É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

2018- Número 8, volume 1, Setembro de 2018

ISSN 2526-8651

Sumário

1. Artigo

Duas provas probabilísticas para o Teorema das Colunas

Iesus Carvalho Diniz e Juan Alberto Rojas Cruz

UFRN - CCET - Departamento de Matemática

59.078-970 - Natal-RN - Brasil

Introdução

O *Triângulo de Pascal* e os *Coeficientes Binomiais* são temas dos mais abordados no ensino médio e apresentam-se como ferramentas importantes com muitas aplicações e extensões em diversas áreas da matemática: combinatória, teoria das probabilidades e análise matemática.

Os primeiros registros de uma recorrência aditiva entre números binomiais devem-se ao matemático indiano Pingala (século segundo a.C.), cujo trabalho recebeu mais formalizações de outros matemáticos indianos: Varãhamihira (505 d.C.), Mahavira (850 d.C.), Halayudna (975 d.C.) e Bhattotpala (1068 d.C.) que apresentou pela primeira vez fórmulas aditivas e multiplicativas para números binomiais. O matemático persa Al-Karaji (953 - 1029 d.C.) fez a primeira descrição do Triângulo de Pascal apresentando várias de suas propriedades, entre elas a primeira formulação do teorema binomial. O Triângulo de Pascal já era conhecido também na China do século XI d.C. graças ao trabalho do matemático Jia Xian (1010-1070 d.C.). O também matemático Chinês Yang Hui (1238 - 1298 d.C.) descreveu o triângulo, fato que fez com que fosse denominado na China até os dias atuais de triângulo de Yang Hui. O matemático italiano Tartaglia (1500 - 1577 d.C.) descreveu as seis primeiras linhas do triângulo de Pascal em 1556, razão pela qual é chamado de Triângulo de Tartaglia na Itália. Blaise Pascal (1623 - 1662 d.C.) coletou vários resultados conhecidos do triângulo e os empregou para resolver problemas de probabilidade, tendo sua obra "Traité du triangle arithmétique" sido postumamente publicada em 1665.

Apresentamos neste artigo duas provas probabilísticas para a *Identidade Combinatória de Fermat* ou *Teorema das Colunas do Triângulo de Pascal*, isto é, para todo u e $v \in \mathbb{N}$

$$\sum_{w=0}^{v}\binom{u+w}{u} = \binom{u+0}{u}+\binom{u+1}{u}+\ldots+\binom{u+v}{u} = \binom{u+v+1}{u+1}, \tag{1}$$

que não são usualmente encontradas, visto que as provas mais comuns de (1) são pelo princípio da indução finita [7] e [12], via argumento combinatório [5] e [12], de maneira recursiva a partir da relação de Stifel [1] e [8] ou inteiramente algébrica [2] e [12].

Desenvolvimento

Nas duas subseções seguintes faremos uso de ferramentas combinatórias e probabilísticas para demonstrarmos o Teorema das Colunas do Triângulo de Pascal. As demonstrações mostram-se interessantes por apresentarem uma prova diferente da que é geralmente feita, mas também por envolver conceitos tais como: número de soluções inteiras e não negativas de uma equação, probabilidade de eventos, subaditividade da probabilidade e argumentos probabilísticos.

Prova 1

Considere um experimento aleatório que consiste em distribuir k ($k \geq 0$) bolas indistinguíveis em n ($n \geq 2$) urnas distinguíveis. O espaço amostral Ω é o conjunto de todas as possíveis configurações de distribuições das bolas nas urnas, em que uma configuração diferenciará da outra apenas pela quantidade de bolas em cada uma das urnas. Assim, se para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ denotarmos por X_i a quantidade de bolas na urna i, a cardinalidade do espaço amostral, $|\Omega|$, será dada pelo número de soluções inteiras e não negativas da equação $X_1+X_2+\ldots+X_n = k$, ou seja,

$$|\Omega| = \binom{n-1+k}{n-1}. \tag{2}$$

Para todo $j \in \{0,\ldots,n\}$, seja A_j o evento de que a urna um contém j bolas. A urna um conterá j bolas, se e somente se, as outras $k-j$ bolas foram distribuídas nas demais $n-1$ urnas, e o total de maneiras deste evento ocorrer corresponde ao número de soluções inteiras não negativas de $X_2+\ldots+X_n = k-j$, assim

$$|A_j| = \binom{n-2+k-j}{n-2}, \tag{3}$$

e desde que todas as distribuições de bolas nas urnas têm a mesma chance de ocorrer, segue-se de (3) e (2) que

$$\mathbb{P}(A_j) = \frac{\binom{n-2+k-j}{n-2}}{\binom{n-1+k}{n-1}}. \tag{4}$$

Desde que os eventos A_j são disjuntos e a união deles é o espaço amostral Ω, segue-se que a probabilidade da união destes eventos vale um e é dada pela soma das probabilidades de cada um deles, ou seja,

$$\mathbb{P}\left(\cup_{j=0}^{k} A_j\right) = \sum_{j=0}^{k}\mathbb{P}(A_j) = \mathbb{P}(\Omega) = 1. \tag{5}$$

De (4) em (5) segue-se o resultado estabelecido em (1) para $u = n-2$ e $v = k$, pois fazendo-se a mudança de variável com $w = k-j$, tem-se que

$$\sum_{j=0}^{k}\frac{\binom{n-2+k-j}{n-2}}{\binom{n-1+k}{n-1}} = 1 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{k}\binom{n-2+k-j}{n-2} = \binom{n-1+k}{n-1}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{w=0}^{k}\binom{n-2+w}{n-2} = \binom{n-2}{n-2}+\ldots+\binom{n-2+k}{n-2} = \binom{n-2+k+1}{n-2+1}.$$

$\square$

Prova 2

Uma urna contem $m+n$ bolas, m brancas e n pretas, com as bolas da mesma cor sendo indistinguíveis. Considere o experimento de se extrair uma bola por vez, e sem reposição da bola selecionada na urna, até que a urna fique vazia. O espaço amostral é o conjunto de todas as possíveis sequências de extrações das bolas brancas e pretas, e sua cardinalidade é

$$|\Omega| = \binom{n+m}{m} = \frac{(n+m)!}{n!m!}. \tag{6}$$

Para todo $i \in \{1, \ldots, n+m\}$ definamos os eventos B_i se a i-ésima bola extraída da urna é branca. Tem-se que a cardinalidade de B_i é igual ao número de permutações de $m-1$ bolas brancas e n bolas pretas, pois a i-ésima posição está ocupada por uma bola branca e restam $m-1$ bolas brancas e n pretas para as demais posições, e portanto

$$\mathbb{P}(B_i) = \frac{\binom{n-1+m}{n}}{\binom{m+n}{n}} = \frac{m}{m+n}, \tag{7}$$

em particular,

$$\mathbb{P}(B_{n+m}) = \frac{\binom{n-1+m}{n}}{\binom{m+n}{n}}.$$

Notemos que o evento B_{n+m}, correspondente a última bola extraída ser branca, ocorrer é equivalente ao evento R de só restarem bolas brancas na urna após algumas extrações. Que R é suficiente para B_{n+m} é imediato, pois se só restam bolas brancas a última é branca. Para verificarmos que B_{n+m} é suficiente para R, consideremos uma partição de B_{n+m} em relação aos eventos $L_i :=$ a última bola preta é extraída na etapa i, em que $i \in \{n, \ldots, n+m-1\}$, pois desde que B_{n+m} ocorre a última bola preta poderá aparecer em uma e somente uma das extrações $\{n, \ldots, n+m-1\}$. Assim,

$$B_{n+m} = \cup_{i=n}^{n+m-1} L_i = L_n \cup L_{n+1} \cup \ldots \cup L_{n+m-1}. \tag{8}$$

O evento L_i ocorre se, e somente se, temos $n-1$ bolas pretas e $i-n$ bolas brancas nas $i-1$ primeiras extrações, logo

$$\mathbb{P}(L_i) = \frac{\binom{i-n+n-1}{n-1}}{\binom{m+n}{n}} = \frac{\binom{i-1}{n-1}}{\binom{m+n}{n}} \tag{9}$$

$\forall i \in \{n, \ldots, n+m-1\}$.

De (8) e (9), desde que os L_i são disjuntos, segue-se que

$$\mathbb{P}(B_{n+m}) = \mathbb{P}\left(\cup_{i=n}^{n+m-1} L_i\right) = \sum_{i=n}^{n+m-1} \frac{\binom{i-1}{n-1}}{\binom{m+n}{n}}. \tag{10}$$

De (10) e (7) segue o resultado estabelecido em (1) para $u = n-1$ e $v = m-1$, pois fazendo-se a mudança de variável com $w = i-n$, tem-se que

$$\sum_{i=n}^{n+m-1} \frac{\binom{i-1}{n-1}}{\binom{m+n}{n}} = \frac{\binom{n-1+m}{n}}{\binom{m+n}{n}} \Leftrightarrow \sum_{i=n}^{n+m-1} \binom{i-1}{n-1} = \binom{n-1+m}{n}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{w=0}^{m-1} \binom{n-1+w}{n-1} = \binom{n-1}{n-1} + \ldots + \binom{n-1+m-1}{n-1}$$
$$= \binom{n-1+m-1+1}{n-1+1}.$$

□

Exemplos

Problema 1 (IMO-1981 [10])**.** Seja $1 \leq r \leq n$ e considere todos os subconjuntos de tamanho r do conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Cada um desses subconjuntos tem o menor elemento. Seja $F(n, r)$ a média aritmética destes mínimos. Prove que

$$F(n, r) = \frac{n+1}{r+1}.$$

Solução: Sejam $I_n := \{1, \ldots, n\}$ e $\mathcal{S}(k, r)$ a família dos subconjuntos de I_n de tamanho r cujo menor elemento é k, em que $k \in \{1, \ldots, n-r+1\}$. Note que:

- k pode ser no máximo igual a $n-r+1$, situação que ocorre quando selecionamos o subconjunto formado pelos r maiores elementos de I_n, isto é, $\{n-r+1, \ldots, n\}$.

- Quanto menor o valor assumido por k, mais subconjuntos existem. Assim, $k = j$ se, e somente se, escolhermos $r-1$ elementos de $\{j+1, \ldots, n\}$ e $|\mathcal{S}(j, r)| = \binom{n-(j+1)+1}{r-1} = \binom{n-j}{r-1}$. Logo,

$$|\mathcal{S}(k,r)| = \binom{n-k}{r-1} \tag{11}$$

$\forall\ k \in \{1, \ldots, n-r+1\}$.

Desde que há um total de $\binom{n}{r}$ subconjuntos de tamanho r de I_n, segue-se então que $F(n,r)$ (média aritmética dos mínimos dos suconjuntos de tamanho r obtidos de I_n) é dada por

$$F(n,r) = \frac{\sum_{k=1}^{n-r+1} k|\mathcal{S}(k,r)|}{\binom{n}{r}} = \frac{\sum_{k=1}^{n-r+1} k\binom{n-k}{r-1}}{\binom{n}{r}}. \tag{12}$$

Acontece que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-r+1} k\binom{n-k}{r-1} &= 1\binom{n-1}{r-1} + 2\binom{n-2}{r-1} + \ldots + (n-r+1)\binom{n-(n-r+1)}{r-1}\\ &= (n-r+1)\binom{r-1}{r-1} + \ldots + 2\binom{n-2}{r-1} + 1\binom{n-1}{r-1}\\ &= \binom{r-1}{r-1} + \ldots\ldots\ldots + \binom{n-3}{r-1} + \binom{n-2}{r-1} + \binom{n-1}{r-1}\\ &+ \binom{r-1}{r-1} + \ldots\ldots\ldots + \binom{n-3}{r-1} + \binom{n-2}{r-1}\\ &+ \binom{r-1}{r-1} + \ldots\ldots\ldots + \binom{n-3}{r-1}\\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots\\ &+ \binom{r-1}{r-1} + \binom{r}{r-1}\\ &+ \binom{r-1}{r-1}.\end{aligned}$$

De (1) a cada uma das $n-r$ "linhas" da soma acima (à exceção da última linha) e notando-se que $\binom{r-1}{r-1} = \binom{r}{r}$, segue-se que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-r+1} k\binom{n-k}{r-1} &= \binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \ldots + \binom{r+1}{r} + \binom{r}{r}\\ &= \binom{n+1}{r+1}.\end{aligned} \tag{13}$$

De (13) em (12) segue-se o resultado, pois

$$F(n,r) = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1}.$$

□

Problema 2. (Veja [8]) Calcule o valor da soma

$$S = 50.51 + 51.52 + 52.53 + \cdots + 100.101$$

Solução: Dividindo os dois membros da igualdade $S = 50.51 + 51.52 + 52.53 + \cdots + 100.101$, por $2!$, segue-se que:

$$\frac{S}{2!} = \frac{51.50}{2!} + \frac{52.51}{2!} + \frac{53.52}{2!} + \cdots + \frac{101.100}{2!}$$

e lembrando que para cada inteiro não negativo n tem-se $\binom{n}{2} = \frac{n.(n-1)}{2!}$, tem-se que:

$$\frac{S}{2!} = \binom{51}{2} + \binom{52}{2} + \binom{53}{2} + \cdots + \binom{101}{2}$$

Por outro lado, pelo teorema das colunas do triângulo de Pascal, temos:

$$\underbrace{\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{50}{2}}_{=\binom{51}{3}} + \underbrace{\binom{51}{2} + \binom{52}{2} + \cdots + \binom{101}{2}}_{=\frac{S}{2!}} = \binom{102}{3}$$

Assim,

$$\frac{S}{2!} = \binom{102}{3} - \binom{51}{3}$$

$$\Rightarrow S = 2\left[\binom{102}{3} - \binom{51}{3}\right] = 301750.$$

□

Problema 3. (Veja [4]) Qual o coeficiente de x^2 em $p(x) = (1+x) + (1+x)^2 + \ldots + (1+x)^{100}$.

Solução: Tem-se que $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, assim o coeficiente do termo em x^2 de $p(x)$ será dado pela soma

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \ldots + \binom{100}{2} = \binom{101}{3}.$$

□

Problemas Propostos

Problema 4 (XXIV OBM - Terceira fase - Nível 3 [6])**.** Definimos o diâmetro de um subconjunto não vazio de $\{1, 2, ..., n\}$ como a diferença entre seu maior elemento e seu menor elemento (em módulo). Calcule a soma dos diâmetros de todos os subconjuntos não vazios de $\{1, 2, ..., n\}$.

*R*esposta: $(n-3)2^n + n + 3$.

Problema 5 (XII Olimpíada Iberoamericana de Matemática [9]). Seja n um inteiro positivo. Consideremos a soma $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$, onde os valores que podem tomar as variáveis $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ são, unicamente, 0 e 1. Sejam $I(n)$ e $P(n)$, respectivamente, o número de $2n$-uplas $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ para as quais o valor da soma é um número ímpar e par. Prove que

$$\frac{P(n)}{I(n)} = \frac{2^n+1}{2^n-1}.$$

Problema 6 (An Excursion through Elementary Mathematics, Volume III [3]). Sejam n e k inteiros positivos, com $n \geq k$. Prove que é 1 o mdc dos números binomiais

$$\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \ldots, \binom{n+k}{k}.$$

Problema 7 (Baltic Mathematical Competition - 2002 [11]). Mostre que a sequência

$$\binom{2002}{2002}, \binom{2003}{2002}, \binom{2004}{2002}, \ldots$$

é periódica módulo 2002.

Problema 8 (Obmep [2]). Encontre o valor da soma $A = \binom{9}{3} + \binom{10}{3} + \ldots + \binom{20}{3}$

*R*esposta: $\binom{21}{4} - \binom{9}{4}$.

Problema 9 (Obmep [2]). Encontre o valor da soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos, isto é, $Q(n) = \sum_{j=1}^{n} j^2$.

*R*esposta: $Q_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Problema 10. (UERJ-Adaptado) Em uma barraca de frutas, as laranjas são arrumadas em camadas retangulares, obedecendo à seguinte disposição: uma camada de duas laranjas encaixa-se sobre uma camada de seis; essa camada de seis encaixa-se sobre outra de doze; e assim por diante, conforme a ilustração abaixo.

Determine o número de laranjas que compõem 15 camadas.

*R*esposta: 1360.

Problema 11. Determine o número de soluções inteiras não-negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 100$.

*R*esposta: $\binom{104}{4}$.

Agradecimentos

Agradecemos ao professor Israel Dourado da Organização Educacional Farias Brito pela sugestão dos problemas 4 e 5.

Referências

[1] Brualdi, R. *Introductory combinatorics* Fifthy edition - Pearson Education - pag 138/139.

[2] https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/bq7giqu87bk8w.pdf Acessado em 24/05/2018.

[3] Caminha, A. M. N. *An Excursion through Elementary Mathematics, Volume III: Discrete Mathematics and Polynomial Algebra* First edition - Springer.

[4] Koh, K. M. and Tay, E. G. *Counting* Second edition - World Scientific Publishing Company.

[5] http://www.math.uvic.ca/faculty/gmacgill/guide/combargs.pdf Acessado em 12/05/2018.

[6] https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka16.pdf Acessado em 11/04/2018.

[7] Lovász, L. *Discrete Mathematics: Elementary and Beyond* First edition - Springer Varlag - pag 53/54.

[8] Carvalho, P. C. P, Morgado, A. C. O, Fernandez, P. e Pitombeira, J. B. *Análise Combinatória e Probabilidade* Sexta edição - SBM.

[9] https://www.oei.es/historico/oim/xiioim.htm Acessado em 13/06/2018.

[10] https://www.imo-official.org/ Acessado em 13/06/2018.

[11] Andreescu,T.andAndrica,D. *Number Theory: Structures, Examples, and Problems* First edition - Birkhäuser Basel.

[12] https://en.wikipedia.org/wiki/Hockey-stick_identity Acessado em 07/05/2018.

2. Curiosidades

O número mágico

Por Thamires Santos Cruz[1]

O número 1089 é conhecido como mágico, pois podemos obtê-lo a partir de um número qualquer de três dígitos distintos. Vejamos como isso ocorre.

Considerando um número composto por três algarismos diferentes, devemos reescrever esse número na ordem inversa e subtrair o menor do maior. Ao resultado dessa subtração, onde se deve considerar sempre um número de três algarismos, mesmo quando a diferença na casa das centenas é zero, somamos o seu "inverso" de trás para frente, obtendo assim o número 1089.

Por exemplo, se escolhermos o número 456, podemos reescrevê-lo na ordem inversa como 654. Fazendo a subtração do maior para o menor, obtemos:

$$654 - 456 = 198.$$

Somando o resultado obtido com o seu "inverso" de trás para frente, temos

$$198 + 891 = 1089.$$

[1]Professora do Departamento de Matemática da UFRPE

Não acredita? Que tal fazer o teste com outros números!

Agora veremos a explicação matemática para esta "mágica".

Seja abc o número escolhido. Como a representa a centena, b a dezena e c a unidade, então

$$abc = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c \;\Rightarrow\; cba = 100 \cdot c + 10 \cdot b + a.$$

Portanto, supondo que $abc > cba$, temos $a > c$ e assim a subtração é dada por:

$$\begin{aligned} abc - cba &= 100 \cdot a + 10 \cdot b + c - (100 \cdot c + 10 \cdot b + a) \\ &= 99 \cdot a - 99 \cdot c \\ &= 99 \cdot (a - c) \end{aligned}$$

Logo, o resultado da diferença entre abc e cba, que será representada por xyz, é um múltiplo de 99 e portanto, também é um múltiplo de 9. Como em abc e cba, b não muda de posição e $a > c$, então o y será sempre igual a 9. E como em todo número divisível por 9 a soma de seus algarismos também é um número divisível por 9, concluímos que $x + z = 9$.

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} xyz + zyx &= 100 \cdot x + 10 \cdot y + z + 100 \cdot z + 10 \cdot y + x \\ &= 100 \cdot (x + z) + 20 \cdot y + (x + z) \\ &= 100 \cdot 9 + 20 \cdot 9 + 9 \\ &= 900 + 180 + 9 = 1089. \end{aligned}$$

De maneira análoga, podemos demonstrar o caso $cba > abc$.

Isso mostra como chegamos ao número mágico, a partir de um número com três algarismos distintos.

Convido o leitor interessado para investigar o que acontece se aplicarmos o procedimento acima em números com mais de 3 dígitos, sendo todos distintos.

Referências

[1] HEFEZ, Abramo - Elementos de Aritmética - Coleção Textos Universitários- SBM.

[2] "O número mágico" em Só Matemática. Virtuous Tecnologia da Informação, 1998-2018. Consultado em 15/05/2018 às 15:19. Disponível em https://www.somatematica.com.br/curiosidades/c8.php

3. Indicações de Leituras

TAHAN, Malba. **O Homem que Calculava**. Rio de Janeiro: Record, 2001.

Severino Barros de Melo[2]

Atualmente especialistas em Matemática, Física, Filosofia e Religião, dentre outros, contemplaram os leitores interessados nestas disciplinas com livros que narram de forma romanceada aspectos relevantes e históricos das respectivas áreas. Como exemplos podemos citar *Teorema do papagaio* (Matemática), *Alice no país dos quanta* (Física), *O Mundo de Sofia* (Filosofia) e *A Viagem de Theo* (Religião). Entretanto, décadas antes destes excelentes trabalhos terem sido publicados, os amantes da Matemática tiveram a oportunidade de conhecer uma obra pioneira em suas características e que considero uma leitura indispensável para todos aqueles que querem adentrar ao campo da Matemática numa perspectiva de divulgação; é o livro *O Homem que Calculava* escrito por Malba Tahan, pseudônimo de Júlio César de Melo e Souza (1895-1974).

Ele nasceu no Rio de Janeiro e faleceu no Recife. Concluiu o curso de professor primário na Escola Normal do antigo Distrito Federal e, depois, formou-se em Engenharia Civil pela Escola Politécnica da UFRJ em 1913. Foi professor, pedagogo, conferencista, escritor e um dos maiores divulgadores da Matemática no Brasil. Em 1921 assumiu na Escola Normal o cargo de professor, substituindo Euclides Roxo de quem havia sido aluno. Dois anos depois, tornou-se professor efetivo na instituição onde lecionou durante 40 anos. Mais tarde, tornou-se catedrático do Colégio Pedro II. Lecionou também no Instituto de Educação, e na Faculdade Nacional de Educação, onde recebeu o título de professor emérito.

Suas obras focaram a didática da Matemática de uma forma divertida e diferente. Colocava nos seus livros desafios matemáticos, aguçando a criatividade e a descoberta. Ele é famoso no Brasil e no exterior por seus livros de recreações matemáticas, fábulas e lendas passadas no oriente, muitas delas publicadas sob o pseudônimo de Malba Tahan. Criou este personagem por acreditar que um escritor brasileiro não chamaria atenção escrevendo contos árabes, e, para dar mais veracidade à história, criou também um tradutor para os livros, o Prof. Breno Alencar Bianco Julio. Em parcerias com Cecil Thiré, Euclides Roxo e Irene Albuquerque escreveu também sobre Matemática do ensino fundamental e médio, Geometria Analítica, Matemática Recreativa, Didática da Matemática, História da Matemática e Lógica, dentre outros, participando do movimento de modernização do ensino da Matemática no Brasil.

O Homem que Calculava é considerada sua obra mais famosa e foi traduzida ao menos em 12 idiomas. O livro narra em 34 capítulos a viagem de um calculista persa pelas terras do mundo árabe. Em cada local o homem que calculava se depara com situações inusitadas e difíceis, nas quais a matemática entra como elemento chave na resolução de tais dificuldades. Entre divisão de heranças, medições de terra, quadrados mágicos, resolução de quebra-cabeças, curiosidades da geometria e aritmética, Malba Tahan vai gradualmente introduzindo o leitor na história e no conteúdo da Matemática, a qual é apresentada com muita paixão e beleza. Mesmo sem ser um livro didático este romance desperta a atenção e o interesse em todos aqueles que admiram a Matemática. Em particular, para os professores a leitura carrega em si um potencial didático para o ensino atual.

[2]Professor do Departamento de Educação da Universidade Federal Rual de Pernambuco

4. Quem pergunta, quer saber!

Um professor pede um esclarecimento à Revista do Professor de Matemática (**RPM, Nº 12**) sobre uma polêmica gerada em sua escola:

"Sendo $x^4 + 4 = (x^8 - 16) \cdot (x^4 - 4)^{-1}$, pode-se dizer que , $x^4 + 4$ é fatorado como

$$(x^8 - 16) \cdot (x^4 - 4)^{-1}?"$$

Resposta da **RPM**:

Com efeito, de $(x^8 - 16) = (x^4 + 4) \cdot (x^4 - 4)$, vem que para $x^4 \neq 4$ (ou $x \neq \pm\sqrt{2}$) , tem-se $x^4 + 4 = \frac{x^8-16}{x^4-4}$. Esta igualdade, entretanto, vale só para $x \neq \sqrt{2}$ e $x \neq -\sqrt{2}$ e, além disso, $\dfrac{1}{x^4 - 4}$ não é um polinômio. Esta não é, então, uma fatoração no "mundo" dos polinômios. Se pretendemos considerar uma decomposição de $x^4 + 4$ em fatores que sejam também polinômios, podemos usar, por exemplo, o recurso de completar quadrados, obtendo $x^4+4 = (x^2+2)^2-4x^2 = (x^2+2x+2)\cdot(x^2-2x+2)$ que é válida para qualquer x real.

Para melhor entender a restrição da fatoração ao "mundo" dos polinômios, vale a pena observar a analogia com a fatoração de números inteiros. As possibilidades de fatoração de um número inteiro, bem como o conceito de divisibilidade, fazem sentido quando os fatores são *também* inteiros. Se admitirmos, como fatores, os números racionais, estes conceitos perdem o significado, uma vez que qualquer racional não nulo divide qualquer racional. Então, embora seja verdade que

$$1 = 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = \cdots$$

ou

$$15 = 3 \cdot 5 = 3 \cdot \frac{30}{7} \cdot \frac{7}{6} = \cdots ,$$

não existe nenhuma "teoria" de divisibilidade atrás disso, além das propriedades de "corpo" dos números racionais que garantem a existência do inverso de qualquer número não nulo. O mesmo se dá entre os polinômios (que são funções ditas "inteiras") se a eles acrescentamos funções racionais (que seriam os quocientes de polinômios). É por isso que a teoria da divisibilidade, em Álgebra, é feita em anéis e não em corpos e, nesse contexto, os elementos que possuem inverso são, muitas vezes, chamados de "unidades do anel".

5. Eventos

Este é um ano importantíssimo para a matemática no que diz respeito a grandes eventos realizados no Brasil.

Fiquem Ligados!!!

- **VIII SEMAT - Seminário Nacional Da Licenciatura Em Matemática**
  - Local: Ifes - Campus Cachoeiro de Itapemirim-ES
  - Data: 03 a 06 de Setembro de 2018
  - https://semat.ci.ifes.edu.br/
- **X Encontro Paraibano de Educação Matemática / V ECMAT- Encontro Cajazeirense de Matemática**
  - Local: IFPB/UFCG - Cajazeiras-PB
  - Data: 12 a 14 de Setembro de 2018
  - http://www.epbem.com.br/
- **XXXVIII CNMAC Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**
  - Local: UNICAMP- Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP
  - Data: 17 a 21 de Setembro de 2018
  - http://www.cnmac.org.br
- **VIII Encontro Mineiro de Educação Matemática**
  - Local: Universidade Federal de Uberlândia (Campus de Ituiutaba) Ituiutaba-MG
  - Data: 11 a 14 de outubro de 2018

- http://emem2018facip.com.br/

- **XII Semana de Matemática da UFRR**
  - Local: Universidade Federal de Roraima-RR
  - Data: 17 a 19 de Outubro 2018
  - https://sigeventos.ufrr.br/eventos/public/evento/eventosdmat

- **VII Encontro Paraense de Modelagem Matemática**
  - Local: Universidade Federal do Pará, Salinópolis-PA
  - Data: 25 a 26 de Outubro de 2018
  - https://sites.google.com/view/viiepamm/

- **Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações (XII ENAMA)**
  - Local: Universidade de Brasília-Brasília
  - Data: 7 a 9 de Novembro de 2018
  - http://www.enama.org/

- **IV Colóquio de Matemática da Região Nordeste**
  - Local: Universidade Federal do Maranhão, São Luís-MA
  - Data: 19 a 23 de novembro de 2018
  - http://eventos.sbm.org.br

6. Problemas

Para concluir deixamos para o leitor alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Problema 1 (OBMEP-N3-2010-Adaptado)**.** Seja p um número primo positivo e n, m inteiros positivos. Determine todas as soluções de

$$p^n + 1 = m^2.$$

Problema 2 (Tournament of the Towns - 2001)**.** Exite um bloco com 1000 inteiros positivos consecutivos contendo exatamente um número primo?

Problema 3 (OBMEP-2008-Nível 1)**.** Um número é dito *equilibrado* se um dos seus algarismos é a média aritmética dos outros. Por exemplo, 132, 246 e 777 são equilibrados. Quantos números equilibrados de 3 algarismos existem?

Mandem soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, sua solução deve ser enviada até **30/12/2018**.

7. Soluções dos Problemas

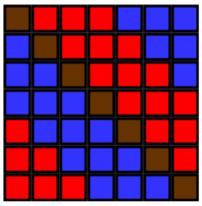
Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n.6, Abril de 2018**.

Problema 1 (38^o Olimpíada Brasileira de Matemática)**.** Janaína quer pintar as casas de um tabuleiro 7×7 de vermelho, de azul ou de marrom, da seguinte maneira: em cada linha, o número de casas vermelhas não pode ser menor que o número de casas com cada uma das outras cores e, em cada coluna, o número de casas azuis não pode ser menor que o número de casas com cada uma das outras cores. Todas as linhas e colunas devem conter casas das três cores.

a) Pelo menos quantas casas serão pintadas de vermelho?

b) Quantas casas serão pintadas de marrom?

Solução. Como há três cores para $7 = 3 \cdot 2 + 1$ casas em cada fila, cada linha tem pelo menos 3 casas vermelhas e cada coluna tem pelo menos 3 casas azuis. Logo o tabuleiro tem pelo menos $3 \cdot 7 = 21$ casas vermelhas e $3 \cdot 7 = 21$ casas azuis. Suponha que há pelo menos 22 casas vermelhas. Assim, pelo princípio da casa dos pombos, alguma coluna tem pelo menos 4 casas vermelhas, o que não é possível pois deveria haver pelo menos mais 4 casas azuis. Da mesma maneira mostramos que não é possível haver 22 ou mais casas azuis. Logo há 21 casas vermelhas, 21 casas azuis e $49 - 21 - 21 = 7$ casas marrons. O seguinte exemplo mostra a existência de um tabuleiro com essas condições.



□

Problema 2 (XXXV Olimpíada cearense de matemática - Nível 2)**.** Se P e Q são pontos do plano, denotamos $|\overline{PQ}|$ o comprimento do segmento $\overline{PQ}$. Seja ABC um triângulo. Considere o ponto $D \in \overline{BC}$ tal que $|\overline{BD}| = 2|\overline{DC}|$. Mostre que

$$3|\overline{AD}| < |\overline{AB}| + 2|\overline{AC}|$$

Solução. [3] Seja D' outro ponto em BC tal que $|\overline{BD'}| = |\overline{D'D}| = |\overline{DC}|$. No triângulo ACD' temos AD mediana, logo, AD satisfaz

$$|\overline{AD}| < \frac{|\overline{AC}| + |\overline{AD'}| - |\overline{CD'}|}{2} \tag{14}$$

No triângulo ABD temos AD' mediana, logo, AD' satisfaz

$$|\overline{AD'}| < \frac{|\overline{AD}| + |\overline{AB}| - |\overline{BD}|}{2} \tag{15}$$

De (14) e (15) concluímos que

$$|\overline{AD}| < \frac{|\overline{AC}|}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{|\overline{AD}| + |\overline{AB}| - |\overline{BD}|}{2}\right) - \frac{|\overline{CD'}|}{2}$$

Logo,

$$\frac{3}{4}|\overline{AD}| < \frac{|\overline{AC}|}{2} + \frac{|\overline{AB}|}{4} - \frac{|\overline{BD}|}{4} - \frac{|\overline{CD'}|}{2}$$

Por hipótese e por construção, nós temos que $|\overline{BD}| = |\overline{CD'}| = \frac{2}{3}|\overline{BC}|$, daí segue que

$$\frac{3}{4}|\overline{AD}| < \frac{|\overline{AC}|}{2} + \frac{|\overline{AB}|}{4} - \frac{|\overline{BC}|}{2}$$

Assim,

$$3|\overline{AD}| < 2|\overline{AC}| + |\overline{AB}| - 2|\overline{BC}| < |\overline{AB}| + 2|\overline{AC}|$$

o que resolve o problema. □

Problema 3. Encontre todas as soluções em inteiros de $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 40$.

Solução. [4] Primeiramente note que $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 40 \Rightarrow (x+y)^3 - 2x^2y - 2xy^2 = 40 \Rightarrow (x+y)^3 - 2xy(x+y) = 40 \Rightarrow (x+y)[(x+y)^2 - 2xy] = 40 \Rightarrow (x+y)(x^2+y^2) = 40$. (1)
Daí seque que as soluções inteiras de (1) são todas obtidas pela solução dos seguintes sistemas:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=40 \end{cases}, \begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}, \begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}, \begin{cases} x+y=8 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}, \begin{cases} x+y=40 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}, \begin{cases} x+y=20 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}, \begin{cases} x+y=10 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}, \begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}.$$

Note porém que os únicos sistemas que possuem solução inteira são:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=20 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$$

Logo, as únicas soluções possíveis para (1) são $(4,-2)$ e $(-2,4)$ referentes ao primeiro sistema e $(1,3)$ e $(3,1)$ referentes ao segundo. □

[3] Solução de Everton Henrique C. de Lira (Aluno Profmat - UFRPE).
[4] Solução de Everton Henrique C. de Lira (Aluno Profmat - UFRPE) também enviada por Julio Cesar Mohnsam (Professor do IF Sul) e Lucas Al Alam (Aluno Ensino médio/técnico eletrônica, IF Sul).