É Matemática, Oxente!

O Jornal de Matemática Olímpica

2019 - Número 10, volume 1, Março de 2019

ISSN 2526-8651

Sumário

1. Artigo

Números Primos e o Teorema Fundamental da Aritmética

Danilo da N. Santos

UFRPE - CEGEN - Departamento de Matemática

52171-900 - Recife - Pernambuco - Brasil

Introdução

No presente trabalho faremos um breve resumo da ópera que são os Números primos e o Teorema Fundamental da Aritmética no universo das competições de matemática. Uma vez que este trabalho não é tão longo, sintetizamos alguns resultados principais e aplicações clássicas dos mesmos. Outra consequência de ser um trabalho sucinto é que o leitor deverá estar familiarizado com conceitos básicos da teoria dos números como: divisibilidade, algoritmo de Euclides, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, mas nada de muito avançado, apenas o básico. Por fim, ainda será enunciada a Fórmula de Legendre, uma ferramenta bastante útil na fatoração de números com muitos algarismos e ainda uma última seção com Problemas Propostos, para que os leitores testem o que aprenderam com este trabalho.

Distribuição dos Números Primos

Nesta seção apresentaremos a definição formal de *números primos* bem como algumas propriedades necessárias para solução de alguns problemas.

Definição 1.1. Seja $p \in \mathbb{Z}_+$, com $p > 1$. Diremos que p é um número primo se seus únicos divisores são 1 e o próprio p. Um número que não é primo é chamado de número composto.

Exemplo 1. Os números $2,\ 3,\ 5,\ 7$ são exemplos de números primos. É claro que qualquer número par, exceto 2, é um número composto.

O exemplo acima acaba de nos dar a informação de que a quantidade de números compostos existente é infinita. Então certamente o leitor deve ter se questionado sobre a quantidade de números primos que existe. É devido a Euclides a resposta para tal questionamento. A seguir iremos exibir uma demonstração, próxima a feita por Euclides, da existência de infinitos números primos.

Lema 1.1. *Seja $n \in \mathbb{Z}_+$, com $n > 1$. Então existe um número primo que divide n. Em outras palavras existe p primo tal que $n = p \cdot m$, com $m \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Se n for primo não há o que demonstrar, pois $n = n \cdot 1$. Caso contrário, teremos que $n = n_1 \cdot n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Se n_1 ou n_2 for primo, segue o resultado. Caso contrário, podemos repetir o mesmo argumento feito para n, e como não existe uma quantidade infinita de inteiros entre 1 e n, após uma quantidade finita de passos, encontraremos o número primo p desejado. $\square$

Teorema 1.2 (Euclides)**.** *Existem infinitos números primos.*

Demonstração. Suponha que

$$A = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$$

seja o conjunto de todos os números primos e considere o número $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ \ldots \ \cdot p_r + 1$. Pelo **Lema** 1.1 existiria um primo $p_i \in A$, para algum $i = \{1, 2, \ldots, r\}$ tal que p_i dividiria P, o que é uma contradição, pois por definição de P, para todo i, p_i não divide P. Portanto, os números primos são infinitos. $\square$

Bem... já deve ser de conhecimento do leitor a existência de uma equação que qualquer número ímpar obedece, a saber $2k+1$ com $k \in \mathbb{Z}$. Entretanto, quando se trata de números primos a história é um pouco diferente. Encontrar uma fórmula que represente todos os números primos é um problema que ao longo dos séculos vem tirando o sono de vários matemáticos da história. Até o próprio Fermart[1] se arriscou, sem sucesso, a dar um palpite. Uma das dificuldades em encontrar tal fórmula pode ser ingenuamente ilustrada pelo exemplo a seguir.

Exemplo 2 (Torneio das Cidades)**.** Existe um bloco com 1000 inteiros positivos consecutivos contendo apenas um número primo? **SIM!** Veja resolução na seção 8, problema 2.

O Teorema Fundamental da Aritmética

Aqui enunciaremos o Teorema Fundamental da Aritmética bem como uma lista de resultados interessantes para solução dos mais variados problemas.

Teorema 1.3 (Teorema Fundamental da Aritmética)**.** *Todo número natural $n > 1$ ou é primo ou pode ser escrito de modo único, a menos da ordem dos fatores, como o produto de números primos.*

Ao produto de primos citados no teorema anterior dar-se o nome de *fatoração* do número n. A demonstração da existência de tal fatoração segue diretamente do **Lema** 1.1. A demonstração da unicidade também não é tão complicada e pode ser encontrada em [1].

Exemplo 3 (OCM 2005)**.** Existe algum inteiro $n > 2$ que é divisível por todos os primos menores que n?

NÃO! Note primeiramente que o máximo divisor comun entre n e $n-1$ é igual a 1, ou seja, n e $n-1$ não têm divisores comuns a não ser 1. Por outro lado, uma vez que $n > 2$ teremos que $n - 1 > 1$, então existe um $p \in \mathbb{N}$ primo que divide $n-1$ e $p \leq n - 1 < n$. Portanto p é um primo menor que n que não divide n.

Talvez o enunciado do Teorema Fundamental da Aritmética, na forma enunciada acima seja um tanto quando diferente da qual o leitor esteja acostumado. Na verdade, de um ponto de vista operacional seja mais conveniente enunciá-lo da seguinte forma:

[1] *Pierre Fermat* (1601-1665) conjecturou que $2^{2^n}+1$ representava sempre um número primo. Anos depois *Leonhard Euler* (1707-1783) mostrou que essa fórmula é falha para $n = 5$, ou seja, $2^{2^5}+1$ é um número composto.

Teorema 1.4. *Seja $n \in \mathbb{Z}$, com $n \notin \{-1, 0, 1\}$. Então existem números primos $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{Z}_+$ univocamente determinados tais que*

$$n = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}. \qquad (1)$$

Na versão acima do Teorema Fundamental da Aritmética fica mais fácil descobrir os divisores de um número inteiro e consequentemente o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum. Iremos enunciar tais resultados omitindo suas demonstrações. Ressaltamos que as mesmas podem ser encontradas em [1].

Proposição 1.5. *Seja $n \in \mathbb{Z}$ e $n = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ sua fatoração. Se m é um divisor de n, então*

$$m = \pm p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}$$

onde $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, para $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

Se denotarmos o número de divisores de um número n por $d(n)$, usando um argumento básico de contagem teremos que

$$d(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1).$$

Aqui n é escrito como em (1).

Exemplo 4. Determine todas as triplas de inteiros positivos (x, y, z) que sejam solução para equação

$$xyz + 6xy + 5xz + 3yz + 30x + 18y + 15z = 365$$

A ideia para resolver esse exemplo é tentar reduzir a expressão da esquerda em um produto de três números. Primeiramente ponha o x em evidência apenas nos termos em que ele aparece,

$$x(yz + 6y + 5z + 30) + 3yz + 18y + 15z = 365.$$

Perceba que, a menos do fator 30, todos os fatores do lado esquerdo da igualdade que não estão sendo multiplicados por x, são o triplo dos fatores que estão sendo multiplicados por x. Desta forma, somando 90 em ambos os lados da expressão acima teremos

$$\begin{aligned} x(yz{+}6y{+}5z{+}30){+}3yz{+}18y{+}15z{+}\ 90&=455 \\ x(yz{+}6y{+}5z{+}30){+}3(yz{+}6y{+}5z{+}30)&=455 \\ (x{+}3)(yz{+}6y{+}5z{+}30)&=455 \\ (x{+}3)[y(z{+}6){+}5(z{+}6)]&=455 \\ (x{+}3)(y{+}5)(z{+}6)&=455. \end{aligned}$$

Uma vez que $455 = 5 \cdot 7 \cdot 13$ teremos que os divisores de 455 serão 1, 5, 7, 13 e 455. No entanto como x, y e z são inteiros positivos segue que $x+3$, $y+5$ e $z+6$ não podem ser iguais a 1 e consequentemente nem igual a 455, nos restando então apenas as possibilidades

$$\begin{array}{ccccc} x+3=5 & & x+3=7 & & x+3=13 \\ y+5=13 & \text{ou} & y+5=5 & \text{ou} & y+5=7 \\ z+6=7 & & z+6=13 & & z+6=5 \end{array}$$

logo as possíveis soluções são (2,2,7), (10,0,1) e (5,8,1).

Proposição 1.6. *Sejam $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ e $m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}$. Então o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum entre m e n (denotados por $mdc(m, n)$ e $mmc(m, n)$ respectivamente) são da forma*

$$\begin{aligned} mdc(m, m) &= p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdots p_r^{\gamma_r} \\ mmc(m, n) &= p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \cdots p_r^{\delta_r} \end{aligned}$$

onde $\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$ e $\delta_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$ com $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

Exemplo 5 (AIME – 1987)**.** Encontre o número de triplas ordenada (a, b, c) de inteiros positivos para os quais $mmc(a, b) = 1000$, $mmc(b, c) = 2000$ e $mmc(a, c) = 2000$.

Note que $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ e $2000 = 2^4 \cdot 5^3$. Dessa forma estamos procurando múltiplos comuns da forma

$$a = 2^{a_1} \cdot 5^{a_2} \qquad b = 2^{b_1} \cdot 5^{b_2} \qquad c = 2^{c_1} \cdot 5^{c_2}.$$

Se a_1 ou b_1 forem algum igual 4, teríamos que 2^4 dividiria $mmc(a, b)$, mas isso não é possível. Por outro lado, como $mmc(b,c)$ e $mmc(a,c)$ são múltiplos de 2000 segue que $c_1 = 4$. Dessa forma, com respeito a a_1 e b_1, pelo menos um deles deve ser igual a 3, pois 2^3 divide $mmc(a,b)$. Portanto, teremos as triplas (a_1, b_1, c_1) das formas

$$(0,3,4),\ (1,3,4),\ (2,3,4),\ (3,3,4),$$

$$(3,2,4),\ (3,1,4),\ (3,0,4).$$

Agora, para a potência de 5, a fim de ter todos os três mínimo múltiplos comum acima sejam divisíveis por 5^3, temos que ter pelo menos dois entre os números a_2, b_2 e c_2 iguais a 3. Dessa forma para as triplas (a_2, b_2, c_2) as possibilidades são

$$(3,3,3),\ (x,3,3),\ (3,x,3),\ (3,3,x)$$

onde $0 \leq x < 3$. Além disso, temos 3 possibilidades pra o x acima. Portanto, para as triplas (a_2, b_2, c_2) teremos um total de $3 \cdot 3 + 1 = 10$ possibilidades. Por fim, juntamente com as 7 possibilidades para a tripla (a_1, b_1, c_1), concluímos que existem $7 \cdot 10 = 70$ possibilidades para a tripla ordenada de números (a, b, c).

Decomposição, em fatores primos, do fatorial

Deve ser de conhecimento do leitor que o fatorial de um número natural, em geral, resulta em um número relativamente grande. Então como fatorar números tão grandes? Nesta seção iremos apresentar uma fórmula para achar a fatoração de tais números. Para efeito de simplificação de notação iremos designar pelo símbolo $\left[\frac{b}{a}\right]$ o quociente da divisão euclideana de b por a (aqui $a \neq 0$). É de imediata conclusão que se $a > b$ então $\left[\frac{b}{a}\right] = 0$.

Dados $m,\ p \in \mathbb{Z}_+$, com p primo, denotaremos por $E_p(m)$ como sendo o expoente de maior potência de p que divide m. Em outras palavras é o expoente de p que aparece na fatoração de m.

Teorema 1.7 (Fórmula de Legendre[2]). *Sejam $n,\ p \in \mathbb{Z}_+$, com p número primo. Então,*

$$E_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots \qquad (2)$$

A demonstração do resultado acima será omitida, pois esse não é foco do presente artigo. No entanto para as mentes mais inquietas e menos incrédulas a demonstração encontra-se em [2]. Observando com um pouco mais de atenção a soma em (2) percebemos a existência das reticências. Mas não devemos nos assustar, essa soma é finita. De fato, sendo p primo, segue que $p \geq 2$, então existe $i \in \mathbb{Z}_+$ para o qual $p^i > n$, dessa forma $\left[\frac{n}{p^i}\right] = 0$, dando fim às reticências.

De um ponto de vista mais prático e operacional fica mais fácil encontrar $E_p(n!)$ fazendo uso do seguinte algoritmo

$$\begin{aligned} n &= q_1 \cdot p + r_1 \\ q_1 &= q_2 \cdot p + r_2 \\ q_2 &= q_3 \cdot p + r_3 \\ &\vdots \\ q_{t-1} &= q_t \cdot p + r_t. \end{aligned}$$

Um vez que $q_1 > q_2 > \cdots$, teremos que vai existir um t tal que $q_t < p$ daí podemos concluir que

$$E_p(n!) = q_1 + q_2 + \cdots + q_t. \qquad (3)$$

Na prática, a expressão (3) é a usada.

Exemplo 6. Com quantos zeros termina a representação decimal do número 1000!?

O número de zeros que um número, na base decimal, termina é determinado pela maior potência de 10 que divide tal número. Como $10 = 2 \cdot 5$ basta encontrar $E_2(1000!)$ e o $E_5(1000!)$. Como em 1000! aparece o produto de muitos números pares é claro que $E_2(1000!)$ será bem maior que $E_5(1000!)$, portanto, nos preocuparemos com tal número. Bem,

[2] *Adrien-Marie Legendre* (1752 - 1833) foi um matemático francês e membro da Royal Society em Londres. Fez contribuições significativas nas mais diversas áreas da matemática tais como teoria dos números, análise combinatória e análise matemática.

uma vez que

$$\begin{aligned} 1000 &= 200 \cdot 5 \\ 200 &= 40 \cdot 5 \\ 40 &= 8 \cdot 5 \\ 8 &= 1 \cdot 5 + 3 \\ 1 &= 0 \cdot 5 + 1. \end{aligned}$$

Logo, $E_5(1000!) = 200+40+8+1 = 249$. Portanto, 1000! termina com 249 zeros.

Problemas Propostos

Questão 1 (OPEMAT – 2018)**.** Dado um inteiro positivo n, mostre que existe um bloco com n inteiros consecutivos onde apenas um deles é um número primo.

Questão 2 (AIME – 1998)**.** Para quantos números k o número 12^{12} é o mínimo múltiplo comum de 6^6, 8^8 e k?
Resposta: 25

Questão 3 (IMO – 1989)**.** Mostre que, dado um número inteiro n, existem n inteiros positivos consecutivos para os quais nenhum é potência de um número primo. Por exemplo

- para $n = 1$: a sequência será 3;
- para $n = 2$: a sequência será 5, 6;
- para $n = 3$: a sequência será 5, 6, 7;
- para $n = 4$: a sequência será 10, 11, 12, 13

Dica: Estude a sequência $(2n)! + 2, \ (2n)! + 3, \ \ldots \ , \ (2n)! + n$.

Questão 4 (ENC – 2002)**.** Qual é o menor valor de n que torna o número $n!$ divisível por 1000?
Resposta: 15

Referências

[1] Hefez, A.,*Aritmética*, Coleção PROFMAT, SBM, 2016

[2] Hefez, A.,*Elementos de aritmética*, Coleção textos universitários, SBM, 2006

[3] Stevens, J. *Olympiad Number Theory Through Challenging Problems* Disponível no sítio: https://numbertheoryguy.com/publications/olympiad-number-theory-book/ acesso em 27/02/2019

2. Soluções de Olimpíadas

Nesta edição apresentaremos a resolução de três questões discursivas da prova da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2018 referentes ao nível 2.

Questão 1. Os Youtubers Pedro Henrique (PH), Lorenzo Walker (LW) e João Miguel (JM) produzem vídeos sobre jogos virtuais. No dia 20 de outubro de 2018, cada um deles postou simultaneamente um vídeo comentando o jogo "Fórti Naiti". Na primeira hora após a postagem, cada um dos vídeos já possuia mais de 1000 visualizações que somadas totalizavam 7500. Sabendo que, na primeira hora, os números de visualizações dos vídeos de PH e de LW são ambos quadrados perfeitos e que a quantidade de visualizações do vídeo de PH é obtida a partir da quantidade de visualizações do vídeo de LW da seguinte forma:

- Somando 5 ao dígito das unidades;
- Subtraindo 2 do dígito das dezenas;
- Somando 5 ao dígito das centenas;
- Subtraindo 2 do dígito das unidades de milhar.

Com base nestas informações, determine o número de visualizações de JM.

Solução. **Etapa 1.** Note que os números de visualizações de cada vídeo, na primeira hora, são compostos por 4 dígitos, pois são maiores do que 1000 e somam 7500. Seja

UM	C	D	U
x	y	z	w

o número que representa a quantidade de visualizações do vídeo de LW, em que x, y, z e w são dígitos que representam a unidade de milhar, a centena, a dezena e a unidade, respectivamente. Como este número é um quadrado perfeito, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$1000x + 100y + 10z + w \;=\; m^2.$$

Pelas informações descritas no enunciado, a quantidade de visualizações do vídeo de PH é representada pelo seguinte número de 4 dígitos:

UM	C	D	U
$x-2$	$y+5$	$z-2$	$w+5$

Como este número também é um quadrado perfeito, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$1000(x-2) + 100(y+5) + 10(z-2) + (w+5) \;=\; n^2$$

$$\Rightarrow 1000x + 100y + 10z + w - 1515 \;=\; n^2.$$

Etapa 2. Isso resulta no seguinte sistema

$$\begin{cases} 1000x + 100y + 10z + w \;=\; m^2 \\ 1000x + 100y + 10z + w - 1515 \;=\; n^2 \end{cases}.$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, no sistema anterior, obtemos

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 \;&=\; [1000x + 100y + 10z + w] \\ &\quad -[1000x + 100y + 10z + w - 1515] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (m-n)(m+n) = 1515.$$

Etapa 3. Agora observe que 1515 pode ser escrito como produto de dois números naturais apenas de quatro maneiras distintas:

$$1515 = 1 \cdot 1515 = 3 \cdot 505 = 5 \cdot 303 = 15 \cdot 101.$$

Como $m, n \in \mathbb{N}$ temos que $m+n > m-n$. Assim, há apenas quatro sistemas possíveis para determinar os valores de m e n.

Etapa 4. Vamos analisar cada caso.

Caso 1.

$$\begin{cases} m - n \;=\; 1 \\ m + n = \; 1515 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; m = 758 \;\Rightarrow\; m^2 = 574564.$$

Caso 2.

$$\begin{cases} m - n \;=\; 3 \\ m + n = \; 505 \end{cases} \Rightarrow\; m = 254 \;\Rightarrow\; m^2 = 64516.$$

Caso 3.

$$\begin{cases} m - n \;=\; 5 \\ m + n = \; 303 \end{cases} \Rightarrow\; m = 154 \;\Rightarrow\; m^2 = 23716.$$

Nos três casos anteriores observe que m^2 é um número com mais de 4 dígitos, o que não satisfaz o problema visto que os números de visualizações têm 4 dígitos.

Caso 4.

$$\begin{cases} m - n \;=\; 15 \\ m + n = \; 101 \end{cases}$$

$\Rightarrow \; m = 58$ e $n = 43 \Rightarrow \; m^2 = 3364$ e $n^2 = 1849$.

Assim, na primeira hora, PH teve $n^2 = 1849$ e LW teve $m^2 = 3364$ visualizações. Como a soma das visualizações dos três vídeos é 7500, concluímos que JM teve 2287 visualizações.

□

Questão 2. O professor Rodrigo, lendo o jornal "É Matemática, Oxente!"do Departamento de Matemática da UFRPE, viu um problema que achou interessante e propôs aos seus alunos a seguinte adaptação:

Num famoso programa de auditório o apresentador ofereceu o prêmio de um milhão de reais para quem respondesse corretamente a seguinte pergunta:

Se escrevermos os números de 1 até 5.000 consecutivamente, formamos o seguinte número

$$12345678910111213\cdots 4997499849995000.$$

No número acima, quantas vezes 12 aparece?

Solução. Vamos analisar cada um dos casos de ocorrência do número 12. Para facilitar a análise, considere a sequência a seguir:

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,\cdots,4997,$$

$$4998,4999,5000.$$

Isso nos permite enxergar de maneira mais simples que 12 pode aparecer em três situações distintas:

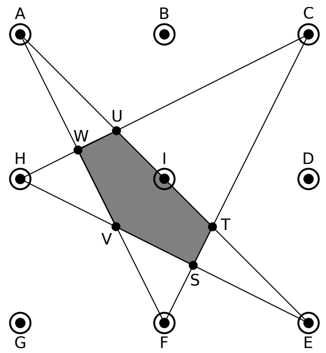
1. Os dois primeiros números formam a primeira ocorrência;
2. Em um único número (ex: 127 ou 4123);
3. Em números consecutivos onde um número termina em 1 e o próximo inicia com 2 (ex: 211,212 ou 2371,2372);

Vamos então aos cálculos.

1. Nos dois primeiros dígitos 1,2 temos um total de 1 ocorrência.
2. Ocorrências em que 12 aparece em números de 2,3 e 4 dígitos:
   (i) Para números com 2 algarismos temos apenas 1 ocorrência que é o número 12.
   (ii) Para números com 3 algarismos temos as seguintes ocorrências: $x12$ totalizando 9 possibilidades pois x não pode ser 0. Temos também números da forma $12x$, totalizando 10 possibilidades. Total de ocorrências $9+10=19$.
   (iii) Para números com 4 algarismos temos as seguintes ocorrências: $xy12$ totalizando 40 possibilidades, pois x só pode ser não $1,2,3$ ou 4. Temos também números da forma $x12y$ também com um total de 40 possibilidades, pois novamente x só pode ser $1,2,3$ ou 4. Por fim, em números da forma $12xy$ com um total de 100 possibilidades. Total de ocorrências 40 + 40 + 100 = 180.
3. Agora consideraremos as ocorrências em que 12 aparece em números que terminam com o algarismo 1 e seu sucessor inicia com 2. Temos as seguintes ocorrências:
   (i) Em números de 2 dígitos: $x1, 2y$. Como são consecutivos a única possibilidade é $21, 22$, ou seja, temos 1 ocorrência;
   (ii) Em números de 3 dígitos: $xy1, 2ab$. Por serem consecutivos, devemos ter $x=2$, $y=a$ e $b=2$. Logo tais números consecutivos são da forma $2y1, 2y2$ e isso nos dá 10 ocorrências;
   (iii) Em números de 4 dígitos: $xyz1, 2abc$. Novamente, como são consecutivos teremos $x=2$, $y=a$, $z=b$ e $c=2$. Logo tais números consecutivos são da forma $2yz1, 2yz2$, totalizando 100 ocorrências.

Assim, o total de ocorrência é 1 + 1 +19 +180 +1 +10 +100= 312. □

Questão 3. É comum encontrar em alguns tipos de aparelhos celulares um sistema de desbloqueio que consiste em ligar alguns pontos, formando uma linha poligonal aberta. Suponha que fosse possível utilizar um código de desbloqueio formando a poligonal fechada $AEHCFA$, conforme figura abaixo.



Sabendo que A, C, E e G são vértices de um quadrado de lado medindo $2l$ unidades de comprimento e que B, D, F, H e I são pontos médios dos segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{EG}$, $\overline{GA}$ e $\overline{HD}$, respectivamente, determine a área hachurada em função de l.

Solução. Observe que os triângulos ΔIUC, ΔTCI, ΔVEI e ΔVAI são congruentes pelo caso L.A.L.. Note também que ΔSTE e ΔWUA são congruentes devido à simetria da figura. Além disso, perceba que V é o baricentro de ΔIHF, pois olhando para o retângulo $HDEG$ percebemos que HE contém a mediana em relação ao vértice H, olhando para o retângulo $ABFG$ percebemos que AF contém a mediana em relação ao vértice F e GI contém a mediana em relação ao vértice I.

Outra informação importante é que o triângulo ΔSTE é semelhante ao triângulo ΔIUC pelo caso A.A. (ou a quaisquer outros congruentes a este), pois o ângulo $U\widehat{C}I$ é congruente ao ângulo $S\widehat{E}T$ e o ângulo $C\widehat{T}E$ é congruente ao ângulo $A\widehat{U}C$.

Vamos encontrar as áreas dos triângulos ΔIUC e ΔSTE. Para isto, observe que da congruência dos triângulos ΔIUC, ΔTCI, ΔVEI e ΔVAI temos $UI = IT = VI := L$. Como V e o baricentro do triângulo ΔIHF, então

$$L = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} l = \frac{\sqrt{2}}{3} l.$$

Assim,

$$\text{Área}(\Delta IUC) = \frac{\sqrt{2}l \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}l}{2} = \frac{l^2}{3}.$$

Do triângulo ΔIUC, temos $UI = \frac{\sqrt{2}}{3}l$ e $IC = \sqrt{2}l$. Assim, pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo ΔIUC, concluímos que $UC = \frac{2\sqrt{5}}{3}l$. Observe que $TE = IE - IT = IE - L = \sqrt{2}l$ - $\frac{\sqrt{2}}{3}l = \frac{2\sqrt{2}}{3}l$. Como o triângulo ΔIUC é semelhante ao triângulo ΔSTE encontramos $TS = \frac{2\sqrt{5}}{15}l$ e $SE = \frac{2\sqrt{5}}{5}l$.

Logo,

$$\text{Área}(\Delta STE) = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{15}l \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}l}{2} = \frac{2}{15}l^2.$$

Por fim, observe que a Área$(VSTIUW)$ = 2.Área(ΔIUC) − 2.Área(ΔSTE)= $2.\frac{1}{3}l^2$ - $2.\frac{2}{15}l^2 = \frac{2}{5}l^2$.

□

3. Curiosidades

O Site Art of Problem Solving

Por Gabriel Guedes [3]

Este é um grande portal sobre o mundo das competições matemáticas, fundado em 2003 por Richard Rusczyk, Sandor Lehoczky e Sam Vandervelde, contando com uma livraria, um centro de treinamento e um fórum de discussões. Na livraria são vendidos os livros da coleção homônima Art of Problem Solving, que foram pensados e desenvolvidos para o ensino de matemática olímpica com transições sempre suaves. Abordando assuntos relativos desde o quarto ano do ensino fundamental até o nível universitário. Outra aba interessante é a dos treinamentos online, com dezenas de cursos desde do pré-álgebra até o de introdução a teoria dos grupos. Com destaque para o WOOT: Worldwide Online Olympiad Training, um programa de 7 meses que treina as habilidades necessárias para participar das principais olimpíadas ao redor do planeta. Todos os professores são ex-medalhistas ou treinadores de delegações nacionais. Os cursos são pagos, porém como o site conta com patrocinadores existe a possibilidade de se candidatar a bolsas. Por fim temos a aba fórum, no qual mais de 300 mil inscritos discutem sobre matemática. Esta é inteiramente gratuita. O único detalhe deste site é que está escrito em inglês, todavia aprender a ler o inglês técnico da matemática é um problema bem pequeno perto dos outros problemas (matemáticos) que os futuros medalhistas irão encontrar.

[3] Professor do Departamento de Matemática da UFRPE

4. Indicações de Leituras

SCHNEPS, Leila; COLMEZ, Coralie. **A matemática nos tribunais.** Rio de Jaeiro - Zahar - 2014.

Everton Henrique Cardoso de Lira[4]

Até que ponto vai a sua confiança na matemática? É claro que você, um estudante apaixonado por esta bela ciência, imediatamente responderá que possui total confiança na matemática e em seus resultados altamente rigorosos e baseados numa lógica impecável. Porém, vamos modificar um pouquinho esta pergunta e vejamos se você estaria disposto a responder novamente com um retumbante sim. Supondo que você estivesse sendo julgado em um tribunal (não importa por qual motivo, ok!), você deixaria o seu advogado utilizar argumentos matemáticos na sua defesa? Ou pior ainda, você aceitaria que seus acusadores utilizassem argumentos matemáticos contra você? Tenho certeza que posso ouvir agora o som de um estridente DEPENDE!!! vindo da sua parte.

Depende de quem seriam o meu advogado de defesa e o advogado de acusação, você diria. Posso concordar com você neste condicionante, pois se seu advogado fosse um advogado à la Fermat, ou seja, advogado no "horário comercial" e matemático nas horas vagas, provavelmente você ficaria mais tranquilo em ser defendido por alguém assim. Mas se ele estivesse do lado da acusação a história seria outra pra você não é? E se o advogado de acusação fosse um sujeito que não soubesse aplicar corretamente, por exemplo, a regra do produto para a probabilidade de eventos independentes, qual seria sua situação neste caso? Pois bem é basicamente sobre situações como a imaginada acima que tratam a dupla SCHNEPS e COLMEZ em seu empolgante e instigante **"A matemática nos tribunais."**

O livro está organizado em 10 capítulos contendo 10 histórias reais de casos jurídicos, nos quais o desconhecimento de fatos matemáticos básicos, em particular, da Teoria das Probabilidades, aliado à insensatez de advogados àvidos por ganhar uma causa pode levar a erros e danos irreparáveis na vida de inocentes que foram aprisionados por crimes que, na pior das hipóteses, não podem ser provados que os mesmos cometeram.

Os destaques do livro vão para os capítulos 4 e 8. No capítulo 4 o caso do assassinato da jovem Meredith Kercher e a possível participação de sua colega de quarto Amanda Knox[5] e seu namorado Raffaele Sollecito no crime foi minuciosamente apresentado pelas autoras, trazendo o papel desempenhado pela a análise estatística de DNA em casos de crime como este. No capítulo 8 o caso da pirâmide financeira elaborada pelo estelionatário Charles Ponzi (1882 - 1949) é tratado com precisão histórica e uma explicação matemática do seu esquema é elegantemente apresentada pelas autoras, juntamente com o aviso ao leitor para não se deixar, levado pela promessa de dinheiro fácil, cair em golpes desta natureza anda em voga atualmente.

Enfim, após a leitura deste livro sua visão sobre o alcance da matemática em nossas vidas será ampliado, mais ainda, você notará como a falta de cohecimento da mesma pode ter consequências irreparáveis na vida das pessoas. Assim, quando alguém te perguntar para que serve a matemática, você pode singelamente responder que uma de suas funções é te livrar da prisão!

5. Quem pergunta, quer saber!

Existe logaritmo de número negativo?

Por Vital Lima [6]

Muita coisa na matemática pode existir, desde que você defina de modo "preciso" e com alguma base axiomática e completa (isso não é nada fácil, basta

[4] Professor da Secretária de Educação de Pernambuco. Email: everton.ufpe@hotmail.com.

[5] Para os interessados em conhecer detalhes sobre este caso, indico o documentário "Amanda Knox" de 2016 produzido pela Netflix abordando o caso e a sua repercussão na vida dos envolvidos anos depois do ocorrido.

[6] Licenciado em Matemática pela UFRPE.

verificar os probleminhas que surgiram com o 5º axioma de Euclides). A matemática, ao contrário do que estabelece o bom-senso, não é uma "ciência exata". Como contra-exemplos, saiba que "divisão por zero" existe [1], nem sempre "$1 + 1 = 2$"[2] e até existem matemáticos(as) (intuicionistas) que não assumem o princípio do terceiro excluido, fazendo com isso que a famosa demonstração por absurdo da irracionalidade de $\sqrt{2}$ não seja aceita [3]. Então, tudo depende da lógica considerada, dos axiomas e das definições de operações dos seus entes.

Historicamente, Leibniz concordava que não existia logaritmo negativo, pois enxergava logaritmos reais a partir da sua inversa (a função exponencial). Porém, Euler definiu logaritmos com outra notação e em outro conjunto universo e assim, permitiu a existência de logaritmos negativos.

Temos então por definição, que o logaritmo de um número complexo não-nulo $z = a + ib$ onde $a = Re(z)$ e $b = \operatorname{Im}(z)$ é dado por:

$$logz = log|z| + i\operatorname{Arg}(z)$$

onde $|z|$ é a norma do número complexo z e $\operatorname{Arg}(z)$ é o argumento de z. Note que, o $logz$ pode assumir valores distintos, a depender do $\operatorname{Arg}(z)$. Dado um número complexo z na sua forma algébrica para calcular seu logaritmo devemos (não necessariamente nessa ordem):

Calcular sua norma;

Calcular seu argumento.

Considere o número complexo $z = -1$. Temos que:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$$

$$\operatorname{Arg}(z) = \pi + 2k\pi = \pi(2k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Assim,

$$\log(-1) = 1 + i\pi(2k + 1).$$

As propriedades clássicas de logaritmos reais como logaritmo do produto, logaritmo do quociente e logaritmo da potência ainda permanecem válidas no contexto dos números complexos, desde que corretamente interpretadas [4]. A matemática está sempre em construção e não permite se estabelecer como algo "acabado" e estático. Por último, deixo um trecho do livro "Filosofias da Matemática" do professor Jairo José da Silva que remete a pergunta:

> Poincaré dizia que tudo que uma definição matemática cria é um termo, um *façon de parler*. Mas, dependendo das circunstâncias, dizia ele, há modos de falar mais úteis que outros, e a premência de certos problemas práticos ou teóricos pode ser um grande incentivo 'a invenção matemática . . . [5]

Referências

[1] CARLSTROM, J.,*On division by zero*, Research Reports in Mathematics, number 11, 2001. Disponível em https://www2.math.su.se/reports/2001/11/2001-11.pdf.

[2] HEFEZ, A.,*Iniciação à Aritmética*, Disponível em http://www.obmep.org.br/docs/apostila1.pdf,2015.

[3] MELO, D.H.F *O Intuicionismo e o problema com as provas não construtivas* Griot: Revista de Filosofia, Volume 15, 2015. Disponível em http://oaji.net/articles/2017/2742-1496677903.pdf.

[4] AVILA, G. *Variáveis Complexas e aplicações* Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[5] SILVA, J.J. *Filosofias da Matemática* 2 ed. São Paulo: Editora Unesp, 2007.

6. Eventos

Vários eventos acontecerão este ano visando uma maior divulgação da matemática.

Fiquem Ligados!!!

- **3° Simpósio de Matemática Aplicada e Computacional da UFRRJ**

- Local: Universidade Federal Rural de Rio de Janeiro- Campus Nova Iguaçu
- Data: 12 à 15 de Março de 2019
- Mais informações: https://www.even3.com.br/3SMAC

- **Evento: 5° Colóquio de Matemática da Região Norte**
  - Local: Universidade Federal do Acre, Rio Branco
  - Data: 18 à 22 de Março de 2019
  - Mais informações: https://www.sbm.org.br/coloquio-norte-5/

- **I WMM-Workshop de Mulheres na Matemática**
  - Local: Universidade Federal de Campina Grande- Campina Grande-PB
  - Data: 21 e 22 de março de 2019
  - Mais informações: http://mat.ufcg.edu.br/wmm/

- **VII Semana da Matemática e Educação**
  - Local: Instituto Federal de Educação, ciências e tecnologia de São Paulo
  - Data: 6 a 10 de Maio de 2019
  - Mais informações: https://www.even3.com.br/viiisemated

- **IV Seminário de Ensino e Pesquisa em Educação Matemática e Ciência na Amazônia**
  - Local: Universidade Federal do Oeste do Pará
  - Data: 8 a 10 de Maio de 2019
  - Mais informações: https://www.even3.com.br/gepeimaz2019/

- **10° encontro de ensino e pesquisa em educação Matemática**
  - Local: Universidade Federal de Ouro Preto(MG)
  - Data: 16 a 18 de Maio de 2019
  - Mais informações: https://ufop.br/eventos

- **II Encontro Fluminense de Inclusão e Tecnologias em Educação Matemática**
  - Local: Universidade Federal do Rio de Janeiro
  - Data: 31 de Maio de 2019
  - Mais informações: http://sbemriodejaneiro.org/

7. Problemas

Para concluir deixamos para o leitor alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Problema 1 (OBM-2000- Nível 1)**.** Quantos números inteiros e positivos menores do que 1.000.000 existem cujos cubos terminam em 1?

Problema 2 (OBM-2014 - Nível 2)**.** Determine o número de soluções com x e y inteiros positivos da equação

$$x^2 - y^2 = 36$$

Problema 3 (OBM-2005 - Nível 3)**.** No campeonato tumboliano de futebol, cada vitória vale três pontos, cada empate vale um ponto e cada derrota vale zero ponto. Um resultado é uma vitória, empate ou derrota. Sabe-se que o Flameiras não sofreu nenhuma derrota e tem 20 pontos, mas não se sabe quantas partidas esse time jogou. Quantas sequências ordenadas de resultados o Flameiras pode ter obtido? Representando vitória por V, empate por E e derrota por D, duas possibilidades, por exemplo, são (V, E, E, V, E, V, V, V, E, E) e (E, V, V, V, V, V, E, V).

Mandem soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, sua solução deve ser enviada até **01/06/2019**.

8. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n.8, setembro de 2018**.

Problema 1 (OBMEP -N3- 2010- Adaptado)**.** Seja p um número primo positivo e n, m inteiros positivos. Determine todas as soluções de

$$p^n + 1 = m^2.$$

Solução. [7] Como $p^n + 1 = m^2 \iff p^n = (m-1)(m+1)$, Pelo Teorema Fundamental da Aritmética existem dois naturais a e b, com $a > b$ tais que $a + b = n$, logo $(m+1) = p^a$ e $(m-1) = p^b$. Subtraindo as duas ultimas equações, obtemos que $2 = p^a - p^b$, assim $2 = p^b(p^{a-b} - 1)$. Como p^b e $(p^{a-b} - 1)$ possuem paridades diferentes e 2 é um número primo, logo temos duas situações:

$$\begin{cases} p^{a-b} - 1 = 2 \\ p^b = 1 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} p^{a-b} - 1 = 1 \\ p^b = 2 \end{cases}$$

No primeiro sistema, como $p^{a-b} - 1 = 2 \Longrightarrow p^{a-b} = 3$, logo $p = 3$ e $a - b = 1$. Como $p^b = 1$ e $p = 3$ concluímos que $b = 0$ e como consequência $a = 1$. Dessa forma, teremos então como solução do primeiro sistema $p = 3$, $n = a + b = 1$ e $m^2 = 3^1 + 1 = 4 \Longrightarrow m = 2$.

No segundo sistema, como $p^{a-b} - 1 = 1 \Longrightarrow p^{a-b} = 2$, logo $p = 2$ e $a - b = 1$. Como $p^b = 2$ e $p = 2$ concluímos que $b = 1$ e como consequência $a = 2$. Dessa forma, teremos então como solução do segundo sistema $p = 2$, $n = a + b = 3$ e $m^2 = 2^3 + 1 = 9 \Longrightarrow m = 3$.

□

Problema 2 (Tournament of the Towns - 2001)**.** Exite um bloco com 1000 inteiros positivos consecutivos contendo exatamente um número primo?

Solução. Considere a seguinte sequencia em $\mathbb{N}$:

$$1000! + 2,\ 1000! + 3,\ \ldots\ ,\ 1000! + 1000.$$

Note que para cada $i = 2, 3, \ldots, 1000$, o número $1000! + i$ é composto, pois i irá dividir $1000! + i$. Dessa forma, construímos uma sequência com 999 números compostos. Considere agora p, como sendo o maior número primo tal que $p \leq 1000! + 1$. Daí

$$p+1,\ p+2,\ \ldots\ ,\ p+999$$

são todos compostos, visto que $p + 999 \leq 1000! + 1000$. Portanto,

$$p,\ p+1,\ p+2,\ \ldots\ ,\ p+999$$

é o bloco de números desejado.

□

Problema 3 (OBMEP-2008-Nível 1)**.** Um número é dito *equilibrado* se um dos seus algarismos é a média aritmética dos outros. Por exemplo, 132, 246 e 777 são equilibrados. Quantos números equilibrados de 3 algarismos existem?

Solução. Note que se o número equilibrado tem os três algarismos distintos, diferentes de zero, então com os mesmos algarismos obtemos 6 números equilibrados. Para isso basta trocar os algarismos de posição. Por exemplo: $123; 132; 213; 231; 312; 321$.

Se um dos 3 algarismos do número equilibrado é 0, então com esses algarismos obtemos apenas 4 números equilibrados, pois o 0 não pode estar na casa da centena. Por exemplo: $102; 120; 201; 210$.

Assim, vamos variar apenas os algarismos da centena e da dezena. O algarismo da unidade será

[7] Solução de José Ferreira de Queiroz Filho (Mestre em Matemática-PROFMAT-UFRPE).

a média dos 2 algarismos. Observe que os 2 algarismos são ambos pares ou ímpares. Os possíveis números equilibrados iniciando com:

1 são 111 ; 132 ; 153 ; 174 ; 195; assim temos $1 + (4 \, . \, 6) = 25$,

2 são 201 ; 222 ; 243 ; 264 ; 285; assim temos $(4 + 1 + 3 \, . \, 6) = 23$,

3 são 333 ; 354 ; 375 ; 396; assim temos $(1 + 3 \, . \, 6) = 19$,

4 são 402 ; 444 ; 465 ; 486; assim temos $(4 + 1 + 2 \, . \, 6) = 17$,

5 são 555 ; 576 ; 597; assim temos $(1 + 2 \, . \, 6) = 13$,

6 são 603 ; 666 ; 687; assim temos $(4 + 1 + 6) = 11$,

7 são 777 ; 798; assim temos $(1 + 6) = 7$,

8 são 804 ; 888; assim temos $(4 + 1) = 5$,

9 é 999; assim temos apenas 1.

Somando temos 121 números equilibrados de 3 algarismos.

□