É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

2018- Número 9, volume 1, Dezembro de 2018
ISSN 2526-8651

Sumário

1. Artigo

O Princípio da Casa dos Pombos

Ricardo N. Machado Junior
UFRPE - CEGEN - Departamento de Matemática
52171-900 - Recife - PE - Brasil

Introdução

O Princípio da Casa dos Pombos, é usualmente abordado em disciplinas de combinatória, apesar dele não servir exatamente para contagem. Ele foi usado inicialmente para resolver problemas de Teoria dos números pelo matemático Lejeune Dirichlet (1805-1859), por esse motivo, este princípio também é conhecido como o princípio das gavetas de Dirichlet. Entretanto, este método é usado não só em Teoria dos Números, mas em outras áreas da Matemática como Combinatória e Geometria.

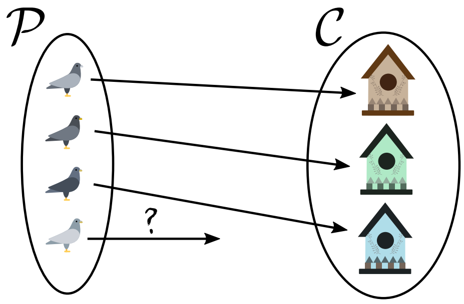
O princípio da casa dos pombos, na sua forma mais simples, pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 1.1. *Se $k+1$ pombos forem colocados em k casas, então existe pelo menos uma casa contendo dois ou mais pombos.*

Demonstração: Suponha que nenhuma das k casas contém mais de um pombo. Então o número total de pombos seria no máximo k. Isto é uma contradição, já que existem pelo menos $k+1$ pombos.[1] ■

Podemos interpretar o princípio usando funções da seguinte forma: Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{C}$, dois conjuntos. Se o número de elementos de $\mathcal{P}$ for maior que o números de elementos de $\mathcal{C}$, então não existe uma função injetiva de $\mathcal{P}$ para $\mathcal{C}$, ou seja, pelo menos dois elementos do domínio terão a mesma imagem, independente da função entre $\mathcal{P}$ e $\mathcal{C}$.

[1] Aqui foi usado um argumento do tipo *redução ao absurdo*. Neste tipo de argumento assumimos uma hipótese e, a partir desta, concluímos uma consequência absurda, como resultado, a suposição original está errada.



Essencialmente, para usar este princípio, precisamos identificar dois conjuntos, que chamaremos sugestivamente de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{C}$ para representarem o conjunto dos pombos e o conjunto das casas, respectivamente. Em seguida comparamos o número de elementos entre eles.

Exemplo 1. Mostre que em um grupo de 367 pessoas, pelo menos duas fazem o aniversário no mesmo dia.

Chame de $\mathcal{P}$ o conjunto das pessoas e $\mathcal{C}$ o conjunto dos dias do ano. Desta forma como temos mais elementos em $\mathcal{P}$ do que em $\mathcal{C}$, pelo princípio da casa dos pombos, pelo menos duas pessoas fazem aniversário no mesmo dia. ∎

Apesar da simplicidade do princípio da casa dos pombos, em muitos casos não é fácil identificar os conjuntos que precisamos comparar, como pode ser percebido nos próximos exemplos.

Exemplo 2. [4] Mostre que entre nove números que não possuem divisores primos maiores que cinco, existem dois cujo produto é um quadrado.

Inicialmente observe que, qualquer número inteiro que não possui divisor primo maior que cinco, se escreve na forma $2^a3^b5^c$, com a, b e $c \in \mathbb{N}$. Defina um conjunto com 9 números arbitrários, que satisfaça as hipóteses do enunciado: $\mathcal{P} = \{2^{a_1}3^{b_1}5^{c_1}, 2^{a_2}3^{b_2}5^{c_2}, \ldots, 2^{a_9}3^{b_9}5^{c_9}\}$. Como os expoentes a_i, b_i e c_i só podem ser pares ou ímpares, seja $\mathcal{C}$ um conjunto que represente todas as paridades possíveis para os expoentes de 2, 3 e 5 em $2^a3^b5^c$. Este conjunto possui 8 elementos, pois temos duas possibilidades para a paridade de cada um dos 3 expoentes.

Como o conjunto $\mathcal{P}$ é formado por nove elementos, pelo princípio da casa dos pombos, teremos dois elementos em $\mathcal{P}$, cujos expoentes possuem a mesma paridade, digamos que $2^{a_i}3^{b_i}5^{c_i}$ e $2^{a_j}3^{b_j}5^{c_j}$. O produto entre eles é da forma $2^{a_i+a_j}3^{b_i+b_j}5^{c_i+c_j} = 2^{2x}3^{2y}5^{2z}$, que é um quadrado, pois pode ser escrito na forma $(2^x3^y5^z)^2$. ∎

Exemplo 3. (IMO 1972 [6]) Prove que, de qualquer conjunto de dez números naturais distintos de dois dígitos, podemos escolher dois subconjuntos A e B (disjuntos) cuja a soma dos elementos é a mesma em ambos.

Seja S um conjunto com 10 números naturais distintos de dois dígitos. A soma de todos os elementos de S pode ser no máximo 945, no caso em que $S = \{90, 91, \ldots, 99\}$. Considere o conjunto das partes de S, ou seja, o conjunto formado por todos os subconjuntos de S. Este conjunto possui 2^{10} elementos, sendo um deles o conjunto vazio, pois para formar um subconjunto de S, precisamos decidir se cada elemento de S vai pertencer ou não a este subconjunto.

Defina $\mathcal{C} = \{1, 2, \ldots, 945\}$ e $\mathcal{P}$ como o conjunto das partes de S, menos o conjunto vazio. Desta forma $\mathcal{P}$ possui $2^{10} - 1 = 1023$ elementos.

Observe que um elemento de $\mathcal{P}$ é um subconjunto de S e que a soma dos elementos de um elemento de $\mathcal{P}$ será um número que pertence a $\mathcal{C}$. Pelo princípio da casa dos pombos, como temos mais elementos em $\mathcal{P}$ do que em $\mathcal{C}$, pelo menos dois elementos $A, B \in \mathcal{P}$ possuem a mesma soma. Se A e B forem disjuntos, acabou. Se não, considere $A' = A - A \cap B$ e $B' = B - A \cap B$. Logo, os conjuntos A' e B' são disjuntos e a soma dos seus elementos é a mesma. ∎

Uma generalização do princípio da casa dos pombos

Para uma versão mais geral do princípio da casa dos pombos, vamos usar a função teto $\lceil\ \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ dada por $\lceil x \rceil = \min\{z \in \mathbb{Z} | z \geq x\}$, ou seja, é o menor inteiro que é maior ou igual a x. Observe que $\lceil x \rceil < x+1$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 4. $\lceil \frac{1}{2} \rceil = 1$, $\lceil 3.1 \rceil = 4$, $\lceil -\frac{1}{2} \rceil = 0$.

Teorema 1.2. *Se n pombos forem colocados em k casas, então existe pelo menos uma casa contendo pelo menos $\lceil n/k \rceil$ pombos.*

Demonstração: Suponha que nenhuma das casas contém mais que $\lceil n/k \rceil$-1 pombos. Então, o número total de pombos é no máximo

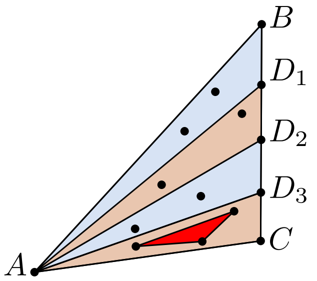
$$k(\lceil n/k \rceil - 1) < k((n/k+1)-1) = n,$$

na qual a desigualdade $\lceil n/k \rceil < (n/k)+1$ foi usada. Esta é uma contradição, pois existem um total de n pombos. ∎

Exemplo 5. Nove pontos são colocados no interior de um triângulo de área $4cm^2$, de forma que não tenha 3 pontos colineares. Mostre que podemos escolher três deles para serem os vértices de um triângulo de área no máximo igual a $1cm^2$.

Sejam A, B e C os vértices do triângulo de área $4cm^2$. Considere três pontos D_1, D_2 e D_3 na arestas BC, de forma que ABD_1, AD_1D_2, AD_2D_3 e AD_3C formem quatro triângulos, cada um com área de $1cm^2$. Desta forma ao colocar os pontos no triâgulo ABC, pelo princípio da casa dos pombos, existem pelo menos $\lceil 9/4 \rceil = 3$ pontos em um dos quatro triângulos: ABD_1, AD_1D_2, AD_2D_3 e AD_3C. Logo os três pontos que estão dentro de um destes 4 triângulos, por não serem colineares, formam um triângulo de área no máximo igual a $1cm^2$.

Na figura a baixo temos uma possibilidade para a distribuição dos pontos.



∎

Exemplo 6. (Putnam 1953, veja [1]) Assuma que em um grupo de 6 pessoas, cada par de pessoas consistem em dois amigos ou dois inimigos. Mostre que ou existem 3 amigos mútuos ou 3 inimigos mútuos.

Seja A uma das 6 pessoas. Sejam $\mathcal{C} = \{\{\text{amigo de } A\}, \{\text{inimigo de } A\}\}$ e $\mathcal{P} = \{B, C, D, E, F\}$ o conjunto com as outras 5 pessoas. Pela versão geral do princípio da casa dos pombos, dividindo as 5 pessoas de $\mathcal{P}$ nos 2 conjuntos de $\mathcal{C}$, um desses conjuntos possui pelo menos $\lceil 5/2 \rceil = 3$ elementos. Então, ou existem 3 ou mais que são amigos de A, ou 3 ou mais que são inimigos de A.

Suponha sem perda de generalidade que B, C e D sejam amigos de A. Se quaisquer duas destas 3 pessoas são amigas, então estas duas pessoas e A formam um conjunto de 3 amigos mútuos. Caso contrário B, C e D formam um conjunto de 3 inimigos mútuos. O outro caso é análogo. ∎

A solução do Exemplo 6, é equivalente a demonstração de que o número de Ramsey $R(3,3) \leq 6$. A Teoria de Ramsey é uma área importante da Combinatória, mais especificamente da teoria dos Grafos. O número de Ramsey, $n = R(v, a)$, é o menor inteiro n tal que o grafo completo bicolorido K_n, nas cores vermelho e azul para arestas, possui um subgrafo completo monocromático vermelho K_v ou um subgrafo completo monocromático azul K_a. Para mais informação sobre a Teoria de Ramsey, veja [5]. Determinar um número de Ramsey em geral é muito difícil e é um problema aberto. Para determinar o número $R(4,5) = 25$, que foi descoberto em 1993, foram necessários 11 anos de tempo de processamento em 110 computadores desktop.

Exercícios Propostos

Exercício 1. ([3]) Vinte e cinco caixas de maçãs foram entregues em uma loja. As maçãs são de três tipos diferentes, mas todas as maçãs em cada caixa são do mesmo tipo. Mostre que pelo menos nove das caixas contêm o mesmo tipo de maçãs.

Exercício 2. Mostre que existem duas potências de 3 cuja diferença é divisível por 2018.

Exercício 3. Cada cédula em uma tabela 3×3 está preenchida com um dos números -1, 0, 1. Prove que, entre as oito somas possíveis ao longo das linhas, colunas e diagonais, duas delas têm que ser iguais.

Exercício 4. (OBM 2008, 3ª fase nível 1) Vamos chamar de garboso o número que possui um múltiplo cujas quatro primeiras casas de sua representação decimal são 2008. Por exemplo, 7 é garboso pois 200858 é múltiplo de 7 e começa com 2008. Observe que $200858 = 28694 \times 7$.

a) Mostre que 17 é garboso.

b) Mostre que todos os inteiros positivos são garbosos.

Exercício 5. (IMO 1985 [6]) Dado um conjunto M com 1985 inteiros positivos distintos, nenhum dos quais tem divisores primos maiores do que 23, mostre que há 4 elementos em M cujo produto é uma quarta potência. Tente resolver o problema trocando 1985 por 1537.

Referências

[1] Kenneth H. Rosen, *Discrete mathematics and its applications*, 4th edition, McGraw-Hill, 1999

[2] A. Morgado, J. Carvalho, P. Carvalho, P. Fernandez, *Análise Combinatória e Probabilidade*, SBM

[3] D. Fomin, S. Genkin, I. Itenberg, *Círculos matemáticos*, IMPA, 2012

[4] K. Oliveira, A. Fernández, *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*, SBM, 1ª edição, 2010

[5] A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1998

[6] http://www.imo-official.org/problems.aspx. Acessado em 12/11/2018.

2. Soluções de Olimpíadas

Nesta edição apresentaremos a resolução de três questões discursivas da prova da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2018 referentes ao nível 1.

Questão 1. Arthurzinho caminhando pela zona da mata pernambucana tropeçou em uma garrafa. Quando a abriu, uma ventania tomou conta do local e diante de si apareceu uma figura com vestimentas vermelhas e uma perna só.

“ Meu salvador, eu me chamo Saci Pererê .
Por livrar-me dessa prisão, irei te dar o meu chapéu mágico.
Ele triplicará toda quantia em reais que depositares em seu interior.
Porém, após cada feitiço, ele transportará 60 reais para mim he he he he!"

Não percebendo o riso malicioso do Saci, Arthurzinho, sem pensar, começou a utilizar o chapéu depositando todo o seu dinheiro sucessivamente três vezes. Ao fim da terceira utilização ele reclamou com o Saci: “Ora bolas, você me deu um chapéu com defeito! Ao invés de ganhar dinheiro, agora estou com apenas 3 reais!"

1. Quantos reais Arthurzinho possuía antes da primeira utilização?

O Saci falou: “He he he! Está bem! Vou te dar uma quantia que poderás utilizar o chapéu tantas vezes quanto quiseres! He he he!"Algumas utilizações depois, Arthurzinho falou para o Saci: “Juntei meus 3 reais com a quantia que você me deu e utilizei seu chapéu mais 47 vezes! E todas as vezes que o utilizei, fiquei sempre com a mesma quantia!"

2. Quantos reais o Saci deu para Arthurzinho?

3. Após os 50 feitiços, com quantos reais o Saci ficou?

4. Ao final dos mesmos 50 feitiços, Arthurzinho teve lucro ou prejuízo? De quanto?

Solução. 1. Seja x a quantia em reais que Arthurzinho possuía antes da primeira utilização. Ao fim da primeira utilização ele fica com $3x - 60$ reais, ao fim da segunda com $9x - 240$ reais e ao fim da terceira com $27x - 780$ reais. Como essa última quantia deve ser igual a 3 reais, temos

$$27x - 780 = 3,$$

o que nos dá $x = 29$ reais.

2. Sendo y a quantia que o saci deu para Arthurzinho, então ele colocou no chapéu $y + 3$ reais. Como sabemos que ele sempre fica com a mesma quantia cada vez que usa o chapéu então basta calcular essa quantidade na primeira vez. Dessa forma, devemos ter

$$3(y + 3) - 60 = y + 3,$$

o que nos dá $y = 27$ reais.

3. Após os 50 feitiços o Saci ficou com um total de $50 \times 60 - 27 = 2973$ reais.

4. Pelo item 2. concluímos que ao final dos 50 feitiços ele ficou com $27 + 3 = 30$ reais. Pelo item 1. ele possuía 29 reais antes da primeira utilização. Assim, ele teve um lucro de 30 - $29 = 1$ real.

$\square$

Questão 2. Letícia deseja criar uma lista com 1010 números da seguinte maneira:

- O primeiro deles será 9;
- Cada número seguinte será obtido adicionando um dos números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ou 9 ao anterior;
- Nenhum dos números da lista terminará em 0.

Qual será o menor valor que o último número da lista poderá ter?

Solução. Uma vez que Letícia pretende obter o menor valor para o último número da lista, a cada número já listado ela deve adicionar o menor valor possível, dentre $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ou 9, para se obter o número posterior.

Como não podemos ter números na lista terminados em 0 e sendo 9 o primeiro número da lista, para se obter o segundo número devemos adicionar 2 ao 9. Logo, o segundo número listado é 11. Seguindo esse raciocínio, os próximos 8 números da lista são obtidos somando 1 ao número anterior. Concluímos que os dez primeiros números da lista são

$$9, 9 + 2 = 11, 11 + 1 = 12, 12 + 1 = 13, 13 + 1 = 14,$$

$$14 + 1 = 15, 15 + 1 = 16, 16 + 1 = 17,$$

$$17 + 1 = 18, 18 + 1 = 19.$$

Como o décimo número da lista é 19, devemos somar 2 a 19 e o décimo primeiro número da lista é 21. Novamente podemos obter os próximos 8 números da lista somando 1 ao número anterior,

$$19 + 2 = 21, 21 + 1 = 22, 22 + 1 = 23, 23 + 1 = 24,$$

$$24 + 1 = 25, 25 + 1 = 26, 26 + 1 = 27,$$

$$27 + 1 = 28, 28 + 1 = 29.$$

Para se obter os próximos 9 números da lista, o processo é análogo ao que foi descrito acima: soma-se 2 ao décimo nono e obtém-se o vigésimo, e os próximos 8 números da lista são obtidos somando 1 ao anterior. Cada vez que repetirmos esse processo obteremos os próximos 9 números da lista.

Assim, podemos dispor os números da lista em linhas sendo a primeira com um único número, 9, e cada linha seguinte com 9 números, conforme esquema abaixo

$$\begin{array}{r} 9 \\ 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 \\ 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 \\ 31, 32, 13, 34, 35, 36, 37, 38, 39 \\ \ldots \end{array}$$

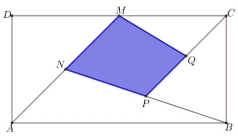
Como o total de números da lista de Letícia é 1010 e $1010 = 112 \cdot 9 + 2$, então esta lista terá 112 linha com 9 números e duas linhas com um único número cada, a primeira com o número 9 e a última com o número que queremos descobrir.

Perceba que o último número da lista ocupará a primeira posição da 114ª linha. Note também que os primeiros números de cada linha a partir da segunda são sempre 10 unidades maiores do que o primeiro número da linha anterior. Assim, o 1010º número da lista será $11 + 112 \cdot 10 = 1131$.

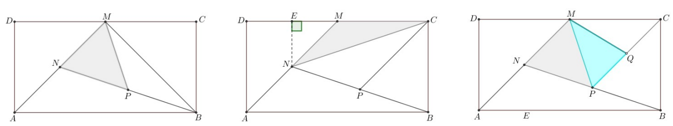
Outra forma é perceber que o último número de cada linha é sempre 10 unidades maior do que último número da linha anterior. Assim, o último número da 113ª linha é $112 \cdot 10 + 9 = 1129$ que é o 1009º número da lista de Letícia. Portanto o 1010º número da lista será $1129 + 2 = 1131$.

$\square$

Questão 3. No retângulo $ABCD$ abaixo, M, N, P e Q são pontos médios, respectivamente de CD, AM, BN e PC. Qual é a razão entre a medida da área do quadrilátero $MNPQ$ com a medida da área do retângulo $ABCD$.



Solução. **Etapa 1.** Denotaremos por $[ABC]$ e $[ABCD]$ a medida das áreas do triângulo ABC e do quadrilátero $ABCD$, respectivamente. Para facilitar o entendimento, considere as seguintes figuras.



Usando a figura da esquerda, temos que os triângulos ΔABN e ΔNBM possuem a mesma área, pois $\overline{AN}$ e $\overline{NM}$ possuem a mesma medida, e as alturas relativas aos lados $\overline{MN}$ e $\overline{AM}$ são as mesmas.

Além disso, observe que os triângulos ΔAMD e ΔBMC são congruentes. Podemos concluir então que:

$$[AMD] = [ABN] = [BCM] = [NMB] = \frac{1}{4}[ABCD].$$

Etapa 2. Analogamente, como $\overline{NP}$ e $\overline{BP}$ têm a mesma medida e o os triângulo ΔNPM e ΔPBM possuem a mesma altura relativas às bases $\overline{NP}$ e $\overline{BP}$ respectivamente, então

$$[NPM] = [PBM] = \frac{1}{8}[ABCD].$$

Etapa 3. Agora usando a figura do meio acima, a semelhança dos triângulos ΔADM e ΔNEM, nos dá

$$\begin{aligned} [NCM] &= \frac{1}{2}(NE \cdot MC) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{AD}{2} \cdot \frac{CD}{2}\right) \\ &= \frac{1}{8}[ABCD]. \end{aligned}$$

Etapa 4. Ainda, como as medidas de $\overline{NP}$ e $\overline{PB}$ são iguais e a altura dos triângulos ΔNPC e ΔPBC, em relação às bases $\overline{NP}$ e $\overline{PB}$, respectivamente, é a mesma, segue que $[NPC] = [PBC]$. Logo, como $[NBCM] = \frac{1}{2}[ABCD]$, obtemos

$$\begin{aligned} [NPC] = [PBC] &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)[ABCD] \\ &= \frac{3}{16}[ABCD] \end{aligned}$$

e

$$[NPCM] = \frac{5}{16}[ABCD].$$

Etapa 5. Finalmente, usando a figura da direita, temos, pela primeira parte, que $[NPM] = \frac{1}{8}[ABCD]$. Como $[PQM] = [QCM]$ e usando que $[NPCM] = \frac{5}{16}[ABCD]$, obtemos

$$\begin{aligned} [PQM] = [QCM] &= \frac{1}{2}([NPCM] - [NPM]) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{16} - \frac{1}{8}\right)[ABCD] \\ &= \frac{3}{32}[ABCD]. \end{aligned}$$

Etapa 6. Portanto,

$$\begin{aligned}[NPQM] &= [NPM]+[PQM]\\ &= \frac{1}{8}[ABCD]+\frac{3}{32}[ABCD]\\ &= \frac{7}{32}[ABCD],\end{aligned}$$

donde,

$$\frac{[NPQM]}{[ABCD]}=\frac{7}{32}.$$

□

3. Curiosidades

Lista de Discussão da OBM

Por Gabriel Guedes [2]

Você sabia que existe uma lista de discussão de problemas de matemática olímpica, no qual você pode perguntar suas dúvidas, mostrar suas soluções e muito mais. Esta lista é inteiramente gratuita e qualquer pessoa que possua um e-mail pode participar. Dela participam vários medalhistas da IMO como o Nicolau, o Gugu e o Ralph. Alunos em preparação de todo o país e professores com larga bagagem em treinamento olímpico. Essa lista também tem um arquivo de todas as mensagens já trocadas entre os participantes, assim muitas de suas dúvidas podem ser sanadas consultando esse arquivo.

Portanto se você está estudando para competições de matemática, ou apenas quer ter acesso a esse ambiente que é de ciência, porém bem descontraído. Acesse já o site https://www.obm.org.br/como-se-preparar/lista-de-discussao/ e veja as instruções de como se inscrever neste fórum.

4. Indicações de Leituras

ENZENSBERGER, Hans Magnus. **O diabo dos números.** São Paulo - Companhia das Letras - 2009.

Everton Henrique Cardoso de Lira[3]

Se você está lendo este texto provavelmente você não é uma pessoa que tem sérios problemas ou grandes traumas com a matemática, porém, infelizmente, esta ainda não é a realidade de boa parte das pessoas. Independente de idade, classe social, sexo ou raça é sempre comum encontrarmos pessoas que veêm esta bela e agradável ciência como uma terrível e horrorosa vilã, que tem como único objetivo de sua existência, tornar suas vidas um pesadelo. Foi precisamente sobre este temor, injustificável diga-se de passagem, que o acadêmico alemão de sobrenome difícil, Hans Magnus Enzensberger se baseou para escrever o incrível livro sobre o qual fazemos estes breves comentários.

Em “O diabo dos números”, temos a história da curiosa e improvavél, porém exitosa, relação de discipulado e amizade entre um menino chamado Robert, com provavelmente, os mais sérios distúrbios do sono que você já viu, e um velho carrancudo e irascível, porém às vezes amigável, simplesmente conhecido como diabo dos números que se compraz em ensinar as belezas e sutilezas da temível matemática, na visão de Robert, de uma forma que só poderia ocorrer mesmo em sonhos.

O grande diferencial desta história é que em vez de “suavisar as coisas”, nos mostrando a matemática pela ótica do herói ou do bom moço, Enzensberger escolhe justamente o caminho oposto, nos guiando pelos tortuosos, porém fascinantes caminhos da matemática pela ótica do vilão, ou melhor dizendo, do anti herói que ele “afetuosamente” apelidou de diabo dos números.

O diabo dos números se apresenta sempre vestido elegantemente com seu terno vermelho, seus óculos de armação redondas e sua bengala que possui o curioso poder de escrever no ar; eventualmente, ele aparece fumando o seu cachimbo. Durante um período de doze noites, ele faz visitas ao pequeno Robert que, vestido apenas com seu pijama listrado, acompanha com curiosidade e aten-

[2]Professor do Departamento de Matemática da UFRPE
[3] Professor da Secretaria de Educação de Pernambuco. Email: everton.ufpe@hotmail.com

ção cada vez maiores os preciosos ensinamentos do seu mestre na sua jornada em direção ao conhecimento e, mais do que isso, à apreciação da beleza matemática.

Durante as doze noites o diabo dos números guia Robert por diversos cenários surreais e curiosos, por trás dos quais sempre há uma lição sobre algum tópico interessante da matemática. Em um momento, para que o diabo dos números ensine Robert sobre os números de Fibonacci, ele deixa a cabeça de Robert em parafusos após fazer surgir milhares de coelhos diante de Robert e logo em seguida, os fazer desaparecer tão breve quanto surgiram. Em outra situação ele leva Robert a uma praia e lá de cima de um coqueiro o garoto aprende os números triangulares. É neste ritmo que eles passam as noites nos sonhos de Robert, até que por fim, este é introduzido ao palácio da matemática e lá tem a oportunidade de conhecer figuras ilustres como Pitágoras, Euclides, Euler, Gauss, dentre outros.

Enfim, seja você um amante ou mesmo alguém que apenas tolera a matemática por saber que ela é, de alguma forma, importante para as pessoas e a sociedade como um todo, este livro é para você. Com certeza ele vai ampliar seus horizontes e te mostrar um aspecto da matemática que talvez, até então, você não tenha considerado.

5. Quem pergunta, quer saber!

Na Revista do professor de Matemática (RPM nº 1, p.5), o professor Elon Lages Lima se refere à indagação **Zero é um número natural?** como uma dentre "algumas perguntas que me foram feitas, em diferentes ocasiões e lugares, por pessoas interessadas em Matemática".

Resposta do professor Elon:

Sim e não. Incluir ou não o número 0 no Conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é uma questão de preferência pessoal ou, mais objetivamente de conveniência. O mesmo professor ou autor pode, em diferentes circunstâncias escrever $0 \in \mathbb{N}$ ou $0 \notin \mathbb{N}$. Como assim? Consultemos um tratado de Álgebra. Praticamente em todos eles encontramos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Vejamos um livro de Análise. Lá acharemos quase sempre $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Por que essas preferências? É natural que um autor de um livro de Álgebra, cujo principal interesse é o estudo das operações, considere zero como um número natural pois isto lhe dará um elemento neutro para a adição de números naturais e permitirá que a diferença $x - y$ seja uma operação com valores em $\mathbb{N}$ não somente quando $x > y$ mas também se $x = y$. Assim, quando o algebrista considera zero como um número natural, está facilitando a sua vida, eliminando algumas exceções.

Por outro lado, em Análise, os números naturais ocorrem muito frequentemente como índices de termos de uma sequência. Uma sequência (digamos, de números reais) é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. O valor que a função x assume no número natural n é indicado com a notação x_n (em vez de $x(n)$) e é chamado o "n-ésimo termo" da sequência. A notação $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ é usada para representar a sequência. Aqui, o primeiro termo da sequência é x_1 , o segundo é x_2 e assim por diante. Se fôssemos considerar $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ então a sequência seria $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, na qual o primeiro termo é x_0, o segundo é x_1 ,etc. Em geral, x_n , não seria o n-ésimo e sim o $(n+1)$-ésimo termo. Para evitar esta discrepância, é mais conveniente tomar o conjunto dos números naturais como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Para encerrar este tópico, uma observação sobre a nomenclatura matemática. Não adianta encaminhar a discussão no sentido de examinar se o número zero é ou não "natural" (em oposição a "artificial"). Os nomes das coisas em Matemática não são geralmente escolhidos de modo a transmitirem uma ideia sobre o que devem ser estas coisas. Os exemplos abundam: um número "imaginário" não é mais nem menos existente do que um número "real" ; "grupo" é uma palavra que não indica nada sobre o seu significado matemático e, finalmente, "grupo simples" é um conceito extremamente complicado, a ponto de alguns dos seus exemplos mais famosos serem chamados (muito justamente) de “monstros”.

6. Eventos

Este é um ano importantíssimo para a matemática no que diz respeito a grandes eventos realizados no Brasil.

Fiquem Ligados!!!

- **II SENALEM- O 2º Seminário Nacional de Linguagem e Educação Matemática**
  - Local: Universidade do Estado do Rio de Janeiro
  - Data: 03 a 06 de Setembro de 2018
  - Mais informações: http://ii.senalem.ime.uerj.br/
- **XLVIII PROGRAMA DE VERÃO da USP**
  - Local: Instituto de Matemática e Estatística da USP
  - Data: De 7 de Janeiro a 15 de Fevereiro de 2019
  - Mais informações: https://www.ime.usp.br/verao/index.php
- **Escola de Verão do Departamento de Matemática da UFPB**
  - Local: Universidade Federal da Paraíba
  - Data: De 07 de janeiro a 30 de março de 2019
  - Mais informações: http://www.mat.ufpb.br/verao/
- **49º Programa de Verão do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco**
  - Local: Universidade Federal de Pernambuco
  - Data: de 08 de janeiro a 28 de fevereiro de 2019
  - Mais informações: https://www3.ufpe.br/capistranofilho/
- **ICMC Summer Meeting on Differential Equations**
  - Local: Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação Universidade de São Paulo, Campus São Carlos
  - Data: 4 e 6 de fevereiro de 2019
  - Mais informações: http://summer.icmc.usp.br/summers/summer19/pg_announcement.php
- **IX Bienal de Matemática**
  - Local: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE - campus Juazeiro do Norte
  - Data: De 25 a 28 de fevereiro de 2019
  - Mais informações: https://www.sbm.org.br/bienal/

7. Problemas

Para concluir deixamos para o leitor alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Problema 1. Mostre que se p é um número primo diferente se 2, então ele pode ser escrito da forma $4k \pm 1$, com $k \in \mathbb{Z}_+^*$.

Problema 2 (XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - Segunda Fase - Nível 2)**.** Dizemos que dois ou mais números, com a mesma quantidade de algarismos, são membros da mesma família, quando todos possuem pelo menos um algarismo em comum. Por exemplo, os números 32, 25 e 22 pertencem à mesma família, enquanto que 123, 245 e 568 não pertencem à mesma família, pois

123 e 568 não pertencem à mesma família. Qual é a maior quantidade de membros de uma família, cujos elementos têm três algarismos?

Problema 3. Alice escreveu 2018 números naturais, com pelo menos 3 algarismos, em um quadro negro. Ela percebeu que o resultado da soma de todos esses números é um natural impar. Alice começou a fazer a seguinte brincadeira pega um número apaga seu digito da unidade, multiplica o número obtido por dois e deste subtrai o algarismo da unidade. isto é, se Alice pega o número 157, assim o resultado obtido será $2 \cdot 15 - 7 = 23$. Mostre que, após Alice fazer essa brincadeira com todos os números que estavam no quadro, a soma desses novos números é ainda um número impar.

Mandem soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, sua solução deve ser enviada até **01/02/2019**.

---

8. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n.7, Junho de 2018**.

Problema 1. Chamamos um polinômio mônico de peculiar se seus coeficientes estão em progressão aritmética e suas raízes são inteiras. Por exemplo o polinômio $x^2 - 1$ tem coeficientes $1, 0, -1$ e raízes $1, -1$, portanto é peculiar. Encontre todos os polinômios peculiares de grau 2. Mostre que não existem polinômios peculiares de grau 3.

Solução. Usando a primeira informação do problema que nos diz que os coeficientes estão em progressão aritmética. Temos que dado o polinômio $p(x) = x^2 + ax + b$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_1 + r = a \\ a_1 + 2r = b \end{cases}$$

do qual extraímos a relação

$$1 + b = 2a.$$

A segunda informação do problema é que as raízes são inteiras. Seja $r, s \in \mathbb{Z}$ estas raízes. Então pelas relações de Girard

$$\begin{cases} r + s = -a \\ rs = b \end{cases}$$

e substituindo na equação encontrada $1 + rs = -2r - 2s$ que é igual $rs + 2r + 2s = -1$ somando 4 aos dois lados dessa equação $rs + 2r + 2s + 4 = 3$ a qual pode ser fatorada como

$$(r + 2)(s + 2) = 3.$$

A qual nos dá duas possibilidades

$$\begin{cases} r + 2 = 1 \\ s + 2 = 3 \end{cases}$$

A qual nos dá a solução $r = -1, s = 1$ que implica $p(x) = x^2 - 1$. E o outro caso

$$\begin{cases} r + 2 = -1 \\ s + 2 = -3 \end{cases}$$

$r = -3$ e $s = -5$ o que implica em $p(x) = x^2 - 8x + 15$.

Para o segundo item, dos polinômios de grau 3 vamos seguir a mesma linha de raciocínio. Assim, seja $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, escrevendo as condições dos coeficientes estarem em progressão aritmética:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_1 + r = a \\ a_1 + 2r = b \\ a_1 + 3r = c \end{cases}$$

do qual extraímos as seguintes relações:

$$\begin{cases} 1 + b = 2a \\ a + c = 2b \end{cases}$$

Supondo que as raízes inteiras são $r, s, t \in \mathbb{Z}$. Escrevemos as relações de Girard como:

$$\begin{cases} r + s + t = -a \\ rs + rt + st = b \\ rst = -c \end{cases}$$

substituindo no par de equações anterior:

$$\begin{aligned} 1 + rs + rt + st &= -2(r + s + t) \qquad (1) \\ r + s + t + rst &= -(rs + rt + st) \qquad (2) \end{aligned}$$

isolando t na primeira equação acima:

$$t = -\frac{rs + 2r + 2s + 1}{r + s + 2}$$

substituindo na segunda:

$$-r^2s^2 - 2r^2s - 2rs^2 + r^2 + s^2 - 1 = 4r^2 + 4rs + 4s^2 + 2r + 2s$$

passando todos os termos para o lado direito da equação

$$0 = 3r^2 + 4rs + 3s^2 + 2r + 2s + r^2s^2 + 2r^2s + 2sr^2 + 1$$

que podemos simplificar

$$0 = 2r^2 + r^2(s^2 + 2s + 1) + 2r(s^2 + 2s + 1) + (s^2 + 2s + 1) + 2s^2$$

que é igual

$$0 = 2(r^2 + s^2) + (r + 1)^2(s + 1)^2$$

a qual claramente não tem solução real.

□

Problema 2 (Questão A3- 52nd IMO 2011)**.** Determine todos os pares (f, g) de funções do conjunto dos números reais para si mesmo que satisfaçam

$$g(f(x + y)) = f(x) + (2x + y)g(y)$$

para todos números reais x e y.

Solução. Tanto f quanto g são identicamente nulas, ou existe um número real C tal que $f(x) = x^2 + C$ e $g(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Claramente, todos esses pares de funções satisfazem a equação funcional em questão, é suficiente então verificar que não pode haver outros.

Para vermos isso, note que substituindo y por $-2x$ na equação funcional dada, temos que

$$g(f(-x)) = f(x). \qquad (3)$$

Usando esta equação para $-x - y$ no lugar de x, obtemos

$$f(-x-y) = g(f(x+y)) = f(x) + (2x+y)g(y). \qquad (4)$$

Agora, para quaisquer dois números reais arbitrários a e b definindo $x = -b$ e $y = a + b$ chegamos que

$$f(-a) = f(-b) + (a - b)g(a + b).$$

Se c denota outro número real arbitrário, temos similarmente que

$$f(-b) = f(-c) + (b - c)g(b + c),$$

assim como $f(-c) = f(-a) + (c - a)g(c + a)$.

Somando todas estas equações, obtemos

$$\begin{aligned} &(a + c) - (b + c))g(a + b) + ((a + b) \\ &-(a + c))g(b + c) + ((b + c) - (a + b))g(a + c) = 0. \end{aligned}$$

Agora, dados quaisquer três números reais x, y e z, pode-se determinar três números reais a, b e c tais que $x = b + c$, $y = c + a$, e $z = a + b$, para que possamos obter

$$(y-x)g(z)+(z-y)g(x)+(x-z)g(y)=0.$$

Isto implica que os três pontos $(x,g(x))$, $(y,g(y))$ e $(z,g(z))$ do gráfico de g são colineares. Portanto, esse gráfico é uma linha, isto é, g é uma função constante ou linear.

Vamos escrever $g(x)=Ax+B$, onde A e B são dois números reais. Substituindo (x,y) por $(0,-y)$ em (4) e denotando $C=f(0)$, temos $f(y)=Ay^2-By+C$. Agora, comparando os coeficientes de x^2 em (3), vemos que $A^2=A$, então $A=0$ ou $A=1$.

Se $A=0$, então (3) torna-se $B=-Bx+C$ e, portanto, $B=C=0$, que fornece a primeira dos duas soluções mencionadas acima.

Agora suponha que $A=1$. Então (3) torna-se $x^2-Bx+C+B=x^2-Bx+C$, então $B=0$. Assim, $g(x)=x$ e $f(x)=x^2+C$, que é a segunda das soluções mencionadas acima.

$\square$

Problema 3 (ENC - 2001)**.** Um número $a\in\mathbb{N}$ é dito *quadrado perfeito* quando existir $n\in\mathbb{Z}$ tal que $n^2=a$. Mostre que um número quadrado perfeito nunca deixa resto 2 na divisão por 6.

Solução. Seja $a\in\mathbb{N}$ tal que $a=n^2$. Pelo algorítimo da divisão euclideana, existem únicos $q,r\in\mathbb{Z}$ tais que

$$n=6q+r$$

onde r pode ser 0, 1, 2, 3, 4, 5. Dessa forma

$$\begin{aligned} a &= (6q+r)^2 \\ &= 36q^2+12qr+r^2 \\ &= 6Q+r^2 \end{aligned}$$

onde $Q=6q^2+2qr$. Dessa forma, se n deixa resto r na divisão por 6, a deixará resto r^2. Logo

- $r=3$

$$\begin{aligned} a &= 6Q+9 \\ &= 6Q+6+3 \\ &= 6(Q+1)+3 \end{aligned}$$

- $r=4$

$$\begin{aligned} a &= 6Q+16 \\ &= 6Q+12+4 \\ &= 6(Q+2)+4 \end{aligned}$$

- $r=5$

$$\begin{aligned} a &= 6Q+25 \\ &= 6Q+24+1 \\ &= 6(Q+4)+1 \end{aligned}$$

$\square$