É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 11, volume 1, Junho de 2019

ISSN 2526-8651

Sumário

1 Artigo **1**

Napoleão e as "Revoluções" no Plano Euclidiano 1

2 Soluções de Olimpíadas **10**

OPEMAT - Olimpíada Pernambucana de Matemática - 2018/Nível 3 10

3 Curiosidades **13**

Blog Terence Tao 13

4 Indicações de Leituras/Vídeos **13**

Vídeos do IMPA 13

5 Quem pergunta, quer saber! **14**

O que é o último teorema de Fermat? . . 14

6 Eventos **15**

7 Problemas **15**

8 Soluções dos Problemas **16**

1. Artigo

Napoleão e as "Revoluções" no Plano Euclidiano

Adriano Regis Rodrigues

UFRPE - CEGEN - Departamento de Matemática

52171-900 - Recife - PE - Brasil

Introdução

Quando escutamos falar de Napoleão Bonaparte (1769 - 1821), provavelmente remontamos a fatos históricos relacionados ao imperador francês, militar e líder político de destaque durante a Revolução Francesa. Mas você sabia que existe um teorema clássico da geometria euclidiana atribuído a ele? Pois é! A proposição enunciada a seguir é conhecida como **Teorema de Napoleão**:

Se triângulos equiláteros são construídos externamente sobre os lados de um triângulo qualquer, então seus centros formam um triângulo equilátero.

Essa "estrutura" é conhecida como configuração de Napoleão e os triângulos equiláteros são chamados *triângulos Napoleônicos.*

Embora seja reconhecido o interesse de Napoleão por matemática, especialmente pela geometria, e sua relação próxima com matemáticos renomados como Lagrange e Laplace, considera-se pouco provável que ele seja responsável por este resultado.

Entretanto, a lenda em torno do Teorema de Napoleão o torna ainda mais interessante e frequentemente abordado em artigos e trabalhos de divulgação matemática como, por exemplo, em [1], [5] e [9].

Apesar da referência explícita no título deste artigo, nosso foco principal não está no teorema de Napoleão. Estamos especialmente interessados nas "revoluções", mais precisamente, rotações no plano a partir das quais se obtém técnicas para resolução de problemas. Um exemplo disto, consiste, justamente, na construção de triângulos equiláteros sobre os lados de um polígono.

Veremos que por trás desta técnica se esconde o conceito de rotação no plano em torno de um ponto. Isto favorece soluções sintéticas[1] para vários problemas de geometria, essencialmente por "transportar" medidas convenientes para se obter informações relevantes. Para motivar e introduzir tais estratégias, abordaremos alguns resultados e conceitos clássicos relacionados com a configuração de Napoleão, a saber, o problema de Steiner e o ponto de Fermat. Em seguida, aplicaremos as estratégias desenvolvidas para resolver alguns problemas e deixaremos outros propostos a cargo do leitor.

Rotações no Plano

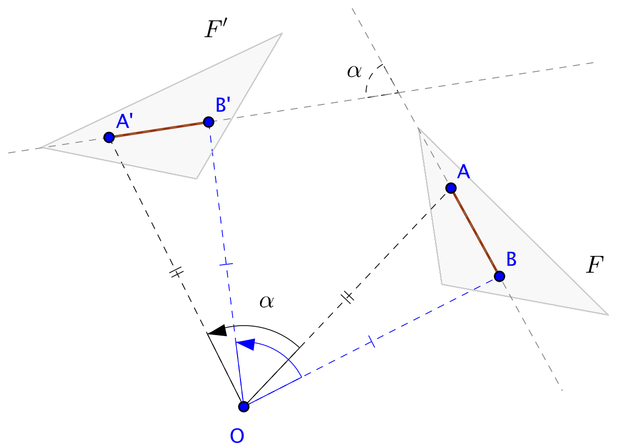
De um modo geral, quando buscamos resolver problemas de geometria por meio de propriedades básicas, construções ou traçados apropriados, as transformações do plano que preservam distância (*isometrias*) possuem um papel importantíssimo, ver [6]. A seguir, trataremos de forma resumida apenas das rotações, mas translações e reflexões são também exemplos fundamentais de isometrias. Recomendamos também as referências [2], [4], e [11]

Definição 1.1. Uma rotação no plano de um ângulo (orientado) α em torno de um ponto O é uma transformação R_α que deixa fixo o ponto O e associa a cada ponto $A \neq O$ do plano, um ponto $A' = R_\alpha(A)$, tal que $OA' = OA$ e $\angle AOA' = \alpha$.

Observação: Para a rotação estar bem definida, deve-se considerar o ângulo α orientado. A orientação positiva é adotada no sentido anti-horário. O ponto O é chamado de centro de rotação. Ao aplicarmos um "movimento" de rotação no plano, cada ponto distinto do centro se desloca segundo um arco de círculo cujo centro coincide com o centro de rotação.

A rotação é uma transformação inversível, cuja inversa é a rotação de mesma amplitude com orientação contrária.

É fácil ver que a rotação é uma isometria, portanto, a imagem de uma figura F por uma rotação é uma figura F' congruente a F.

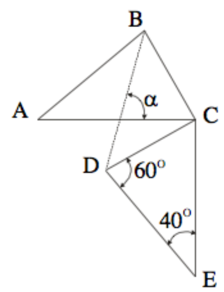


De fato, os triângulos AOB e $A'OB'$ são congruentes, pois

$$OB = OB';$$
$$\angle AOB = \angle A'OB' = \alpha - \angle AOB';$$
$$OA = OA'.$$

Daí $AB = A'B'$ e a transformação preserva distância entre pontos.

Exemplo 1. (OBM 2001 - 1ª fase - Nível 3)
O triângulo CDE pode ser obtido pela rotação do triângulo ABC de 90º no sentido anti-horário ao redor de C, conforme mostrado no desenho abaixo. Podemos afirmar que α é igual a:



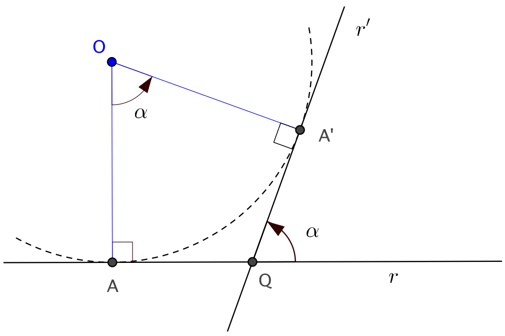
A) 75º **B)** 65º **C)** 70º **D)** 45º **E)** 55º

Solução:

[1] termo usado para expressar o tratamento puramente geométrico, sem uso de coordenadas. A geometria sintética ou pura é conhecida pela abordagem axiomática, deduzida desconsiderando os postulados métricos.

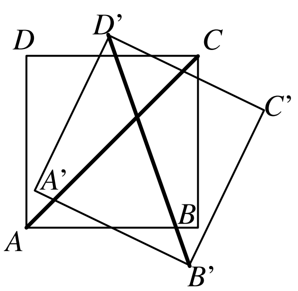
Sabemos que $BC = DC$. Como $\angle BCD = 90^o$, temos $\angle DBC = \angle BDC = 45^o$. Além disso, $\angle BAC = 40^o$ e $\angle ABD = 60^o - 45^o = 15^o$. Logo, $\alpha = 40^o + 15^o = 55^o$.

Proposição 1.1. *Uma rotação de um ângulo α transforma uma reta r numa reta r' que forma com r um ângulo α.*



Demonstração: A rotação é uma isometria e portanto transforma retas em retas. Se a reta r passa pelo centro de rotação o resultado é imediato. Se r não passa pelo centro de rotação O, tome o ponto A pé da perpendicular a r baixada de O. Então, r é tangente ao círculo descrito pelo ponto A através do movimento de rotação. Implica que reta r' é também tangente ao mesmo círculo em $A' = R_\alpha(A)$, pois este é o único ponto de r' cuja distância ao ponto O é igual ao raio OA. Portanto, o quadrilátero $AQA'O$ (figura) é inscritível ($\angle OAQ + \angle QA'O = 180^o$) e, por conseguinte, o ângulo $\angle AOA'$ e o ângulo externo oposto do quadrilátero são congruentes.

Exemplo 2. (OBM 2009 - 1ª fase - Nível 3)
Na figura, o quadrado $A'B'C'D'$ foi obtido a partir de uma rotação no sentido horário do quadrado $ABCD$ de 25 graus em torno do ponto médio de AB. Qual é o ângulo agudo, em graus, entre as retas AC e $B'D'$?



A) 5 **B)** 25 **C)** 45 **D)** 65 **E)** 85

Solução:

De acordo com a proposição anterior, o ângulo entre $B'D'$ e BD é 25º. Como as retas AC e BD são perpendiculares (diagonais do quadrado), temos que o ângulo entre AC e $B'D'$ é igual a 90º - 25º $=$ 65º.

O Problema de Steiner ou Problema de Fermat

Jakob Steiner (1796-1863) foi um matemático suíço, professor na Universidade de Berlin, pioneiro no estudo sobre inversão geométrica e que dedicou-se, entre outros problemas, ao de procurar pontos que minimizem a soma das distâncias a n pontos dados. O problema para o caso de $n = 3$ pontos foi proposto por Pierre de Fermat (1601-1665) a Evangelista Torricelli (1608-1647):

Problema 1 (Steiner ou Fermat)**.** *Encontrar um ponto tal que a soma de suas distâncias aos vértices de um triângulo dado seja mínima.*

Os primeiros registros de soluções para esse problema são encontrados por volta de 1640, com resoluções independentes de Evangelista Torricelli e Francesco Cavalieri. Os professores Sueli l. R. Costa e Eduardo Sebastiani trataram deste problema de forma contextualizada em [3].

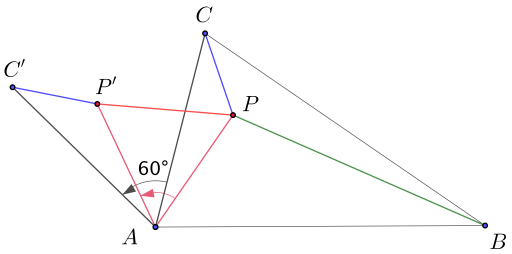
Na solução deste problema perceberemos como surgem os triângulos Napoleônicos por meio de rotações de 60º.

Solução do Problema 1:

Seja ABC um triângulo dado. Como bem observado em ([3]), podemos restringir nossa busca aos pontos da região triangular determinada por ABC. Separamos a argumentação em dois casos.

1º caso: Suponha que os ângulos internos de ABC são menores que 120º.

Seja P um ponto arbitrário do interior do triângulo ABC. A rotação do triângulo APC de um ângulo de 60º, em torno do ponto A, resulta no triângulo $AP'C'$ congruente ao triângulo APC.



Note que os triângulos APP' e ACC' são equiláteros.

Chamamos atenção para as seguintes observações:

(a) O triângulo equilátero ACC' não depende da escolha do ponto P. Realizando rotações semelhantes em torno de cada vértice do triângulo ABC, obtém-se triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo ABC (triângulos Napoleônicos).

(b) Um efeito interessante desta estratégia se dá ao transformar a soma $PA + PB + PC$, das distâncias de P aos vértices de ABC, no comprimento de uma poligonal ligando os pontos C' e B.

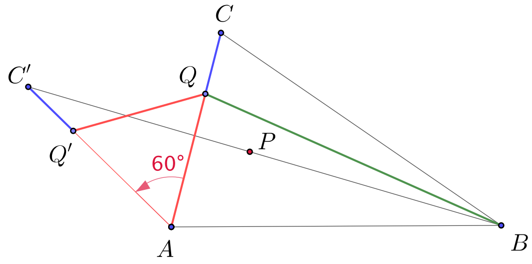
Segue-se desta última observação que o valor mínimo para soma $PA + PB + PC$ é a medida do segmento $C'B$. Isso ocorre quando os pontos C', P', P e B estão alinhados. Consequentemente, os ângulos $\angle APB$ e $\angle AP'C' = \angle APC$ medem 120°. Isto implica que $\angle BPC = 120°$ e, portanto, o ponto P pertence aos arcos capazes[2] de cada lado do triângulo ABC com respeito ao angulo de 120°. Ou seja, os círculos circunscritos aos triângulos Napoleônicos concorrem neste mesmo ponto, conhecido como *ponto de Fermat*, que será detalhado mais adiante.

Note que se $\angle BAC$ é maior ou igual a 120°, então o segmento $C'B$ não contém ponto do interior do triângulo ABC.

Por enquanto, podemos concluir que entre todos os pontos do interior da região triangular determinada por ABC, existe um único ponto (do interior) que minimiza a soma de suas distâncias aos vértices do triângulo.

Por outro lado, se um ponto Q pertence a um dos lados do triângulo, aplicando a rotação no lado correspondente, segue-se que a soma das distâncias de Q aos vértices é maior do que a soma das distâncias para o ponto P (segmento $C'B$).

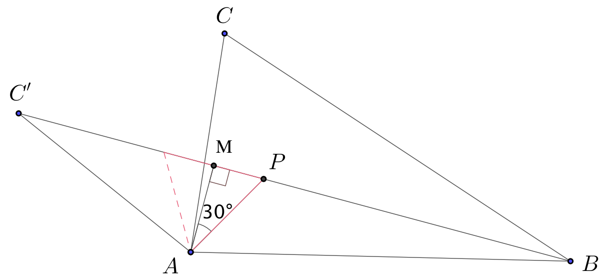
A figura a seguir representa essa situação:



$$QC + QA + QB = C'Q' + Q'Q + QB > C'B$$

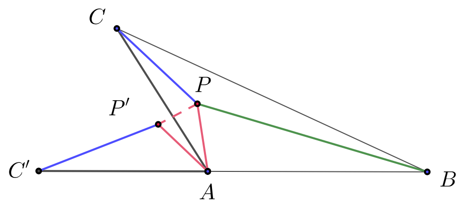
Bem, a existência de tal ponto está garantida. Mas como determiná-lo?

A reta perpendicular ao segmento $C'B$ traçada por A o corta no ponto M. Agora, basta tomar o ponto P em $C'B$ tal que $\angle MAP = 30°$.



2º caso: Admita que $\angle BAC$ é maior ou igual a 120° e seja P um ponto do interior do triângulo. Mostraremos que o ponto A (vértice do ângulo obtuso) é a solução do problema de Fermat (Problema 1).

De fato, seja $AP'C'$ o triângulo gerado pela rotação do triângulo APC, de tal modo que os pontos C', A e B sejam colineares. Ou seja, uma rotação de um ângulo menor ou igual a 60°.



[2]arcos de círculos que constituem o lugar geométrico dos pontos do plano que “enxergam” um determinado segmento sob um mesmo ângulo

Então, $P'P \leq PA$, pois $\angle PAP' \leq 60^o$.

Daí,

$PC + PA + PB \geq C'P' + P'P + PB > C'B = C'A + AB = AC + AB$

O Ponto de Fermat

A seguir mostraremos algumas propriedades que caracterizam o ponto de Fermat, de maneira independente do que fizemos anteriormente.

Proposição 1.2. *Seja ABC um triângulo cujos ângulos internos são menores que 120º. Sobre os lados de um triângulo ABC constroem-se externamente os triângulos equiláteros BCD, CAE, ABF. Então:*

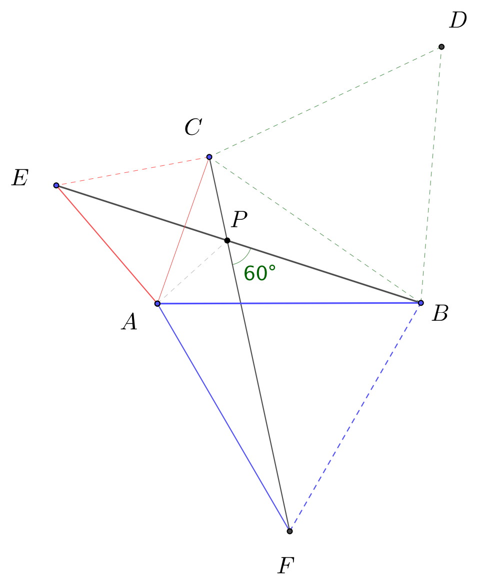
(i) *os círculos circunscrito aos triângulos (Napoleônicos) passam pelo mesmo ponto P;*

(ii) *existe um único ponto P no interior do triângulo tal que $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^o$;*

(iii) *as retas AD, BE e CF, interceptam-se num mesmo ponto P;*

(iv) $AD = BE = CF = PA + PB + PC$.

OBS.: As propriedades (i), (iii) e $AD = BE = CF$ são válidas para um triângulo ABC qualquer, sem restrições sobre seus ângulos internos.



Demonstração: A rotação de 60º em torno de A, transforma o triângulo AFC no triângulo ABE, logo $CF = EB$ (de outro modo, $AFC \equiv ABE$ pelo caso LAL, pois $\angle FAC = \angle BAE = 60^o + \angle BAC$.)

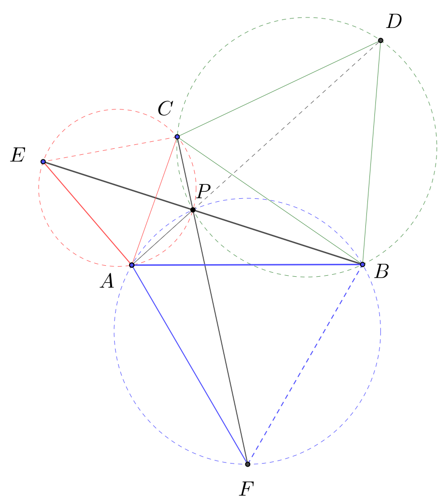
De modo semelhante, podemos concluir que $CEB \equiv CAD$ e $BDA \equiv BCF$, donde $CF = EB = AD$. Isto prova parte de *(iv)*.

Para demonstrar *(i)*, considere o ponto P de interseção de FC com EB. As retas EB e CF formam um ângulo de 60º. Logo, os pontos A e P pertencem, ambos, aos arcos capazes dos segmentos FB e CF segundo o ângulo de 60º (proposição 1.1). Ou seja, os quadriláteros $PCEA$ e $PAFB$ são inscritíveis.

Por outro lado, o quadrilátero $PBDC$ também é inscritível, pois $\angle BDC + \angle CPB = 180^o$. Portanto, os círculos circunscritos aos triângulos BDC, CEA, e AFB têm o ponto P em comum. Além disso,

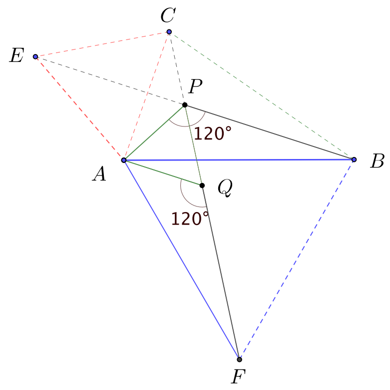
$$\angle CPA = 180^o - \angle CEA = 120^o = \angle APB = \angle BPC,$$

logo fica também demonstrado *(ii)*.



Note que $\angle CPD = \angle CBD = 60^o$. Por conseguinte $\angle APC + \angle CPD = 180^o$ e verifica-se *(iii)*.

Finalmente, tomando o ponto $Q \in PF$ com $PQ = PA$, obtém-se o triângulo equilátero AQP.



Então, o triângulo ABP é a imagem do triângulo AFQ por uma rotação de 60^o em torno de A. Sendo assim, $QF = PB$ e tem-se:

$$PC + PA + PB = CP + PQ + QF = CF$$

o que finaliza a prova de *(iv)*.

O Teorema de Napoleão

Algumas das propriedades exibidas anteriormente para círculos circunscritos e resultados mais gerais acerca do Teorema de Napoleão, podem ser encontrados em ([4]). Trataremos apenas da versão tradicional a seguir.

Teorema 1.3 (Teorema de Napoleão)**.** *Sejam ABF, BCD e ACE triângulos equiláteros construídos externamente sobre os lados de um triângulo ABC qualquer. Então, os centros dos triângulos equiláteros são também vértices de um triângulo equilátero.*

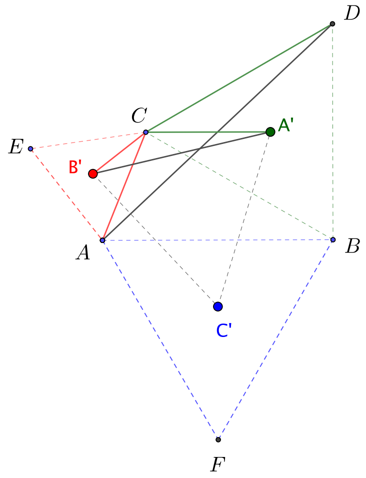
Demonstração:

Sejam A', B' e C' os centros de BCD, ACE e ABF, respectivamente. O triângulo ADC é imagem do triângulo $B'A'C$ por uma rotação de 30^o em torno de C, seguida por uma homotetia de centro C e razão $\sqrt{3}$. Esta composição é conhecida como *hoto-homotetia*, ver ([10])

Em outros termos, os triângulos ADC e $B'A'C$ são semelhantes pelo critério LAL, pois

$$\angle B'CA' = 30^o + \angle ACB + 30^o = \angle ACB + 60^o = \angle ACD$$

e $\dfrac{B'C}{AC} = \dfrac{CA'}{CD} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Logo, $B'A' = \dfrac{\sqrt{3}}{3}AD$.



Pelo mesmo argumento temos

$$A'C' = \frac{\sqrt{3}}{3}CF \text{ e } B'C' = \frac{\sqrt{3}}{3}EB.$$

Pelo item (iv) da proposição (1.2) segue-se que

$$A'B' = B'C' = C'A'.$$

Resolvendo Problemas Clássicos

A seguir, apresentaremos soluções comentadas para alguns problemas clássicos utilizando os métodos abordados anteriormente. Salientamos que as medidas específicas e os ângulos dados nos problemas podem sugerir rotações adequadas.

Em especial, os três últimos problemas possuem ângulos dados cuja diferença é de 60^o. Seria isto um indicativo de que triângulos equiláteros ou rotações de 60^o podem ser a chave para a resposta? Convidamos o leitor a refletir sobre isso.

1. (Banco de Questões OBMEP 2011, [8])

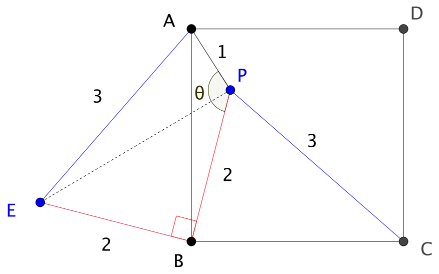
   Ponto no Interior do Quadrado

   Seja P um ponto no interior de um quadrado $ABCD$ tal que $PA = 1$, $PB = 2$ e $PC = 3$. Qual a medida do ângulo APB?

   Solução:

   Aqui são dados segmentos que unem um ponto do interior aos vértices do quadrado. Esta configuração parece familiar... Sim! Ocorreu no problema de Steiner.

Neste caso é conveniente realizar a rotação do triângulo BCP de 90^o, no sentido anti-horário em torno do ponto B, resultando no triângulo BAE (poderia ser a rotação de ABP no sentido horário, tente!).



Note que temos EBP isósceles, $\angle PBE = 90^o$ e, com isso, $EP^2 = EB^2 + BP^2 = 8$.

Ora, no triângulo AEP temos

$$EA^2 = 9 = 8 + 1 = EP^2 + AP^2.$$

Portanto, o triângulo EPA é retângulo em P e obtemos

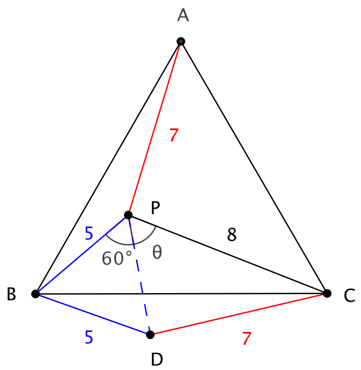
$$\theta = \angle APB = 90^o + 45^o = 135^o.$$

2. (I Olimpíada Iberoamericana de Matemática, 1985 - Villa de Leyva, Colombia)

   Seja P um ponto no interior de um triângulo equilátero ABC tal que $PA = 5$, $PB = 7$ e $PC = 8$. Determine a medida dos lados do triângulo ABC.

   Solução:

   A rotação de 60^o no sentido horário em torno do ponto B leva o triângulo ABP no triângulo CBD conforme a figura.



Assim, $\angle BPD = 60^o$, $PD = 5$ e aplicando a lei dos cossenos ao triângulo DPC, com $\angle DPC = \theta$, temos

$$49 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos\theta \ \Rightarrow \theta = 60^o.$$

Daí, $\angle BPC = 120^o$ e segue-se que:

$$BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 120^o = 89 + 40,$$

donde

$$BC = \sqrt{129}.$$

3. **Triângulo Russo (uma variação)**

   Considere um triângulo ABC isósceles cujos ângulos internos são $\hat{A} = 20^o$, e $\hat{B} = \hat{C} = 80^o$.

   (a) Prove que $AC < 3BC$;

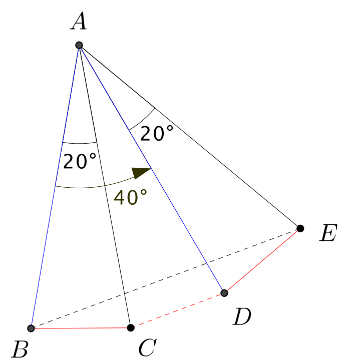
   (b) Seja D um ponto sobre o lado AC tal que $AD = BC$. Determine a medida do ângulo $\angle BDC$.

   Solução:

   Observe que nossa medida favorita de 60^o ocorre numa relação entre os ângulo desse notável triângulo: $80^o - 20^o = 60^o$. Isto indica que rotações convenientes podem produzir triângulos congruentes ou triângulos equiláteros.

   (a) Seja o triângulo ADE a imagem de ABC pela rotação de 40^o em torno do vértice A. Daí, temos que ABE é um triângulo equilátero e ACD é um triângulo congruente ao triângulo ABC. Portanto,

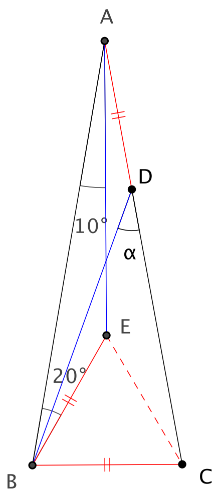
$$BE = AB \quad \text{e} \quad BC = CD = DE.$$



Sendo assim,

$$BE < BC+CD+DE \Rightarrow AC = AB < 3BC.$$

(b) A rotação do segmento BC de um ângulo de 60º em torno de B, dá origem ao triângulo equilátero BCE conforme a figura a seguir.



A congruência dos triângulos ABE e ACE (critério LLL) implica que

$$\angle BAE = \angle CAE = 10^o.$$

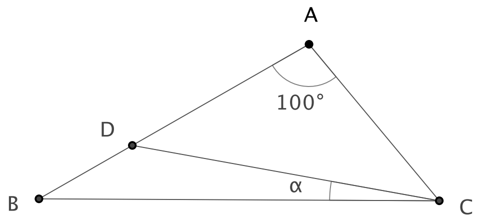
Temos também que $EBA \equiv DAB$, uma vez que $EB = DA$, $\angle EBA = \angle DAB = 20^o$ e AB é um lado comum. Logo,

$$ABD = BAE = 10^o$$

e, consequentemente,

$$\angle BDC = \alpha = 10^o + 20^o = 30^o.$$

4. Seja ABC um triângulo, onde o ângulo $\angle BAC$ mede 100º. Seja D um ponto sobre o lado AB (D está entre A e B), tal que $AD = AC$ e $CD = AB$. Quanto vale o ângulo $\angle BCD$?

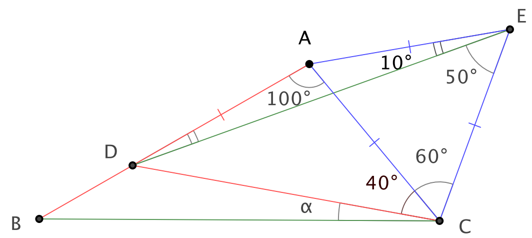


Solução:

Note que os ângulos da base do triângulo ADC medem 40º e temos a relação entre os ângulos 100º − 40º = 60º. Será coincidência?

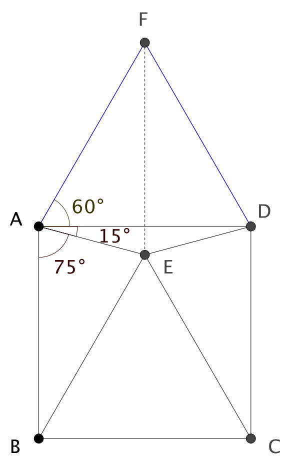
Considere o triângulo equilátero ACE, de acordo com a figura. Por construção temos que o triângulo ADE é isósceles e $ABC \equiv CDE$ pelo caso LAL ($AB = CD$, $\angle CAB = \angle ECD$ e $AC = CE$).

Daí, $\angle BCA = \angle DEC \Rightarrow \alpha + 40^o = 50^o$, donde $\alpha = 10^o$.



5. Seja E um ponto do interior do quadrado $ABCD$ tal que $\angle EAD = \angle EDA = 15^o$. Calcule a medida do ângulo $\angle EBC$.

Solução:



Mais uma vez, a relação entre os valores dos ângulos dados $75^o - 15^o = 60^o$ nos sugere algo, não?

De fato, construindo o triângulo equilátero ADF, segue-se da congruência dos triângulos AEF e DEF (LLL) que EFE bissecta o ângulo $\angle AED$. Logo $\angle AEF = 75^o = \angle EAF$.

Implica que $AF = EF$.

Por outro lado, $ABE \equiv AFE$ (LAL). Daí $\angle ABE = \angle AFE = 30^o$. Consequentemente, $\angle EBC = 90^o - 30^o = 60^o$.

Problemas Propostos

1. (Teorema de Thébault)

   Sobre os lados de um paralelogramo qualquer $ABCD$ são construídos quadrados. Prove que os centros desses quadrados são também vértices de um quadrado.

2. (OBMEP - Banco de Questões 2008) Seja P um ponto no interior de um triângulo equilátero ABC tal que $PA = 3$, $PB = 4$ e $PC = 5$. Determine a medida dos lados do triângulo ABC.

3. (IMO - 1975) Sobre os lados de um triângulo qualquer ABC, triângulos ABR, BCP e CAQ são construídos, externamente, com $\angle CBP = \angle CAQ = 45°$, $\angle BCP = \angle ACQ = 30°$, $\angle ABR = \angle BAR = 15°$. Prove que $\angle QRP = 90°$ e $QR = RP$.

4. (Alemanha - 94) Em um plano considere uma reta g e um ponto A fixo, não pertencente a g. Um ponto P corre sobre g. Determine o conjunto dos pontos X do plano de modo que X, A e P formem os vértices de um triângulo equilátero.

5. (Irã - 95) Suponha que $ABCD$ é um quadrado e K e N são pontos sobre AB e AD, respectivamente, tal que $AK.AN = 2.BK.DN$. Sejam L e M os pontos de interseção da diagonal BD com CK e CN, respectivamente. Prove que os pontos K, L, M, N e A são concíclicos[3].

Para mais problemas propostos sobre rotações, ver [2]

Referências

[1] Belenkiy, I. New Features of Napoleon's Triangles.J. Geom. 66, 17-26, 1999.

[2] Campos, Onofre. Rotações. Olímpiada Brasileira de Matemática - 10º Semana Olímpica, São José do Rio Preto/SP, (2007)

[3] Costa, Sueli; Sebastiani, Eduardo. Onde morar? O problema de minimizar redes de comunicação. Revista do professor de Matemática, v. 16

[4] Coxeter, H. S. M. and Greitzer, S. L. Napoleon Triangles. 3.3 in Geometry Revisited. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., pp. 60-65, 1967.

[5] Dalcín, Mario. O problema de Napoleão. Revista do professor de Matemática, v. 42

[6] Lima, E.L, Isometrias, Rio de Janeiro, SBM (1996).

[7] OBMEP. Banco de Questões 2008. Rio de Janeiro, IMPA, 2008.

[8] OBMEP. Banco de Questões 2011. Rio de Janeiro, IMPA, 2011.

[9] Rigby, J. F. Napoleon Revisited. J. Geom. 33, 129-146, 1988.

[10] Shine, Carlos Yuzo. Aulas de Matemática Olímpica. Rio de Janeiro, SBM, 2009.

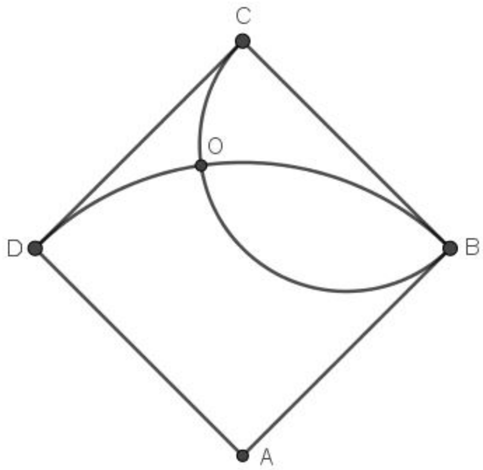
[11] Wagner, E . Construções Geométricas, Rio de Janeiro, SBM (1998)

[3] pertencem a uma mesma circunferência

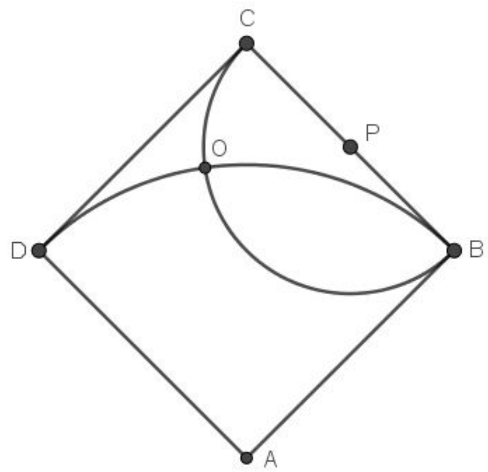
2. Soluções de Olimpíadas

Nesta edição apresentaremos a resolução de três questões discursivas da prova da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2018 referentes ao nível 3.

Questão 1. Na figura abaixo, temos um quarto de uma circunferência de raio l e uma semicircunferência.



Solução. Para facilitar o entendimento, seja P o ponto médio de BC, como na figura abaixo.



Observe que o triângulo ΔADO tem dois lados medindo l unidades de comprimento que correspondem a raios da circunferência maior. Seja β a medida do ângulo $D\widehat{A}O$, perceba que

$$\text{Área de } \Delta ADO = \frac{l^2 \operatorname{sen}(\beta)}{2}.$$

Para encontrar informações sobre β, considere o segmento $\overline{AP}$. Perceba agora que os triângulos ΔAPO e ΔAPB são congruentes pelo caso lado-lado-ângulo oposto ou lado-ângulo-lado de congruência, pois:

- $\overline{PB}$ e $\overline{OP}$ têm medida $l/2$ unidades de comprimento, pois correspondem a raios da semicircunferência menor e $\overline{AO}$ e $\overline{AB}$ têm medida l unidades de comprimento;

- $\overline{AP}$ é um lado em comum dos dois triângulos;

- $A\widehat{B}P$ e $A\widehat{O}P$ medem 90^{circ}, visto que $A\widehat{B}P$ é ângulo interno do quadrado $ABCD$ e a reta $\overleftrightarrow{OP}$ é tangente à circunferência maior onde $\overline{AO}$ é um de seus raios.

Seja α a medida dos ângulos congruentes $O\widehat{A}P$ e $P\widehat{A}B$. Utilizando o teorema de Pitágoras em qualquer um dos triângulos ΔAPB ou ΔAOP, descobriremos que o segmento $\overline{AP}$ tem medida $\dfrac{l\sqrt{5}}{2}$ unidades de comprimento. Consequentemente,

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad \cos(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Note agora que

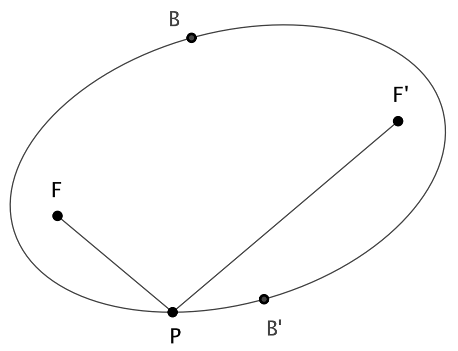
$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\beta) &= \operatorname{sen}(90^\circ - 2\alpha) \\
&= \operatorname{sen}(90^\circ)\cos(2\alpha) - \operatorname{sen}(2\alpha)cos(90^\circ) \\
&= cos(2\alpha) \\
&= \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) \\
&= \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

Substituindo esse valor na expressão anterior, teremos:

$$\text{Área de } \Delta ADO = \frac{l^2 \cdot \frac{3}{5}}{2} = \frac{3}{10} l^2.$$

□

Questão 2. Dados F e F' pontos distintos fixados do plano e a um número real tal que $2a > \overline{FF'}$. O lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $\overline{FP} + \overline{PF'} = 2a$ é uma curva chamada *elipse*, representada pela figura a seguir.

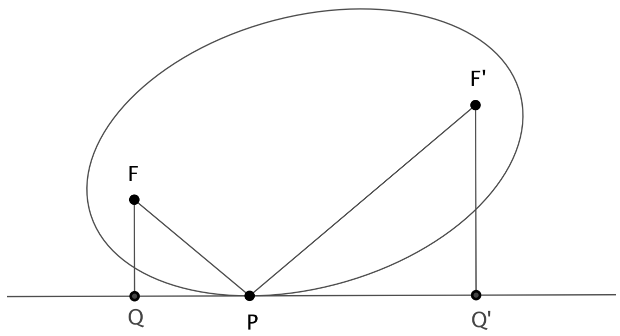


Sejam B e B' as interseções da mediatriz de FF' com a elipse e suponha que $\overline{FF'} = 2c$ e $\overline{BB'} = 2b$.

(a) Verifique a relação $a^2 = b^2 + c^2$.

(b) Mostre que a reta bissetriz do ângulo formado pelo segmento PF e a semirreta oposta a semirreta $\overrightarrow{PF'}$ possui apenas o ponto P em comum com a elipse. Tal bissetriz é a *reta tangente* a elipse no ponto P.

(c) Sejam Q e Q', respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas dos pontos F e F' à reta tangente a elipse no ponto P, conforme figura abaixo. Demonstre que $\overline{PQ} \cdot \overline{PQ'} = b^2$.



Solução. (a) Os pontos B e B' são equidistantes de F e F' (BB' mediatriz de FF') e como pertencem a elipse, temos que:

$$\overline{FB} = \overline{F'B} = \overline{FB'} = \overline{F'B'}$$

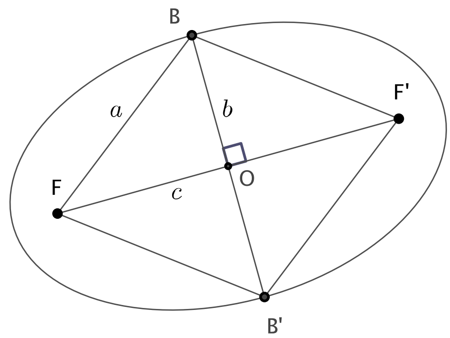
e

$$\overline{FB} + \overline{F'B} = \overline{FB'} + \overline{F'B'} = 2a$$

Logo,

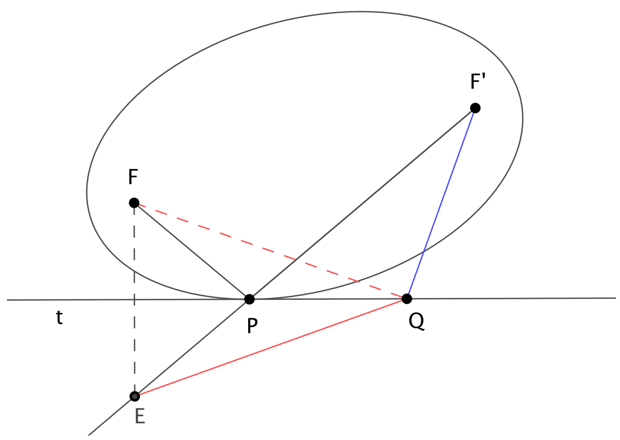
$$\overline{FB} = \overline{F'B} = \overline{FB'} = \overline{F'B'} = a.$$

Isto implica que FF' é mediatriz de BB', daí $OB = b$. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo AOB segue-se o resultado.



(b) Considere o ponto E na semirreta oposta a $\overrightarrow{PF'}$ tal que $\overline{PE} = \overline{PF}$. Desta forma, $\overline{EF'} = 2a$.

Sejam t a reta bissetriz do ângulo $\angle FPE$, e Q um ponto qualquer de t diferente de P.



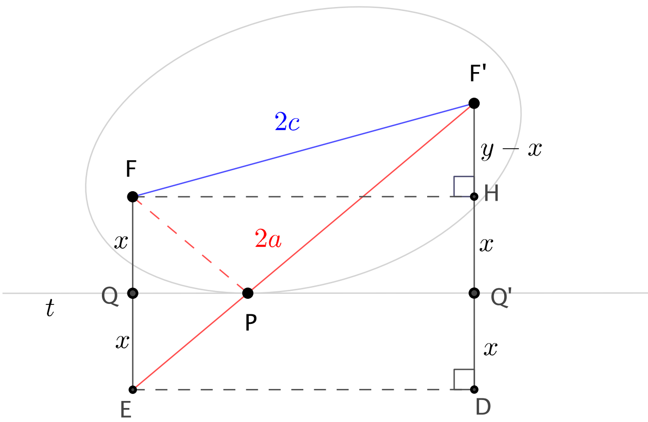
Uma vez que o triângulo FEP é isósceles, a bissetriz relativa a sua base coincide com altura e mediana, logo t é mediatriz do segmento FE e $\overline{FQ} = \overline{EQ}$.

Portanto, usando a desigualdade triangular,

$$\overline{FQ} + \overline{QF'} = \overline{EQ} + \overline{QF'} > \overline{EF'} = 2a$$

donde Q é não pertence à elipse. Assim, P é o único ponto de t que pertence à elipse.

(c) Façamos $\overline{FQ} = x$ e $\overline{F'Q'} = y$. Pelo item (b) o ponto E simétrico de F em relação à reta QQ' e pertence à reta PF'. Sejam D e H os pés das perpendiculares a reta $F'Q'$ baixadas de E e F, respectivamente.



Note $EFHD$ é um retângulo, logo $\overline{FH} = \overline{ED}$. Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos $FF'H$ e $EF'D$ temos:

$$\begin{aligned}
\overline{FH}^2 &= \overline{ED}^2 \\
(2c)^2 - (y-x)^2 &= (2a)^2 - (y+x)^2 \\
(y+x)^2 - (y-x)^2 &= 4(a^2 - c^2) \\
4xy &= 4b^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\overline{PQ} \cdot \overline{PQ'} = b^2.$$

□

Questão 3. Alice e Clarinha estavam estudando para as olimpíadas de matemática e encontraram o seguinte problema

" Dado $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$, existe uma lista formada por n inteiros positivos consecutivos contendo apenas um único número primo?"

Elas perguntaram para tio Dk: "É verdade isso?"

Tio Dk respondeu: "Vamos ver! Para $n = 2$ é fácil encontrar exemplos disso. Se p é primo, então "$p, p+1$" ou "$p-1, p$" formam listas de $n = 2$ números inteiros positivos e consecutivos com apenas um primo. Analogamente se $n = 3$ e p é um primo maior do que 3, então "$p-1, p, p+1$" é uma lista com $n = 3$ inteiros positivos consecutivos com apenas um número primo". Depois disso, tio Dk propôs:

(a) Exibam uma lista com 13 inteiros consecutivos contendo apenas um número primo.

(b) Agora verifiquem se é verdade que para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$, existe uma lista formada por n inteiros positivos consecutivos contendo apenas um único número primo.

Solução.

(a) Note que a lista

$$84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96$$

contém 13 números inteiros consecutivos com apenas um número primo que é 89.

(b) O resultado é verdadeiro. Dado $n \geq 2$, considere a lista de $n-1$ inteiros consecutivos (no caso $n = 2$ esta lista contém apenas um número)

$$n! + 2,\ n! + 3,\ n! + 4,\ \ldots,\ n! + n. \qquad (1)$$

Note que para cada $2 \leq i \leq n$, temos

$$\begin{aligned}
n! + i &= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (i-1) \cdot i \cdot (i+1) \cdot \ldots \cdot n + i \\
&= i \cdot [(1 \cdot 2 \cdot \ldots (i-1)(i+1) \cdot \ldots \cdot n) + 1].
\end{aligned}$$

Isso nos mostra que $n! + i$ é um número composto, para cada $2 \leq i \leq n$, pois i é um de seus fatores. Assim, (1) forma uma lista de $n-1$ inteiros positivos consecutivos e compostos.

Tome agora p o maior primo que satisfaz $p \leq n! + 1$. Nessa situação, pela maximalidade de p, temos que

$$p+1,\ p+2,\ p+3,\ \ldots\ ,\ p+n-1,$$

é uma lista contendo $n-1$ números inteiros positivos consecutivos e compostos. Portanto,

$$p,\, p+1,\, p+2,\, p+3,\, \dots\, ,\, p+n-1,$$

é um lista de n inteiros positivos consecutivos contendo apenas um único primo, o número p.

$\square$

3. Curiosidades

Blog Terence Tao

Por Lyen Tower G. Chen [4]

O Blog TerryTao foi criado em 2007 pelo matemático Terence Tao, que em 2013 foi considerado uma das dez mentes mais brilhantes do mundo. Participou em 1986 da Olimpíada Matemática Internacional (IMO) e até hoje figura na lista dos participantes mais jovens. O blog apresenta uma vasta quantidade de pesquisas feitas por Tao, voltadas para as mais diversas áreas da matemática: Há estudos sobre o quinto problema Hilbert, Análise de Fourier de Ordem Superior, Teoria Analítica dos Números entre outros. A seleção de tópicos e posts publicados no blog é guiada pelo gosto pessoal e trabalhos desenvolvidos pelo matemático. Há também um espaço bem interessante, no qual o autor apresenta uma coleção de vários conselhos sobre questões de carreira acadêmica em matemática, organizadas por níveis e assuntos, desde o fundamental até o pós doutorado. Outra parte estimulante do blog são as apresentações dos seus livros, nesta área é possível conhecer os livros escrito por Tao e o próprio sumário, além de poder comprá-los. Apesar das maiorias dos posts serem destinados as pessoas com formação em matemática, existe também um número considerável de posts menos técnicos, dirigidos a um público mais leigo. Tudo isso torna o blog um "prato cheio' para quem se interessa por matemática.

Referências

[1] HTTPS://IMPA.BR/NOTICIAS/TERENCE-TAO-MOZART-OF-MATH/. Acesso em: 20 abr. 2019.

[2] TAO, TERENCE, *Terence Tao Blog*, https://terrytao.wordpress.com/. Acesso em: 20 abr. 2019.

4. Indicações de Leituras/Vídeos

Vídeos do IMPA

Por Gabriel Guedes [5]

O instituto nacional de matemática pura e aplicada- IMPA, além de um centro de excelência mundial em matemática é um dos grandes difusores do conhecimento científico em nosso país, sendo também gestor de grandes projetos nacionais, como a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas- OBMEP, o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT e o Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino médio- PAPMEM, só para citar alguns.

Um dos espaços nos quais o IMPA se faz conhecer é o seu site. Uma das pérolas do site, a seção de vídeos, fica um pouco escondida, quase sem evidência. Ela merece um destaque maior pois cursos completos das disciplinas de mestrado e doutorado estão ali disponíveis, além de um grande número de importantes palestras. Isso mesmo! Para citar algumas das preciosidades, você poderá assistir um curso inteirinho de análise real ministrado pelo saudoso Elon Lages Lima, ver as conferências plenárias e cursos do Colóquio Brasileiro de Matemática a partir do ano de 2003, os cursos do PAPMEM, palestras de congressos realizados no IMPA e entrevistas com os pesquisadores eméritos, dentre outras.

[4] Aluno do curso de Licenciatura em Matemática da UFRPE
[5] Professor do Departamento de Matemática da UFRPE

Portanto acesse o site: https://impa.br/videos/. Fuce, cavouque e cutuque. Assista a maior quantidade possível de vídeos e indique aos amigos.

5. Quem pergunta, quer saber!

O que é o último teorema de Fermat?

Por Severino Barros de Melo[6]

Na cidade de Giessen (Alemanha) foi criado em 2002 um museu interativo de Matemática que atrai a cada ano cerca de 150 mil visitantes. Ao final da visita muitas pessoas formulam perguntas. Dentre as milhares recebidas, o diretor do museu, o matemático alemão Albert Beautelpscher selecionou algumas para compor o livro *Matemática: 101 preguntas fundamentales*. Tivemos acesso a tradução espanhola da obra, publicada em 2015 em Madri pela Alianza Editorial e escolhemos a seguinte pergunta para esta edição do É Matemática Oxente:

Visitante: *O que é o último teorema de Fermat?*

Resposta de Albert Beautelpscher:

O teorema mais conhecido na Matemática é o teorema de Pitágoras: em todo triângulo retângulo, cujos catetos medem a, b e c é a medida da hipotenusa, verifica-se que $a^2 + b^2 = c^2$. Este resultado é especialmente atraente quando os números a, b e c são inteiros. Neste caso se fala de ternos pitagóricos. Por exemplo, os números 3, 4 e 5 e 5, 12 e 13 são ternos pitagóricos (porque entre eles se verifica que $3^2+4^2 = 25 = 5^2$ e $5^2+12^2 = 25+144 = 169 = 13^2$). Pode-se determinar todos os ternos pitagóricos, isso já foi feito no passado, e este fato aparece por exemplo na *Aritmética* de Diofanto.

No ano de 1637 Pierre de Fermat (1607/08-1665), jurista e fervoroso apaixonado pela Matemática, estudou este livro. E justamente onde aparece a caracterização dos ternos pitagóricos escreveu na margem a anotação mais célebre da História da Matemática:

> É impossível escrever um cubo em forma de dois cubos ou escrever uma quarta potência como duas quartas potências ou escrever, em geral, qualquer potência maior que dois como duas potências iguais. Possuo uma demonstração verdadeiramente maravilhosa para esta afirmação, mas esta margem é demasiadamente estreita.

O modo pelo qual Fermat propôs foi se a igualdade $a^3 + b^3 = c^3$ pode ser verificada com números inteiros (a decomposição de um cubo em dois cubos), ou a igualdade $a^4+b^4 = c^4$ (a decomposição de uma quarta potência em duas quartas potências), ou de um modo geral, se a igualdade $a^n + b^n = c^n$ para qualquer valor de n maior que 2 se verifica com números naturais a, b e c maiores que 0. Ele afirmou que não podia se verificar e acreditou ter encontrado uma "demonstração verdadeiramente maravilhosa", mas tão grande que não poderia ser anotada na margem do livro.

Esta anotação na margem foi um pesadelo para os matemáticos durante séculos. Todos, realmente todos os matemáticos tentaram pelo menos uma vez, sobretudo na juventude, encontrar a "demonstração verdadeiramente maravilhosa", sem nenhum êxito. Alguns casos isolados conseguiram resolver com considerável esforço e em parte com demonstrações nada "maravilhosas": com $n = 3$ não funciona, com $n = 4$ também não, com $n = 5$ também não. Em 1950 se sabia que se quiséssemos encontrar um contra-exemplo, n deveria ser no mínimo 2000.

A maioria dos matemáticos deixou de lado esta questão, até que em 23 de junho de 1993 explodiu a bomba. O matemático britânico Andrew Wiles deu uma conferênciana Universidade de Cambridge e ao final comunicou ter demonstrado a conjectura de Fermat.

Wiles ficou com obsessão pela conjectura de Fermat. Porém, diferentemente de muitos outros matemáticos, contava com os métodos adequados... e com a vontade de resolver este enigma. Quando já

[6]Professor do Departamento de Educação da UFRPE

era professor de reconhecido prestígio, ficou recluso e trabalhou secretamente com todas as suas energias no Teorema de Fermat. Demorou sete anos para conseguir.

No primeiro artigo de Wiles, ainda se descobriu uma lacuna que, sem dúvida conseguiu resolver mediante um novo enfoque. A demonstração não é simples, muito pelo contrário. Apresenta uma complexidade extraordinária e lança mão dos métodos matemáticos mais modernos. Porém é uma demonstração que pode ser compreendida pelos melhores matemáticos do mundo. Desde este tempo a demonstração foi comprovada várias vezes e está correta, de modo que a conjectura de Fermat se transformou finalmente depois de mais de 350 anos em um Teorema, "o último teorema de Fermat".

É indubitável que a demonstração de Wiles não é a "demonstração verdadeiramente maravilhosa" que naquela ocasião passou na mente de Fermat (mesmo se também não caberia na margem daquele livro). Existe realmente esta "demonstração verdadeiramente maravilhosa"? A maioria dos matemáticos duvida e acredita que Fermat simplesmente se equivocou. Porém o sonho continua.

6. Eventos

Vários eventos acontecerão este ano visando uma maior divulgação da matemática.

Fiquem Ligados!!!

- **22nd Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS 2019)**
  - Local: Fundação Getúlio Vargas, Rio de Janeiro
  - Data: 9 a 12 de junho
  - Mais informações: http://ilas2019.org/about-rio/
- **II Encontro Fluminense De Inclusão e Tecnologias em Educação Matemática**
  - Local: Universidade Federal do Rio de Janeiro, campus Fundão, RJ
  - Data: 10 de junho de 2019
  - Mais informações: http://www.sbemriodejaneiro.org/eventos.php
- **V Encontro de Matemática Pura e Aplicada (V EMPA)**
  - Local: Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande – PB
  - Data: 11 a 14 de junho
  - Mais informações: https://sites.google.com/view/empa-uepb/
- **XVIII Encontro Baiano de Educação Matemática**
  Fórum Baiano de Licenciaturas em Matemática
  - Local: UESC, Ilhéus–BA
  - Data: 03 a 05 de julho de 2019
  - Mais informações: http://ppgemuesc.com.br/ebem/
- **32º. Colóquio Brasileiro de Matemática**
  - Local: IMPA-Intituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) no Rio de Janeiro
  - Data: 28 de julho a 2 de agosto
  - Mais informações: https://impa.br/eventos-do-impa/eventos-2019/

7. Problemas

Para concluir deixamos para o leitor alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Problema 2 (IMO-2015). Determine todos os inteiros positivos M para os quais a sequência a_0,a_1,a_2... definida por $a_0 = \frac{2M+1}{2}$ e $a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor$ para $k = 1, 2, \ldots,$ contém pelo menos um termo inteiro.

Problema 3 (OBMEP- 2018)**.** Na igualdade $(EU)^2 = MEU$, as letras E, M e U representam algarismos não nulos. Nessa expressão, EU é um número de dois algarismos, e MEU é um número de três algarismos. Qual é o valor de M + E + U?

Problema 4. O pai de Alice comprou um micro-ondas novo. Empolgado para usá-lo não fez o ajuste da hora. Sabendo que o horário predefinido no micro-ondas começa sempre às 12:00 e que o seu pai usou o eletrodoméstico as 15:37. Que horas Alice viu no visor do micro-ondas, ao ir esquentar sua sopa. Sabendo que o horário correto era 18:00h.

Mandem soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua soluções e o seu nome aparecerá entre os solucionadores de questões, sua solução deve ser enviada até **30/08/2019**.

---

8. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n.9, Dezembro de 2018**.

Problema 1. Mostre que se p é um número primo diferente de 2, então ele pode ser escrito da forma $4k \pm 1$, com $k \in \mathbb{Z}_+^*$.

Solução. Seja $p \neq 2$ número primo. Note que os possíveis restos da divisçao de p por 4 são apenas 1 ou 3. Dessa forma,

$$\begin{aligned} p &= 4q+1 \quad \text{ou} \quad p &= 4q+3 \\ & & = 4q+4-1 \\ & & = 4(q+1)-1, \end{aligned}$$

com $q \in \mathbb{Z}_+$. $\square$

Problema 2 (XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - Segunda Fase - Nível 2)**.** Dizemos que dois ou mais números, com a mesma quantidade de algarismos, são membros da mesma família, quando todos possuem pelo menos um algarismo em comum. Por exemplo, os números 32, 25 e 22 pertencem à mesma família, enquanto que 123, 245 e 568 não pertencem à mesma família, pois 123 e 568 não pertencem à mesma família. Qual é a maior quantidade de membros de uma família, cujos elementos têm três algarismos?

Solução. O algarismo das centenas não pode ser zero. Vamos contar então todos os números que têm um determinado algarismo x, não nulo, pois há mais deles. Há números em que x aparece uma única vez, como algarismo das centenas. Há números em que x aparece uma única vez, como algarismo das dezenas (lembre-se que o das centenas não pode ser 0) e há 72 números em que o x aparece uma única vez, como algarismo das unidades. Há 9 números com x na centena e na dezena, menos na unidade, 9 números com x na centena e na unidade, menos na dezena e 8 números com x na dezena e na unidade, menos na centena e um único número formado inteiramente de x. A quantidade total de números em que figura o algarismo não nulo x é 81 + 72 + 72 + 9 + 9 + 8 + 1 = 252 $\square$

Problema 3. Alice escreveu 2018 números naturais, com pelo menos 3 algarismos, em um quadro negro. Ela percebeu que o resultado da soma de todos esses números é um natural impar. Alice começou a fazer a seguinte brincadeira pega um número apaga seu digito da unidade, multiplica o número obtido por dois e deste subtrai o algarismo da unidade. isto é, se Alice pega o número 157, assim o resultado obtido será $2 \cdot 15 - 7 = 23$. Mostre que, após Alice fazer essa brincadeira com todos os números que estavam no quadro, a soma desses novos números é ainda um número impar.

Solução. Observe que o procedimento adota por Alice não interfere na paridade de cada número, isto é, se um número é par após o procedimento o número obtido também é par. Analogamente se o número é impar.(Leitor prove isto). Assim se a paridade de cada termo de uma soma não é alterada, a paridade do resultado da soma também não é alterada.

$\square$