (OBM- 2010-Nível 2)**.** Chamaremos de imagem de um número natural de dois algarismos o número que se obtém trocando a ordem de seus algarismos. Por exemplo, a imagem de 34 é 43. Quais são os números de dois algarismos que somados com sua imagem resultam em um quadrado perfeito?

Solução. A soma de um número de dois algarismos com a sua imagem é da forma $(10a+b)+(10b+a) = 11(a+b)$, onde a e b são algarismos. Se $11(a+b)$ é um quadrado perfeito, devemos ter outro fator 11 na soma $a+b$. Além disso, como a e b são menores que 10, concluímos que $a+b$ é um multiplo de 11 menor que 20 e maior que 0, ou seja, é igual a 11. Os a e b que verificam $a+b = 11$ são:
(2 e 9),(9 e 2),(3 e 8),(8 e 3),(4 e 7),(7 e 4),(5 e 6) e (6 e 5). $\square$