É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 13, volume 1, Dezembro de 2019
ISSN 2526-8651

Sumário

1. Artigo

"Este problema é impossível!"

André Costa
prof.andrecosta@recife.ifpe.edu.br
IFPE – Campus Recife
Recife, PE - 50.740-545

Introdução

Alguns belos e desafiadores problemas de geometria envolvem a determinação da medida de ângulos. São problemas que parecem fáceis à primeira vista, mas que nos tomam, por vezes, alguns belos dias de diversão. A maioria dos alunos nunca viu problemas realmente interessantes envolvendo ângulos. Esses problemas, mesmo para quem tem afinidade com Geometria, exigem uma certa mistura entre insistência e uso de técnicas. Para os iniciantes, é passada a impressão de serem "impossíveis".

Iniciaremos revisando parte da teoria que iremos utilizar na solução dos problemas apresentados. Em seguida, oferecemos a oportunidade do leitor se divertir com alguns desses belos problemas. Em seguida, daremos algumas dicas gerais resolvendo alguns dos problemas propostos e deixando esquemas de construção para os demais.

Uma breve revisão

Faremos uma breve revisão da teoria que utilizaremos no artigo. Para os belos detalhes teóricos recomendo o livro do João Lucas Barbosa [3].

Congruência de triângulos

Dois triângulos serão congruentes (termo utilizado em geometria para dizer que são iguais) se ocorrer um dos seguintes casos:
(**LLL**) – Eles possuírem os três lados congruentes.
(**LAL**) – eles possuírem dois lados e o ângulo formado por esses dois lados congruentes.
(**ALA**) – eles possuírem um lado e os ângulos ad-

jacentes a esse lado congruentes.

($\mathbf{LAA_o}$) – eles possuírem um lado, um ângulo adjacente a esse lado e o ângulo oposto a esse lado congruentes (observe que esse caso vem imediatamente do caso anterior).

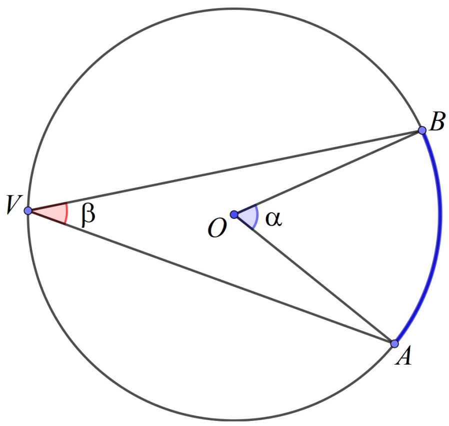
Semelhança de triângulos

Dois triângulos serão semelhantes (termo utilizado em geometria para dizer que um pode ser obtido do outro por uma ampliação ou redução, mantendo o formato original) se ocorrer um dos seguintes casos:

(**LLL**) – Eles possuírem os três lados proporcionais.
(**AA**) – Eles possuírem dois ângulos congruentes.
(**LAL**) – Eles possuírem dois lados proporcionais e o ângulo formado por esses lados congruentes.

Arco Capaz

O conceito de *Arco Capaz* se baseia no resultado teórico sobre ângulos inscritos na circunferência. Os ângulos inscritos são aqueles que possuem vértice sobre a circunferência, $\widehat{\mathrm{V}}$.

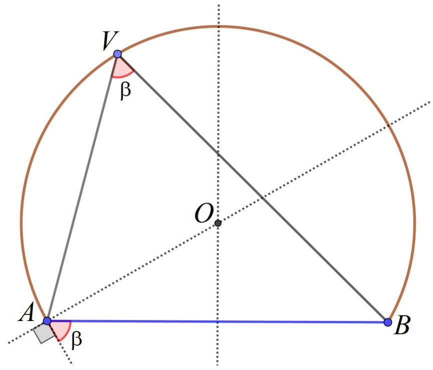


Ângulo inscrito.

Há uma proposição que afirma ser a medida do ângulo inscrito, β, a metade da medida do arco que ele delimita sobre a circunferência, $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$, ou metade do ângulo central (cujo vértice se encontra no centro da circunferência) que delimita o mesmo arco, α. Ou seja,

$$\beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}{2}.$$

Com isso, o que chamamos de *arco capaz de β sobre o segmento AB* é o arco de extremidades A e B de uma circunferência, na qual AB é uma corda e todos os ângulos inscritos neste arco meçam β.

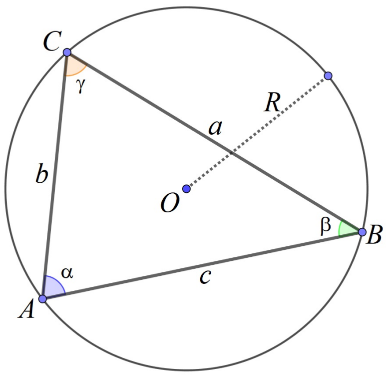


Construção do arco capaz de β sobre AB.

Lei dos senos e do cosseno

Em um triângulo qualquer $\triangle ABC$, cujos lados medem $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, respectivamente opostos aos ângulos de medida $\widehat{\mathrm{A}} = \alpha$, $\widehat{\mathrm{B}} = \beta$ e $\widehat{\mathrm{C}} = \gamma$, inscrito em uma circunferência cujo raio mede R, temos a conhecida *Lei dos Senos*,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R.$$



Lei dos senos e cosseno.

Neste mesmo triângulo $\triangle ABC$ descrito acima, temos o resultado conhecido como a *Lei do Cosseno*,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

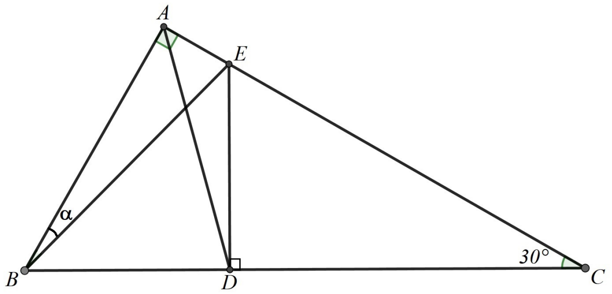
Agora podemos iniciar a diversão!

Os "impossíveis"!

Os problemas seguintes foram coletados de várias fontes, procurando varrer diversas técnicas de resolução.

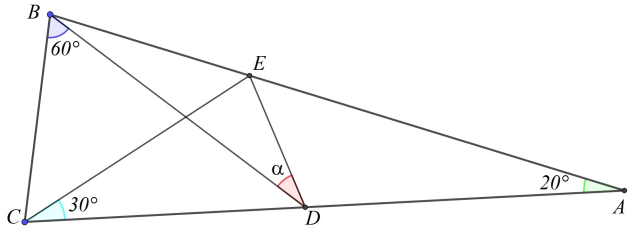
Tentem determinar o ângulo α nos problemas seguintes (achar β no **3**), eles não estão em ordem de dificuldade.

1. AD é bissetriz de $\widehat{\mathrm{A}}$.



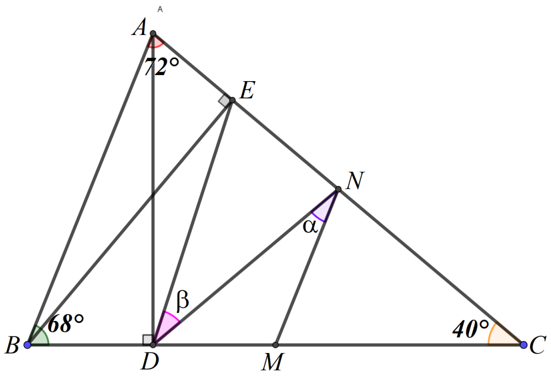
Problema 1: UFMG/96.

2. (Triângulo Russo ou de Lidskii, ou Problema de Langley) Considere: $\overline{AB} = \overline{AC}$.



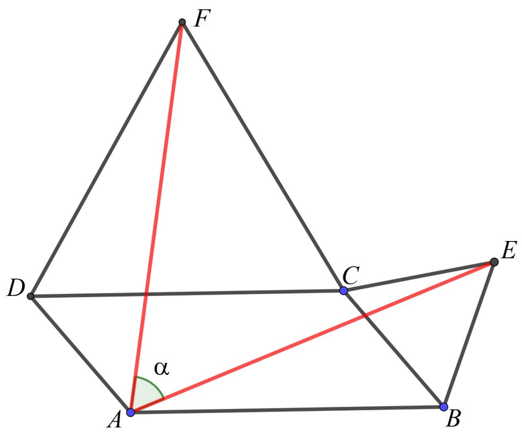
Problema 2: UFPE-UFRPE/98.

3. N e M são pontos médios de AC e BC. $\widehat{\mathrm{A}} = 72°$, $\widehat{\mathrm{B}} = 68°$, $\widehat{\mathrm{C}} = 40°$.



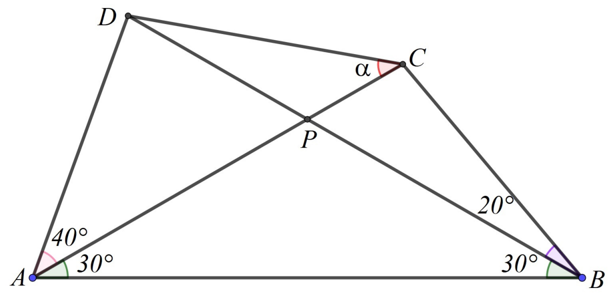
Problema 3: Avaliação Geo.1 - ProfMat/11.

4. Considere: $ABCD$ paralelogramo, $\triangle BCE$ e $\triangle CDF$ equiláteros.



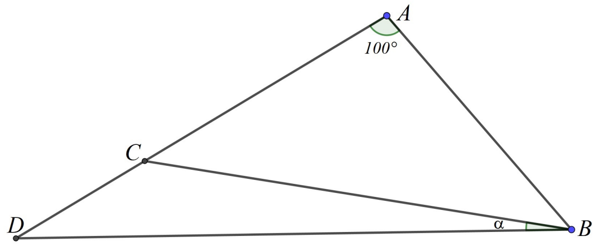
Problema 4: Avaliação Geo.1 - ProfMat/11.

5. (Postagem no grupo de professores de Matemática no Facebook)



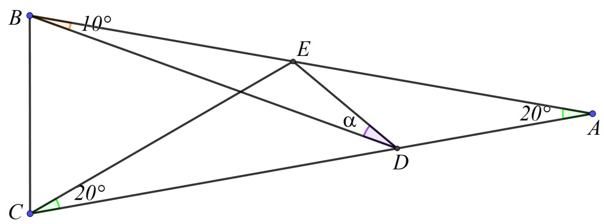
Problema 5: Grupo do Facebook.

6. Considere: $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$.



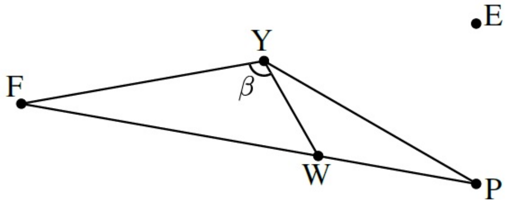
Problema 6: lista do prof. Adriano Regis.

7. Considere: $\overline{AC} = \overline{AB}$, $\widehat{\mathrm{ABD}} = 10°$ e $\widehat{\mathrm{ACE}} = 20°$.



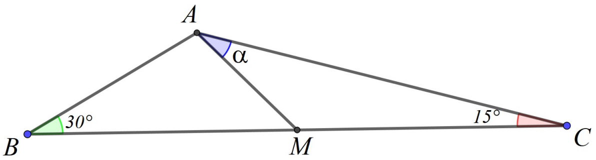
Problema 7: Lista do prof. Adriano Regis.

8. (OPEMAT/19 - N3) Dois feixes de luz são lançados do ponto F na figura abaixo em direção aos pontos E e P que estão à mesma distância do ponto F. No caminho do feixe que sai de F na direção de E, é colocado um espelho num ponto Y para desviar o feixe em direção ao ponto W no feixe FP. Porém, o feixe refletiu em direção ao ponto P. Sabe-se que o ângulo $\widehat{\mathrm{FYP}}$ mede 140°, que a medida do segmento EP é igual a medida do segmento WP, que o triângulo $\triangle FYP$ é isósceles e que ao rotacionar um pouco o espelho mantendo o ponto Y fixo conseguiu-se um feixe incidente em W. Sendo β o ângulo entre o feixe incidente em Y e o feixe refletido que passa por W, determine β.



Problema 8: OPEMAT/19 - N3.

9. (Clubes de Matemática da OBMEP) Considere M ponto médio de BC.



Problema 9: Problemão do Clube OBMEP.

“O difícil resolvemos na hora, o impossível demora um pouquinho mais!”

A primeira coisa que temos que ter na resolução de qualquer problema é a perseverança. Ter consciência que a solução pode demorar e que, em geometria, especialmente quando há construções envolvidas, caminhos errados são usuais.

Geralmente a solução desses tipos de problemas envolve a aplicação de alguma das dicas a seguir.

i. Procurar triângulos congruentes e caso não existam construí-los.

ii. Construir triângulos isósceles ou equilátero, o que geralmente ajuda no item *i*.

iii. Apelar para as *lei dos senos* e *lei dos cossenos*.

iv. Aplicar o conceito de *arco capaz*, geralmente o de 90°.

v. Recomeçar sempre que achar que o problema não está evoluindo pela abordagem atual.

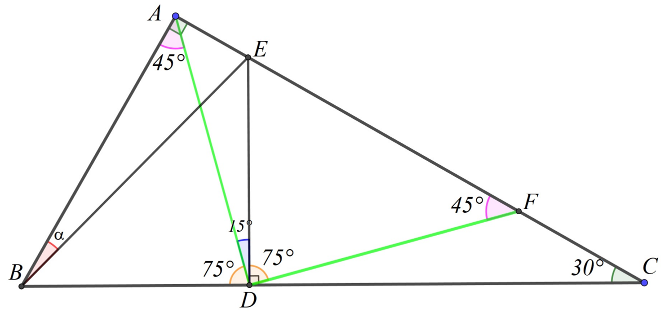
Soluções e ideias

Na escrita das soluções, os procedimentos foram colocados de modo direto e objetivo. Refaça a figura do problema original e siga cada etapa na sua figura. De todo modo, as construções são feitas na figura localizada no final dos passos da solução. Os detalhes das soluções foram deixados para o leitor.

Como treinamento, o leitor pode partir do problema original e utilizar cada passo da solução como uma dica para chegar na resposta.

Solução do 1. Construção de triângulos congruentes.

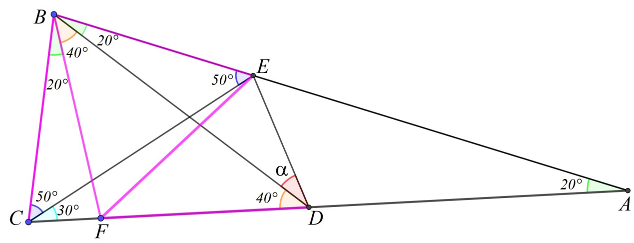
- Trace DF de modo que $\widehat{\mathrm{EDF}} = 75°$.
- $\overline{DF} = \overline{DA}$, pois $\triangle ADF$ é isósceles.
- $\triangle DFE \equiv \triangle DAB$ (congruência caso ALA), logo $\overline{DE} = \overline{DB}$.
- $\triangle BDE$ é retângulo e isósceles logo, $\widehat{\mathrm{EBD}} = 45°$, portanto $\alpha = 60° - 45° = 15°$.



1: construção de triângulos congruentes.

Solução do 2. Construção de triângulos isósceles e equilátero.

- Trace BF com $\widehat{\mathrm{CBF}} = 20°$.
- $\triangle CBE$ e $\triangle CBF$ são isósceles, com $\overline{BE} = \overline{BC} = \overline{BF}$.
- $\triangle BFE$ é equilátero.
- $\triangle BFD$ é isósceles.
- $\triangle EFD$ é isósceles, com $\widehat{\mathrm{F}} = 40°$. Logo, $\widehat{\mathrm{E}} = \widehat{\mathrm{D}} = 70°$, com $\alpha = 30°$.



2: construção de triângulos isósceles e equilátero.

Solução do 3. Utilizaremos o conceito de arco capaz.

Determinando α.

- $\triangle ABC \sim \triangle NMC$ (caso de semelhança LAL), logo $\widehat{\mathrm{MNC}} = \widehat{\mathrm{A}} = 72°$.

- Trace ND. Observe que $\overline{ND} = \overline{NA} = \overline{NC}$, medida do raio do arco capaz de 90° sobre AC.

- $\triangle NDC$ é isósceles, logo $\widehat{\mathrm{D}} = 40°$ e $\widehat{\mathrm{DNA}} = 80°$ (ângulo externo).

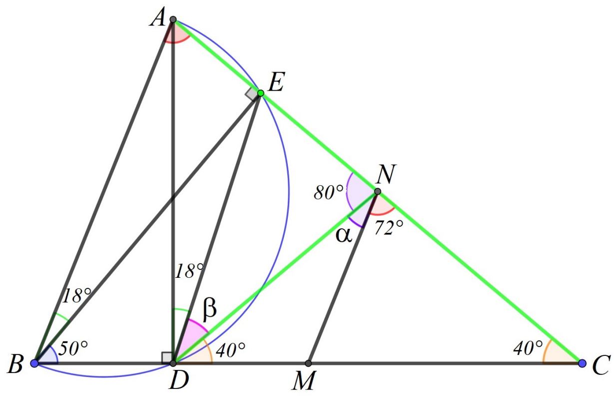
- Logo, $\alpha + 72° + 80° = 180° \;\therefore\; \alpha = 28°$.

Determinando β.

- E e D estão no arco capaz de 90° sobre AB.

- $\widehat{\mathrm{ABE}} = \widehat{\mathrm{ADE}} = 18°$, ângulos inscritos determinando um mesmo arco, $\overset{\frown}{\mathrm{AE}}$.

- Como $\widehat{\mathrm{ADC}} = 18° + \beta + 40° = 90°$, temos $\beta = 32°$.

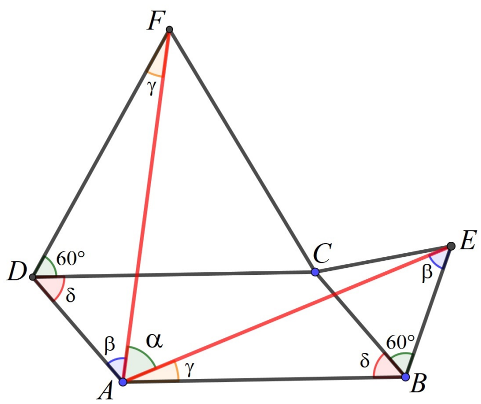


3: uso do arco capaz.

Solução do 4. Congruência de triângulos.

- $\triangle ABE \equiv \triangle FDA$ (caso LAL).

- $\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}} = 180°$ (no paralelogramo $ABCD$) e $\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\mathrm{E}} = 180°$ (no $\triangle ABE$), logo $(\beta + \alpha + \gamma) + \delta = \gamma + (\delta + 60°) + \beta \therefore \alpha = 60°$.



4: congruência de triângulos.

Solução do 5. Utilizando Trigonometria. (Gabriel de Oliveira e Silva - aluno do IFPE-Recife)

- Tome $\overline{AP} = \overline{BP} = \operatorname{sen} 80°$.

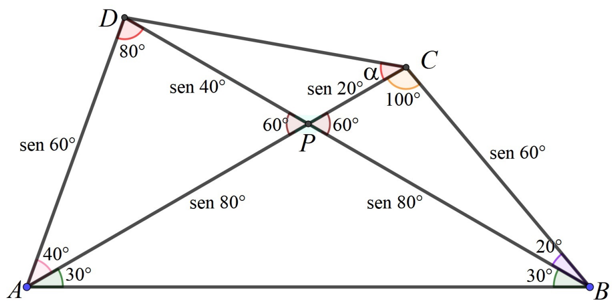
- Aplicando a *lei dos senos* em $\triangle APD$ e $\triangle BPC$ ficamos com:
  $\overline{PC} = \operatorname{sen} 20°$, $\overline{CB} = \operatorname{sen} 60°$,
  $\overline{AD} = \operatorname{sen} 60°$ e $\overline{DP} = \operatorname{sen} 40°$.

- *Lei do senos* em $\triangle ABC$ nos dá:
  $\overline{AC} = \sqrt{3}.\operatorname{sen} 50°$. (Também poderia ser obtido utilizando transformação, $\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2.\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$, observando que $\overline{AC} = \overline{AP} + \overline{PC} = \operatorname{sen} 80° + \operatorname{sen} 20° = 2.\operatorname{sen} 50°.\cos 30°$).

- *Lei do cossenos* em $\triangle ADC$,

$$\begin{aligned}
\overline{CD}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2.\overline{AD}.\overline{AC}.\cos 40° \\
\overline{CD}^2 &= \operatorname{sen}^2 60° + (\sqrt{3}\operatorname{sen} 50°)^2 \\
&\quad -2.\operatorname{sen} 60°.\sqrt{3}.\operatorname{sen} 50°.\cos 40° \\
\overline{CD}^2 &= \operatorname{sen}^2 60° + 3\operatorname{sen}^2 50° \\
&\qquad -2.\tfrac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}.\operatorname{sen} 50°.\cos 40° \\
\overline{CD}^2 &= \operatorname{sen}^2 60° \;\therefore\; \overline{CD} = \operatorname{sen} 60°.
\end{aligned}$$

- $\triangle ADC$ isósceles, logo $\alpha = 40°$.



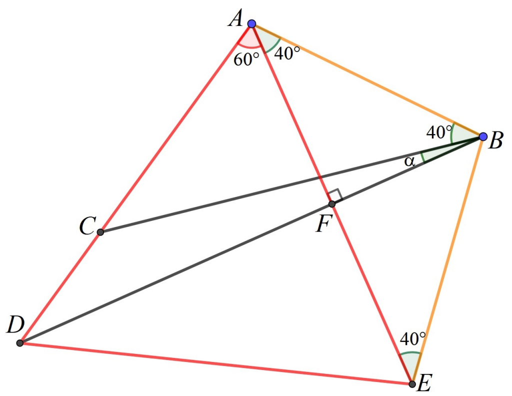
5: Lei dos senos e cossenos.

Para os problemas **6** e **7** colocaremos duas construções de solução, sem a descrição dos procedimentos, os quais ficarão a cargo do leitor. Como dica adicional, nas construções, os pontos são nomeados alfabeticamente seguindo a ordem da construção. Segmentos de mesma medida estão colocados da mesma cor.

Já para os problemas **8** e **9**, indicamos o link para a solução. Em ambos casos o leitor encontra nos *sites* muito material para estudo olímpico.

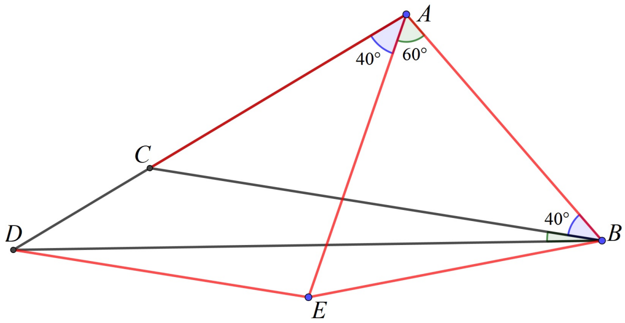
Esboço da solução do 6. Construção de um triângulo equilátero.

Modo 1 (Davi Nilson - ex-aluno do IFPE-Recife e aluno do Bacharelado no DMat/UFPE)



6: Construção de equilátero.

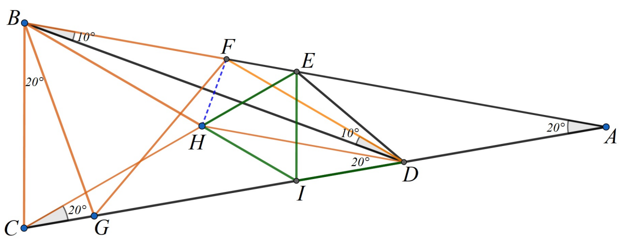
Modo 2



6: Construção de equilátero.

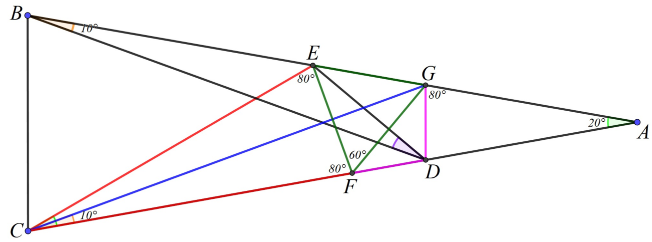
Esboço da solução do 7. Construção de triângulos isósceles e equiláteros.

Modo 1



7: Construção de isósceles e equiláteros.

Modo 2 (Pedro Henrique Sales Vital - aluno do IFPE-Recife)



7: Construção de isósceles e equiláteros.

Encaminhamento das Soluções do 8 e 9. A solução do problema **8** pode ser encontrada no site da OPEMAT, [6], prova de 2019 nível 3. A solução do problema 9, encontra-se no site dos Clubes de Matemática da OBMEP, [7].

E agora...

Espero que esse artigo seja uma porta para a procura de outros problemas envolvendo ângulos. Ficaria grato se o leitor me enviasse problemas interessantes que venha descobrir (e-mail acima). Infelizmente esse tópico foi desprezado no material original das apostilas da OBMEP (as quais podem ser encontradas no mesmo link de [4]). O leitor pode encontrar problemas semelhantes em [5].

Agradeço aos meus queridos alunos do grupo de estudo da OBMEP no IFPE-Recife que sempre se dispõem a trocar ideias sobre problemas impossíveis, ao prof. Pedro Alvino pela leitura e comentários e, especialmente, as sugestões do Comitê Editorial.

Referências

[1] Morgado, A.C.; Wagner, E.; Jorge, M.; *Geometria I*; Editora VestSeller, 4ª edição, Fortaleza, 2008.

[2] Morgado, A.C.; Wagner, E.; Jorge, M.; *Geometria II*; Editora VestSeller, 2ª edição, Fortaleza, 2008.

[3] Barbosa, J.L.; *Geometria Euclidiana Plana*; SBM, 10ª edição, Rio de Janeiro, 2006.

[4] Wagner, E.; *Uma Introdução às Construções Geométricas*; Apostila 8 do PIC-OBMEP, Rio de Janeiro, IMPA, 2016. (pode ser acessada em: http://www.obmep.org.br/apostilas.htm)

[5] Posamentier, A.; Salkind,C.; *Challenging Problems in Geometry*; Dover, New York, 1996.

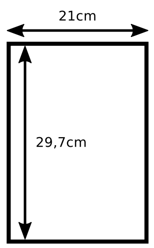
[6] *Prova da OPEMAT 2019, nível 3*, org. DM/UFRPE. (pode ser acessada em: http://www.opemat.com.br).

[7] *Problemão: ângulo x*, org. OBMEP. (pode ser acessada em: http://clubes.obmep.org.br/blog/problemao-angulo-texx-tex/).

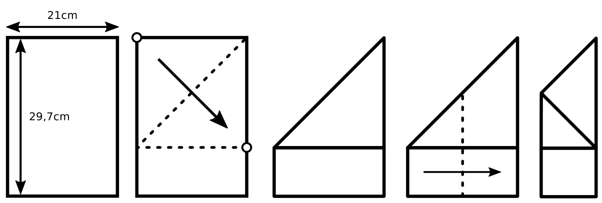
2. Soluções de Olimpíadas

Nesta edição apresentaremos a resolução de três questões discursivas da prova da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2019 referentes ao nível 1.

Questão 1. Uma folha de papel de tamanho A4, como esta que você está fazendo a prova, possui as seguintes dimensões:



Faremos as seguintes dobraduras nesta folha, conforme a figura abaixo, da esquerda para a direita:



Determine a área da última figura formada em cm^2.

Solução: A folha de A4 tem um formato retangular. Ao fazer a dobradura indicada na segunda figura, obtemos um trapézio retângulo (dado pela terceira figura) cuja base menor mede $b = 29,7 - 21 = 8,7$ cm, base maior igual a $B = 29,7$ cm e altura medindo $h = 21$ cm. A dobradura indicada pela quarta figura consiste basicamente em dobrar o papel ao meio, de modo a formarmos um novo trapézio, cuja base menor é igual a base média do trapézio anterior, ou seja, $\tilde{b} = \dfrac{b+B}{2} = \dfrac{8,7+29,7}{2} = 19,2$ cm. Além disso, a altura desse novo trapézio, é a metade da altura do trapézio anterior, $\tilde{h} = \dfrac{h}{2} = \dfrac{21}{2} = 10,5$ cm, e por fim, a base maior permanece inalterada $\tilde{B} = B$. Portanto, a área A do trapézio na última figura é igual a

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{(\tilde{b}+\tilde{B})\cdot\tilde{h}}{2} \\ &= \frac{(19,2+29,7)\cdot 10,5}{2} = 256,725 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

□

Questão 2. O $\pi-$raia joga futebol com seus amigos todos os sábados. Porém, no dia 2 de outubro de 2019, o jogo foi cancelado devido à comemoração do dia das crianças. Curiosos com a coincidência, π-raia e seus amigos observaram o seguinte:

1. De quatro em quatro anos ocorrem anos bissextos;

2. Anos bissextos possuem 366 dias (uma vez que possuem um dia a mais: 29 de fevereiro);

3. 2020 é ano bissexto.

Ajude o π-raia a descobrir quais serão os três próximos anos em que o futebol será cancelado por ser dia das crianças.

Solução: Sabemos que 12 de outubro de 2019 ocorre em um sábado. A ideia básica é que a cada sete dias voltamos para o mesmo dia da semana. 2020 é ano bissexto, então o próximo dia das crianças ocorre 366 dias depois. Uma vez que o resto de 366 na divisão por 7 é 2, o próximo dia das crianças ocorre numa segunda. Como o ano de 2021 não é bissexto e 365 deixa resto 1 na divisão por 7, o dia das crianças de 2021 ocorre em uma terça. Repetindo esse argumento para os anos 2022, 2023 e 2024, obtemos que o dia das crianças ocorre a próxima vez em um sábado em 2024. Os outros dois anos são 2030, 2041. □

Questão 3. Dafne e Letícia colecionam figurinhas numeradas. Atualmente as coleções de Dafne e de Letícia são compostas por 250 e 200 figurinhas, respectivamente. Além disso, ambas as coleções não possuem figuras repetidas. Dispondo as coleções de Dafne e de Letícia em ordem crescente com respeito às numerações das figurinhas foi observado que:

- A primeira figurinha da coleção de Dafne é a de número 6;
- A primeira figurinha da coleção de Letícia é a de número 10;
- Na coleção de Dafne, a numeração de cada figura é a soma da numeração da figura que a antecede com o número 5;
- Na coleção de Letícia, a numeração de cada figura é a soma da numeração da figura que a antecede com o número 6.

As coleções possuem figurinhas em comum? Em caso de resposta positiva determine quantas e qual o maior número da figura que está nas duas coleções.

Solução: Sejam $(D_1, D_2, \ldots, D_{250})$ e $(L_1, L_2, \ldots, L_{200})$ as coleções de Dafne e Letícia já posicionadas em ordem crescente com respeito a numeração das figurinhas, respectivamente. Assim,

$$D_1 = 6,\ D_2 = 6+5 = 11,\ D_3 = 6+2\cdot 5 = 16, \ldots$$

$$L_1 = 10,\ L_2 = 10+6 = 16,\ L_3 = 10+2\cdot 6 = 22, \ldots$$

É fácil ver que a figurinha de número 16 está presente nas duas coleções.

Observe que as coleções de figurinhas formam sequências com os seguintes termos gerais:

$$D_m = D_1 + 5\cdot(m-1);\ \text{para todo } m \in \{1, 2, \ldots, 250\}$$

e

$$L_n = L_1 + 6\cdot(n-1);\ \text{para todo } n \in \{1, 2, \ldots, 200\},$$

respectivamente.

As figurinhas que estão nas duas coleções simultaneamente possuem a mesma numeração. Ou seja, $D_m = L_n$ para algum $m \in \{1, 2, \ldots, 250\}$ e algum $n \in \{1, 2, \ldots, 200\}$.

Então,

$$\begin{aligned} D_m &= L_n \\ D_1 + 5\cdot(m-1) &= L_1 + 6\cdot(n-1) \\ 6 + 5\cdot(m-1) &= 10 + 6\cdot(n-1) \\ 1 + 5\cdot m &= 4 + 6\cdot n \\ 5m &= 3 + 6n. \end{aligned}$$

Agora, observe que $3 + 6\cdot n$ é múltiplo de 5 se, e somente se, $n = 2 + 5\cdot k$, com $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Como o maior valor de n é 200, o máximo que k pode atingir é 39.

Portanto, como $k \geq 0$, temos 40 pares de figurinhas em comum.

Como o maior k é 39, a posição da figurinha da coleção de Letícia é $n = 197$.

O que corresponde à figurinha de valor $L_{197} = 10 + 6\cdot(197-1) = 1186$.

□

3. Curiosidades

Espaço Ciência, 25 anos de divulgação científica

Por Fabiana Coelho [1]

O Espaço Ciência completou, em 2019, 25 anos. O Museu Interativo de Ciência é uma das grandes riquezas de Pernambuco. Vinculado à Secretaria de Ciência, Tecnologia e Inovação do Estado, recebe uma média de 120 mil visitantes por ano. As centenas de experimentos e exposições se estendem em uma área de 120 mil metros, cortada por um manguezal de rara beleza. "Há poucos museus de Ciência como ele no mundo. É um dos únicos que é Museu e Parque ao mesmo tempo, com experimentos a céu aberto e áreas de contemplação e obser-

[1] Acessora de impressa do espaço ciência

vação da natureza", opina o físico, Sérgio Rezende, ex-ministro e ex-secretário de Ciência e Tecnologia.

Um dos diferenciais do Espaço Ciência é seu ecossistema. O Manguezal Chico Science atrai pesquisadores e é objeto de estudos e pesquisas. Análises químicas das águas; diagnóstico ambiental; mutirões de limpeza; observação de aves... estes são alguns exemplos das atividades que são feitas constantemente, com participação dos visitantes. Além disso, o local é equipado com um barco, movido à energia solar. Assim, é possível desfrutar de um passeio e conhecer um pouco mais sobre este ecossistema. A ação do Espaço Ciência não se limita à sua sede. Seus programas itinerantes Ciência Móvel e Caravana Notáveis Cientistas de Pernambuco já percorreram 146 municípios do estado, levando experimentos divertidos e interativos e despertando o interesse pelo conhecimento científico.

O Museu coordena ainda o Observatório Astronômico da Sé. O local abriga exposições didáticas e tem monitores treinados que orientam a visita, guiam telescópios para as observações do céu e executam atividades didáticas. Também participa ativamente de eventos mundiais de popularização da Astronomia.

Durante estes 25 anos, o Espaço Ciência também vem deixando forte contribuição no ensino de Ciências do estado, com ações de inovação pedagógica e formação de professores. É ele, por exemplo, que coordena a CIÊNCIA JOVEM, uma das maiores Feiras de Ciências do país, que tem a mesma idade que o Museu e hoje recebe projetos de todos os estados do Brasil e de alguns outros países. A preocupação com a inclusão social sempre esteve presente na história do Espaço Ciência. Atualmente, três projetos sociais são desenvolvidos, sobretudo com as comunidades do entorno do Museu: o CLICIDADÃO, para inclusão digital; o JARDIM DA CIÊNCIA, voltado para a área de jardinagem e paisagismo; e o GEPETTO, Ateliê de confecção de jogos e brinquedos pedagógicos. Para realização de todas estas ações, bem como para garantir a renovação constante de suas exposições e acervo, o Espaço Ciência conta com a parceria de diversas instituições: universidades, escolas técnicas, instituições de ensino, centros de pesquisa, além de órgãos públicos e empresas privadas.

“Ter conhecimento de Ciência e Tecnologia é uma condição essencial para o exercício da cidadania. Nós queremos, sim, estimular a formação de cientistas, mas sobretudo queremos formar cidadãos aptos a responder as questões que a sociedade frequentemente nos coloca”, afirma o diretor do Espaço Ciência, Antonio Carlos Pavão.

VISITE O MUSEU - O Espaço Ciência é gratuito e funciona de segunda a sexta, de 8h às 12h e de 13h às 17h; e nos finais de semana, de 13:30h às 17h. Grupos de mais de dez pessoas devem agendar a visita pelo site: www.espacociencia.pe.gov.br. São duas trilhas disponíveis: a Trilha Ecológica, que inclui o passeio pelo Manguezal; e a Trilha da Descoberta, que é dividida em cinco áreas: Água, Movimento, Percepção, Terra e Espaço - cada uma delas com dezenas de experimentos interativos. Possui ainda um Pavilhão, com atrações na área de Física e Matemática; e uma área com mostras temporárias, que atualmente abriga as seguintes exposições: “Minha Casa tem Ciência?”; “Aedes, que mosquito é esse?”; “História Química da Humanidade?; e “(R)evolução dos Bichos”.

Mais informações, acesse: www.espacociencia.pe.gov.br.

4. Indicações de Leituras/Filmes

Quebrando a Banca

Por Hellen Souza [2]

O filme Quebrando a Banca, 2008, narra a história de Ben Campel, um garoto que dedicou toda sua vida aos estudos e tinha o objetivo entrar em uma das melhores faculdades do mundo - Harvard. Contudo, mesmo com todo seu esforço e dedicação

[2]Licencianda de Matemática da UFRPE

a bolsa fora negada e ele precisaria custear os estudos. Ben era estudante no M.I.T. (Instituto de Tecnologia do Massachusetts), onde era um aluno brilhante, mesmo sendo muito tímido. Seu talento logo chamou a atenção do seu professor de Matemática, Micky Rosa, que lhe fez um convite um tanto quanto inusitado: juntar-se a uma equipe formada pelos alunos mais inteligentes da escola e seguir rumo a Las Vegas aos finais de semana, a fim de usar suas habilidades matemáticas para ganhar muito dinheiro de um modo pouco lícito nos cassinos: contando cartas do jogo de 21. O grupo criou diversos códigos matemáticos e um sistema de sinais para se comunicarem e também contar as cartas, aumentando assim suas chances de êxito. O ocorrido na década e 80 virou lenda dos Estados Unidos e ganhou as páginas do jornal "*The New York Times*", além de ter inspirado a criação do livro "*Bringing Down the House*" de Bem Mezrich. Quebrando a Banca é um filme leve, cheio de reviravoltas, alguns momentos de tensão e personagens interessantes e é possível assisti-lo acessando o catálogo da Netflix ou no Google Play e Youtube, através de aluguel. O filme faz referência a assuntos da lógica clássica, como o paradoxo de Monthy Hall, e também a temas da análise real, como: Sequência de Cauchy. Além de mostrar a matemática básica aplicada de uma forma um tanto quanto fora do comum, como nos cassinos de Las Vegas.

5. Quem pergunta, quer saber!

No número 24 (2º semestre de 1993) da Revista do Professor de Matemática (RPM) um leitor pergunta se na resolução do problema "Ache a razão entre as áreas totais de dois cubos tais que a aresta de um é a diagonal do outro", é correto dar um valor, por exemplo, $a = 2$ para a aresta do menor e calcular a razão neste caso?

Resposta da RPM:

Antes de verificar se o procedimento indicado é correto ou não, lembramos que é sempre uma boa tática atribuir valores particulares as variáveis de um problema quando não vislumbramos, de pronto, uma solução geral. Ou seja, correto é, só não é completo! Tendo estudado um caso particular será preciso ainda estudar o caso geral, ou verificar se a solução do caso particular responde também ao caso geral, como se dá no problema acima enunciado. Senão vejamos:

Sendo 2 a aresta do cubo menor, a sua diagonal será $2\sqrt{3}$ que é também a aresta do cubo maior. As respectivas áreas totais serão, então, $6 \times 4 = 24$ e $6 \times 12 = 72$, e, finalmente, sua razão é igual a $\frac{24}{72} = \frac{1}{3}$.

O que se verifica neste caso é entretanto:

A atribuição de um valor particular para a medida da aresta não facilitou o raciocínio geométrico; só evitou o cálculo com letras. A solução direta, no caso geral, seria calcular a área total s do cubo menor de aresta a e a área total S do cubo maior de aresta $d = a\sqrt{3}$. Donde $\frac{s}{S} = \frac{6a^2}{6d^2} = \frac{6a^2}{6 \cdot 3a^2} = \frac{1}{3}$. (Usamos as mesmas ferramentas geométricas do caso $a = 2$ e chegamos ao mesmo resultado; a complicação maior ficou só por conta da manipulação algébrica).

O cálculo no caso geral mostra que o resultado numérico obtido para $a = 2$ não dependeu do valor escolhido para a aresta, o que não estava evidente antes.

Nada foi dito sobre unidade, de modo que, ao invés de tomar $a = 2$, poderíamos ter tomado a aresta do cubo menor como unidade e termos feito os cálculos com $a = 1$. O resultado, como quociente de áreas, será um número puro, independendo da unidade e, portanto, do particular valor da aresta de partida.

A última observação fica por conta do fato de que, sendo 6 as faces de cada um dos cubos, todas com mesma área, o cálculo das razões entre as áreas pode ser simplificado, bastando calcular a razão entre as áreas de uma das faces dos cubos.

6. Eventos

Vários eventos acontecerão ainda este ano e no próximo visando uma maior divulgação da matemática.

Fiquem Ligados!!!

- **1° Colóquio Alagoano de Educação Matemática nos Anos Inicias**
  - Local: Faculdade de Tecnologia de Alagoas/Maceió - AL
  - Data: 04 a 06 de Dezembro de 2019
  - Mais informações: https://doity.com.br/1-coloquio-alagoano-de-educacao-matematica-nos-anos-iniciais
- **XLIX do Programa de Verão do IME-USP**
  - Local: Instituto de Matemática e Estatística da USP-SP
  - Data: 6 de Janeiro a 14 de Fevereiro de 2020
  - Mais informações: https://www.ime.usp.br/~verao/index.php
- **Programa de Verão em Matemática 2020 do IMECC-UNICAMP**
  - Local: IMECC- Universidade Estadual de Campinas-SP
  - Data: 06 de Janeiro a 18 de Fevereiro de 2020
  - Mais informações: https://www.ime.unicamp.br/pos-graduacao/matematica/cursos-verao
- **Programa de Verão 2020 UFPE**
  - Local: Universidade Federal de Pernambuco-PE
  - Data: 06 de Janeiro a 28 de Fevereiro
  - Mais informações: https://www.ufpe.br/pgdmat
- **A panorama on Singularities: Algebra, Geometry, Topology and Applications**
  - Local: IMPA, Rio de Janeiro
  - Data: 5 a 11 de Janeiro de 2020
  - Mais informações: https://impa.br/en_US/eventos-do-impa/2020-2/a-panorama-on-singularities/
- **Escola de Verão do DM -UFPB**
  - Local: Universidade Federal da Paraíba, Paraíba
  - Data: 06 de Janeiro a 2 de Abril de 2020
  - Mais informações: http://www.mat.ufpb.br/verao/inscricao.html
- **Programa de Verão em Matemática Pura e Aplicada da UFRGS**
  - Local: Universidade Federal do Rio Grande do Sul
  - Data: 06 de janeiro a 21 de fevereiro de 2020
  - Mais informações: http://www.ufrgs.br/ppgmap/programaverao/2020

7. Problemas

Para concluir deixamos para o leitor alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Problema 1 (OBMEP-2019- Nível 3)**.** As amigas Ana, Beatriz, Cláudia e Diana têm uma bola cada uma. Quando toca um sinal, cada menina escolhe, ao acaso, uma de suas três amigas para jogar sua bola. Qual a probabilidade de que Ana receba três bolas?

Problema 2 (Japão 1991)**.** Dada um sequência com 16 dígitos, mostre que existe uma subsequência, com um algarismo ou mais, tal que o produto desses dígitos é um quadrado perfeito.

Problema 3 (XXXVII OCM – Nível 2)**.** Seja n um número natural

(a) Mostre que $8^n - 1$ é multiplo de 7

(b) Encontre todos os valores de n para os quais $\frac{8^n-1}{7}$ é primo.

Mandem soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, sua solução deve ser enviada até **08/03/2020**.

---

8. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n.11, junho de 2019**.

Problema 1 (IMO-2015)**.** Determine todos os inteiros positivos M para os quais a seqüência a_0,a_1,a_2... definida por $a_0 = \frac{2M+1}{2}$ e $a_{k+1} = a_k\lfloor a_k \rfloor$ para k= 1,2,..., contendo pelo menos um termo inteiro.

Solução. Defina $b_k = 2a_k$ para todo $k \geq 0$.Então

$$b_{k+1} = 2a_{k+1} = 2a_k\lfloor a_k \rfloor = b_k\lfloor \frac{b_k}{2} \rfloor$$

Como b_0 é inteiro, segue que b_k é um inteiro para todo $k \geq 0$.

Suponha que a sequência a_0, a_1,a_2 não contém nenhum termo inteiro. Então b_k deve ser um inteiro ímpar para todo $k \geq 0$, de modo que

$$b_{k+1} = b_k\lfloor \frac{b_k}{2} \rfloor = \frac{b_k(b_k-1)}{2} \qquad (1)$$

Consequentemente

$$b_{k+1}-3 = \frac{b_k(b_k-1)}{2}-3 = \frac{(b_k-3)(b_k+2)}{2} \qquad (2)$$

para todo $k \geq 0$.

Suponha $b_0 - 3 > 0$. Então a equação (2) produz $b_k - 3 > 0$ para todo $k \geq 0$. Para cada $k \geq 0$, defina c_k como a maior potência de 2 que divide $b_k - 3$. Desde que $b_k - 3$ é o mesmo para todo $k \geq 0$, o número c_k é positivo para todo $k \geq 0$.

Note que $b_k + 2$ é um número ímpar. Portanto pela equação (2), temos $c_{k+1} = c_k - 1$. Assim, a sequência c_0, c_1, c_2,..., de inteiros positivos é estritamente decrescente, uma contradição. Assim, $b_0 - 3 \leq 0$ que implica que $M = 1$.

Para M=1, podemos verificar que a sequência é constante com $a_k = \frac{3}{2}$ para todo $k \geq 0$. Portanto a resposta é $M \geq 2$. □

Problema 2 (OBMEP-2018)**.** Na igualdade $(EU)^2 = MEU$, as letras E, M e U representam algarismos não nulos. Nessa expressão, EU é um número de dois algarismos, e MEU é um número de três algarismos. Qual é o valor de $M + E + U$?

Solução. Considerando somente as unidades em ambos os lados da igualdade $(EU)^2 = MEU$, observamos que U^2 termina com o algarismo U. Isso só acontece com os algarismos $1, 5$ ou 6. Logo, a letra U deve ser um desses algarismos. Como $312 = 961$ e $322 = 1024$, e considerando que $(EU)^2$ é igual ao número MEU de três algarismos, segue que o número EU deve ser maior do que 10 e menor do que 32. Além disso, E e U são algarismos diferentes e não nulos. Assim, as possibilidades para o número EU são: 15, 16, 21, 25, 26 e 31. Testando essas possibilidades, a única correta é $252 = 625$. Logo, MEU representa o número 625 e $M + E + U = 13$. □

Problema 3. O pai de Alice comprou um micro-ondas novo. Empolgado para usá-lo não fez o ajuste da hora. Sabendo que o horário prede?nido no micro-ondas começa sempre às 12:00 e que o seu pai usou o eletrodoméstico as 15:37. Que horas Alice viu no visor do micro-ondas, ao ir esquentar sua sopa. Sabendo que o horário correto era 18:00h.

Solução. [3] Como o micro-ondas começa às 12:00 horas e sabendo que o pai de Alice utilizou o eletrodoméstico às 15:37h, temos que 12:00 horas no relógio do micro-ondas é 15:37h no horário correto. Por informação temos que Alice utilizou no horário correto das 18:00h, calculemos quanto tempo se passou desde que seu pai utilizou o micro-ondas.

$$18:00h - 15:37h = 02:23h$$

Então do horário em que o pai usou o micro-ondas até o horário que Alice utilizou, se passaram 02:23h. Tendo em mente que a hora no micro-ondas quando pai de Alice utilizou era 12:00, a hora em que Alice utilizou foi 02:23h depois, assim

$$12:00h + 02:23h = 14:23h$$

Portanto o horário que estava no micro-ondas quando Alice utilizou era 14:23h. □

[3] Solução de Lyen Tower (Licenciando em Matemática-UFRPE)