É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

2018- Número 7, volume 1, Junho de 2018

ISSN 2526-8651

Sumário

1. Artigo

Equações Funcionais: Técnicas de Solução em Problemas Olímpicos

Matheus Nunes

UFRPE - CGEN - Departamento de Matemática

52171-900 - Recife - PE - Brasil

Introdução

Desde os primeiros anos escolares nos deparamos com um determinado tema que é extremamente importante mas gera um temor para boa parte dos estudantes; as equações. Inicialmente, é apresentada para os estudantes equações simples, com coeficientes inteiros e de grau igual a 1.

Nesse artigo, estaremos interessados em estudar algumas técnicas de resolução de um tipo especial de equações onde as variáveis serão dadas por funções, as equações funcionais.

Um dos problemas mais clássicos e mais antigos sobre equações funcionais aparece em anotações do livro de Augustin-Louis Cauchy $(1789-1857)$. No problema havia uma sistematização de funções com as seguintes características:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Tão antigo quanto as equações acima é a equação funcional de Jean le Rond d'Alembert $(1717-1783)$ que consiste em encontrar as funções que satisfazem a seguinte equação:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

A partir desses problemas, faz sentido se questionar sobre as maneiras sistemáticas de resolução de equações funcionais, assim como aprendemos sobre a fórmula de Baskhara (que não é de Baskhara [1]) para resolução de equações de segundo grau.

Equações Funcionais

Definição 1.1. Uma equação é dita funcional se as suas variáveis são dadas por funções. É uma equação da forma

$$F(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)) = 0.$$

Apesar de não ser apresentada como tal, existem alguns exemplos de equações funcionais que são familiares para a grande maioria dos alunos que já estudaram funções.

Exemplo 1.1. Uma função f é dita par quando satisfaz a seguinte equação funcional:

$$f(x) = f(-x) \quad \forall\, x \in D_f.$$

Exemplo 1.2. Uma função é dita períodica, de período T, se

$$f(x) = f(x+T) \quad \forall\, x \in D_f.$$

Nos exemplos acima, conhecemos algumas funções que satisfaçam a equação funcional dada, como por exemplo, as funções trigonométricas no Exemplo 1.2 e a função dada por $f(x) = x^2$ no Exemplo 1.1. Mas se tornarmos a equação um pouco mais complicada, como por exemplo

$$2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \quad \forall\, x \in D_f,$$

como encontramos uma função f ou uma família de funções que satisfaçam essa igualdade? Não há uma maneira específica de encontrar soluções para todas as equações funcionais.

Iremos introduzir duas técnicas de resolução que não necessitam de ferramentas avançadas da matemática. A primeira é pelo princípio da indução finita e a segunda por injetividade e/ou sobrejetividade. É importante destacar que ambos os métodos podem aparecer em determinadas questões apenas como ferramentas para realizar "pontes" entre os processos que levam à solução.

Princípio da Indução Finita

A indução finita é uma ferramenta utilizada para demonstrar algumas implicações matemáticas. Funciona do seguinte modo: Dado uma proposição $\mathcal{P}$. Se os itens abaixo são válidos

- $\mathcal{P}_1$ é válido.
- Se $\mathcal{P}_n$ é válido para certo $n \in \mathbb{N}$, então $\mathcal{P}_{n+1}$ é válido.

então a proposição é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. O leitor pode questionar se para a base da indução é restrito sempre utilizar o $n = 1$. A resposta é não. Dependendo do enunciado, o valor inicial para que a proposição faça sentido pode não ser o número 1. Sem perda de generalidade, usaremos $n = 1$.

Exemplo 1.3. Encontre todas funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que $f(1) = 2$ e $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$.

Sabemos, por hipótese, que $f(1) = 2$. Usaremos esse fato como base da nossa indução. Façamos $y = 1$ e $x = n$, então teremos a equação

$$f(n) = f(1)f(n) - f(n+1) + 1 = 2f(n) - f(n+1) + 1$$

que, manipulando, resulta em:

$$f(n) + 1 = f(n+1).$$

Desde que $f(1) = 2$, temos que $f(2) = f(1) + 1 = 2 + 1 = 3$, $f(3) = 4, ...$ Então, suponhamos que $f(n) = n + 1$. A partir da equação funcional, temos que:

$$f(n+1) = f(n) + 1 = (n+1) + 1.$$

Portanto, pelo princípio da indução finita, $f(n) = n + 1$. Logo, a única função natural que satisfaz a equação funcional é dada por $f(x) = x + 1$.

[1] Na maioria dos países, o que no Brasil é nomeado por Fórmula de Baskhara é considerado como Fórmula Quadrática e sua formulação não é atribuída ao matemático Bhaskara Akaria.

Exemplo 1.4. Encontre todas as funções $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tais que $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Calcularemos inicialmente $f(0)$. Se tomarmos $y = 0$, então a equação torna-se $f(x) = f(x) + f(0)$ que implica em $f(0) = 0$.
Sabemos, por hipótese, que

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

Concluiremos por indução que

$$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n).$$

Para isso, suponhamos que $f(x_1 + \ldots + x_{n_0}) = f(x_1) + \ldots + f(x_{n_0})$ para certo $n_0 \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f(x_1 + \ldots + x_{n_0} + x_{n_0+1}) &= f((x_1 + \ldots + x_{n_0}) + x_{n_0+1}) \\ &= f(x_1 + \ldots + x_{n_0}) + f(x_{n_0+1}) \end{aligned}$$

Utilizando o passo indutivo, temos que

$$f(x_1 + \ldots + x_{n_0} + x_{n_0+1}) = f(x_1) + \ldots + f(x_{n_0}) + f(x_{n_0+1}).$$

Assim temos a igualdade desejada. Além disso, do resultado obtido, também podemos concluir que $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A partir disto, tome $x = \frac{az}{n}$ com $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $z \in \mathbb{Q}$. A equação torna-se $f(az) = nf(\frac{az}{n})$. Como a é natural, temos que $f(az) = af(z) = nf(\frac{az}{n})$, que implica em

$$\frac{a}{n} f(z) = f\left(\frac{az}{n}\right). \tag{1}$$

Podemos estender a e n para inteiros, pois

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$$

consequentemente $f(-x) = -f(x)$. Assim

$$f\left(-\frac{a}{n} z\right) = -\frac{a}{n} f(z).$$

Para os leitores que não estão familiarizados, os elementos de $\mathbb{Q}$ são da forma $\frac{x}{y}$ com $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}^*$. Na equação (1), tome $\frac{a}{n} = q$. Então temos que $f(qz) = qf(z)$. Se considerarmos $z = 1$, a equação torna-se $f(q) = qf(1)$. Fazendo $c := f(1)$, temos que

$$f(q) = qc.$$

A técnica de indução pode ser estendida para encontrar soluções de funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entretanto pode ser necessário o uso de ferramentas que não são apresentadas, a priori, no ensino básico.

Injetividade e Sobrejetividade

Definição 1.2. Uma função $f : X \to Y$ é dita injetiva se $f(x) = f(y)$ implica em $x = y$ para todo $x, y \in X$.

Exemplo 1.5. Toda função f afim, ou seja, toda função definida por $f(x) = ax + b$ com $a, b \in X \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é uma função injetiva. Isso acontece pois, dado $x, y \in X$, temos que $ax + b = ay + b$, consequentemente $x = y$.

Definição 1.3. Uma função $f : X \to Y$ é dita sobrejetiva quando o conjunto imagem de f é igual à Y. Em outras palavras, para todo y $\in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Exemplo 1.6. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é sobrejetiva, pois, para qualquer $y \in \mathbb{R}$ basta tomar $x = y^{\frac{1}{3}}$ que teremos que $f(x) = f(y^{\frac{1}{3}}) = \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3 = y$.

Soluções olímpicas

Exemplo 1.7. (BMO 1997, 2000) Resolva a equação funcional

$$f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2, \ x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Solução. Inicialmente, analisaremos a equação para $x = 0$.

$$f(f(y)) = y + f(0)^2. \tag{3}$$

A partir disto, mostraremos que f é injetiva. Suponhamos $f(x) = f(y)$. Aplique f em ambos os lados da igualdade. Então teremos

$$f(f(x)) = f(f(y))$$

$$x + f(0)^2 = y + f(0)^2$$

$$x = y.$$

Portanto, f é injetiva. É fácil verificar que f também é sobrejetiva, pois considere $y \in \mathbb{R}$ e $f(0) = c$, temos que

$$f(f(y - c^2)) = y - c^2 + c^2 = y.$$

Logo, para qualquer $y \in \mathbb{R}$ basta escolher $x = f(y-c^2)$. Consequentemente, f é sobrejetiva. Disso sabemos que existe um $t \in \mathbb{R}$ tal que $f(t) = 0$. Se fizermos $x = t$ na equação (2), temos

$$f(tf(t) + f(y)) = y + f(t)^2$$

$$f(f(y)) = y$$

e se fizeremos $x = 0$ e $y = t$, temos que:

$$\begin{aligned} f(0 + f(t)) &= t + f(0)^2 \\ f(0) &= t + f(0)^2 \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

Substituindo a ultima igualdade na equação (3), teremos que $f(f(y)) = y$.
Agora, substituímos x por $f(x)$ na equação (1). Então,

$$\begin{aligned} (f(x)(f(f(x)) + f(y)) &= y + f(f(x))^2 \\ f(f(x)x + f(y)) &= y + x^2 \\ y + f(x)^2 &= y + x^2 \\ f(x)^2 &= x^2. \end{aligned}$$

Fazendo $x = 1$, teremos que $f(1) = \pm 1$. Se $f(1) = 1$, então

$$f(1f(1) + f(y))^2 = y + f(1)^2.$$

Manipulando algebricamente a equação e usando o fato que $f(y)^2 = y^2$, concluímos que $f(y) = y$.
Se $f(1) = -1$, então, de maneira análoga $f(y) = -y$. Como esgotaram-se os casos, as únicas soluções da equação são $f(x) = -x$ e $f(x) = x$. ☐

Exemplo 1.8. (IRAN 2006) Encontre todas as funções $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, tal que

$$(x + y)f(f(x)y) = x^2 f(f(x) + f(y))$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Solução. A ideia inicial é mostrar que f é injetiva. Primeiro, escolhamos x e y de modo que $x+y = x^2$. Além disso, suponhamos que $f(a) = f(b)$ para $a, b \in \mathbb{R}^+$. Então,

$$\begin{aligned} (x + y)f(f(x)y) &= x^2 f(f(x) + f(y)) \\ \frac{x + y}{x^2} &= \frac{f(f(x) + f(y))}{f(f(x)y)}. \end{aligned}$$

Substituindo $x = a$, temos:

$$\frac{a + y}{a^2} = \frac{f(f(a) + f(y))}{f(f(a)y)} = \frac{f(f(b) + f(y))}{f(f(b)y)} = \frac{b + y}{b^2}.$$

Por transitividade temos que

$$\frac{a + y}{a^2} = \frac{b + y}{b^2}.$$

Se multiplicarmos ambos os lados por a^2b^2, então

$$\begin{aligned} ab^2 + yb^2 &= ba^2 + ya^2 \\ ab^2 + yb^2 - ba^2 - ya^2 &= 0 \\ ab(b - a) + y(b^2 - a^2) &= 0 \\ ab(b - a) + y(b - a)(b + a) &= 0 \\ (b - a)(ab + yb + ya) &= 0. \end{aligned}$$

Como y está variando em $\mathbb{R}^+$, então $(ab+ya+yb) \neq 0$. Portanto $a = b$ e a função é injetiva. Além disso, se $y = x^2-x$, então $x^2 f(f(x)(x^2-x)) = x^2 f(f(x)+f(x^2 - x))$. Como mostrado que f é injetiva, da igualdade podemos concluir que $f(x)(x^2 - x) = f(x)+f(x^2 - x) \implies f(x)(x^2 - x - 1) = f(x^2 - x)$. Tome um valor para $a = x^2 - x$ no intervalo $(0, 1)$, como por exemplo $a = \frac{1}{2}$. Então a equação aplicada no ponto tem valor

$$-\frac{1}{2} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Como $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, então $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, entretanto, a igualdade acima contraria nossa hipótese, pois teríamos que $f(x) = -2f\left(\frac{1}{2}\right)$. Portanto, não existe nenhuma função no intervalo dado que satisfaça a equação funcional. ☐

Exercícios Propostos

Por fim, para os leitores interessados, seguem alguns problemas de olímpiadas de matemática de alguns países que podem ser resolvidos com as técnicas apresentadas neste artigo.

Questão 1.1. (USAMO 2002) Encontre todas soluções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y)$$

com x e y em $\mathbb{R}$.

Resposta : $f(x) = kx,\ k \in \mathbb{Z}$.

Questão 1.2. (Mathematical Excalibur - 2003) Encontre todas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$x^2 f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4$$

para todo $x \in \mathbb{R}$

Resposta : $f(x) = 1 - x^2$.

Questão 1.3. (Radovanovic M. 2007) Encontre todas das funções injetivas $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que satisfaçam:

a) $f(f(m) + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$

b) $f(1) = 2, f(2) = 4$.

Resposta: $f(1) = 2$ e $f(x) = x + 2$ para $x \neq 1$.

Questão 1.4. (Belarus 1997) Encontre todas funções $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que para quaisquer números reais x e y:

$$g(x + y) + g(x)g(y) = g(xy) + g(x) + g(y)$$

Resposta: $g(x) = 0,\ g(x) = 2$ e $g(x) = x$.

Referências

[1] Efthimiou, C. *Introduction to functional equations: Theory and problem-solving strategies for mathematical competitions and beyond.* Msri Mathematical Circles Library. American Mathematical Society, 2011.

[2] Kyn Li, Y. *"Functional Equations". Em:Mathematical Excalibur8.1* (2003), pp. 1–4.

[3] Radovanovic M. Functional Equations. 2007 (acesso: 19 Abril de 2018). url:http://www.imomath.com/index.php?options=338&lmm=0.

2. Curiosidades

Prêmio Leelavati

Por Tiago Duque Marques[1]

No próximo dia 01 de agosto tem início o ICM 2018 (Congresso Internacional de Matemáticos) na cidade do Rio de Janeiro, mais importante evento da área, acontece de quatro em quatro anos (com a primeira edição em 1897) e será realizado pela primeira vez na América do Sul.

São nos ICMs que ficamos sabendo dos novos detentores das medalhas Fields. Considerado por muitos o prêmio Nobel da Matemática, gerando sempre muita ansiedade, especulações e expectativa sobre quem serão os ganhadores. No último ICM, em Seul, foi a primeira vez que um brasileiro e uma mulher figuraram dentre os galardoados, são ele e ela Artur Ávila e a iraniana Maryam Mirzakhani.

Apenas no penúltimo ICM, realizado na Índia em 2010, foi instituído um prêmio para a Popularização da Matemática, para aqueles que contribuíram de forma admirável para a divulgação da Matemática na sociedade, é o prêmio Leelavati. Famoso pelo livro O Último Teorema de Fermat, Simon Singh, foi quem levou naquela edição inaugural. Já em 2014 o prêmio Leelavati foi dado ao matemático argentino Adrián Paenza, que mudou a maneira de como o seu país percebe a Matemática na vida cotidiana, através de programas de rádio e TV, colunas de jornal e, especialmente, sua coleção de livros "Matemática... ¿Estás ahí?" - com impacto em toda América Latina e Espanha - que neste ano de 2018 já atingiu mais de um milhão de exemplares vendidos.

[1]Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco

O nome do prêmio homenageia o livro homônimo do proeminente matemático indiano do século XII, Bhaskara II. Leelavati significa "formosa, bela" em sânscrito, é a obra mais importante de Bhaskara II, trata de Aritmética e Álgebra, está escrita em versos com finalidade lúdica.

O prêmio Leelavati acompanha o montante de 1.000.000,00 de rupias indianas.

Referências

[1] Congresso Internacional de Matemáticos 2018, http://www.icm2018.org/portal/sobre-o-icm-premios- Acessada em: 22/05/2018

[2] União Matemática Internacional, https://www.mathunion.org/imu-awards/leelavati-prize- Acessada em: 22/05/2018

[3] Wikipédia, https://pt.wikipedia.org/wiki/BhaskaraII - Acessada em: 22/05/2018

3. Indicações de Leituras

AABOE, Asger. **Episódios da história antiga da matemática.** Rio de Janeiro - SBM - 2013

Everton Henrique Cardoso de Lira[2]

Se você é um estudante, pesquisador ou professor de matemática e não conhece as origens do seu objeto de estudo, pesquisa ou trabalho, posso te garantir que você está perdendo uma grande oportunidade de conhecer e desfrutar de leituras prazerosas e instrutivas.

Pensando nisso, trago a vocês que porventura já se aventuraram neste maravilhoso mundo da História da Matemática ou que estão prestes a realizar as primeiras incursões neste admirável mundo novo, o agradável, acessível e convidativo livro *Episódios da história antiga da matemática* do professor e historiador da matemática Asger Aaboe (1922 - 2007).

O livro é composto por quatro capítulos, nos quais o autor aborda de forma magistral, elementos das matemáticas Babilônica e Grega. Com respeito aos babilônios Aaboe apresenta parte da aritmética, álgebra e geometria praticadas pelos mesmos, dando ênfase ao sistema numérico sexagesimal e as receitas dadas por estes para a resolução de equações quadráticas. No que diz respeito aos gregos Aaboe seleciona alguns elementos dos trabalhos dos grandes matemáticos Euclides, Arquimedes e Ptolomeu, nos quais é possível encontrar belas demonstrações de famosos teoremas como o de Pitágoras, a obtenção das fórmulas para o volume e a área da superfície de uma esfera e belas construções de polígonos regulares como, por exemplo, o pentágono e o hexágono, dentre outras coisas.

Em suma, o livro nos dá uma boa ideia de como a matemática antiga era desenvolvida e de como os matemáticos da época desenvolveram soluções engenhosas e elegantes para os problemas que encontraram em suas pesquisas, o que sem dúvidas pode nos inspirar a continuar estudando, pesquisando e ensinando esta que é uma das mais belas invenções da mente humana, a Matemática.

4. Eventos

Este é um ano importantíssimo para a matemática no que diz respeito a grandes eventos realizados no Brasil.

Fiquem Ligados!!!

- **V Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional**
  - Local: Universidade Estadual Paulista-Bauru-SP
  - Data: 06 de junho a 08 de junho de 2018
  - http://www.fc.unesp.br/index.php#!/departamentos/matematica/eventos2341/ermac-2018/pagina-inicial/

[2] Aluno do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT na UFRPE e Professor da Secretária de Educação de Pernambuco.

- **Encontro Sul Mato Grossense de Matemática (V ENCOSMAT)**
  - Local: Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-Aquidauana-MS
  - Data: 4 de junho a 8 de junho de 2018
  - https://encosmat.ufms.br/
- **2nd BRICS conference on Mathematics**
  - Local: Hotel Golden Park Internacional - Foz do Iguaçu- PR
  - Data: 23 de julho a 27 de julho de 2018
  - http://www.foz2018.com/events
- **IV Brazil-China Symposium on Applied and Computational Mathematics**
  - Local: Hotel Golden Park Internacional - Foz do Iguaçu- PR
  - Data: 23 de julho a 27 de julho de 2018
  - http://www.foz2018.com/events
- **II Simpósio Maranhense De Ensino E Pesquisa Em Matemática**
  - Local: Universidade Estadual do Maranhão - São Luiz - MA
  - Data: 13 de junho a 15 de Junho de 2018
  - https://www.even3.com.br/IISIMEPEM
- **Workshop on Mathematical and Computational Problems of Incompressible Fluid Dynamics**
  - Local: Instituto de Matemática Pura e Aplicada(IMPA)-Rio de Janeiro-RJ
  - Data: 10 de Agosto a 11 de Agosto de 2018
  - https://impa.br/en_US/eventos-do-impa
- **Dynamical Systems and Related Topics**
  - Local: Universidade Federal da Bahia-Salvador- Bahia
  - Data: 13 de Agosto a 17 de Agosto de 2018
  - https://impa.br/en_US/eventos-do-impa
- **A 2ª Semana do Professor de Matemática (SeProMat)**
  - Local: Universidade Estadual de Campinas(UNICAMP)- Campinas-SP
  - Data: 6 de agosto a 10 de agosto de 2018
  - https://www.ime.unicamp.br/~sepromat
- **International Congress of Mathematicians 2018 (ICM 2018)**
  - Local: Rio de Janeiro
  - Data: 1 de agosto a 9 de agosto de 2018
  - http://www.icm2018.org/portal/en/home
- **X Encontro Paraibano de Educação Matemática & V Encontro Cajazeirense de Matemática**
  - Local: IFPB e UFCG - Cajazeiras - PB
  - Data: 12 a 14 de Setembro de 2018
  - http://www.epbem.com.br/

5. Problemas

Para concluir deixamos para o leitor alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Problema 1. Chamamos um polinômio mônico de peculiar se seus coeficientes estão em progressão aritmética e suas raízes são inteiras. Por exemplo o polinômio $x^2 - 1$ tem coeficientes $1, 0, -1$ e raízes $1, -1$, portanto é peculiar. Encontre todos os polinômios peculiares de grau 2. Mostre que não existem polinômios peculiares de grau 3.

Problema 2. Determine todos os pares (f, g) de funções do conjunto dos números reais para si mesmo que satisfaçam

$$g(f(x+y)) = f(x) + (2x+y)g(y)$$

para todos números reais x e y.

Problema 3 (ENC - 2001)**.** Um número $a \in \mathbb{N}$ é dito *quadrado perfeito* quando existir $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n^2 = a$. Mostre que número quadrado perfeito nunca deixa resto 2 na divisão por 6.

Mandem soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, sua solução deve ser enviada até **15/08/2018**.

---

6. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n.5, Janeiro de 2018**.

Problema 1. (OBM - Nível U - 2017) Considere a sequência $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$, para $n \geq 1$.

1. Encontre $\lim_{n\to\infty} a_n$.
2. Determine $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n(2-a_n)}{n+1}\right)^{n+1}$

Solução. Esta questão trata basicamente de como usar a fórmula da soma dos termos de uma PG de forma apropriada. Vamos organizar os termos dessa sequência da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{2} & & & & \\ \frac{1}{4} & + & \frac{1}{4} & & \\ \frac{1}{8} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{8} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Vejamos que o enunciado nos pede para somar primeiro as linhas e depois somar a coluna de resultados. Todavia como todos os termos são positivos, pelo princípio de Fubbini, podemos somar as colunas e depois somar as linhas de resultados. Assim usando a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita que é $S = \frac{a_0}{1-q}$. Obtemos que a soma dos termos da primeira coluna vale $S_1 = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$. A soma dos termos da segunda coluna é $S_2 = \frac{1/4}{1-1/2} = 1/2$. Assim indutivamente percebemos que a soma dos termos da n-ésima coluna é $S_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. Logo $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = \frac{1}{1-1/2} = 2$.

b) Neste segundo item também temos que usar a fórmula da soma dos termos de uma PG. Porém antes disso precisamos escrever o termo a_n de uma maneira esperta. Olhemos de novo como os termos foram dispostos na tabela, só que dessa vez no lugar de pensar em colunas com infinitos termos vamos olhar a soma até a n-ésima linha. Observe que somando em colunas o termo $a_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{2^i}$. Vamos calcular o primeiro somatório:

$$S = \frac{a_0(1-q^{n+1})}{1-q} = \frac{\frac{1}{2^k}\cdot(1-(\frac{1}{2})^{(n-k)+1})}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^n}$$

Chegamos que

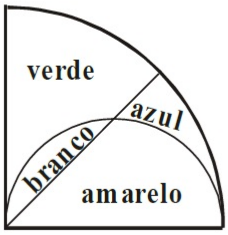
$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^n}\right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$$

Portanto da relação obtida acima temos que $\frac{2^n(2-a_n)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$.
Logo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n(2-a_n)}{n+1}\right)^{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e. \end{aligned}$$

□

Problema 2 (XXIV Olimpíada Pessoense de Matemática)**.** Um grande painel na forma de um quarto de círculo foi composto com 4 cores, conforme indicado na figura abaixo, onde o segmento divide o setor em duas partes iguais e o arco interno é uma semicircunferência. Qual é a cor que cobre a maior área?



Solução. Denotemos por x, y, z e w as áreas das regiões branca, amarela, azul e verde respectivamente. Agora, se R é o raio do semicírculo formado pelas regiões x e y, temos

$$x + y = \frac{\pi R^2}{2}$$

e

$$x + w = y + z = \frac{1}{8}\pi(2R)^2 = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Dessa forma, $x + y = y + z = x + w$, daí $x = z$ e $y = w$. Uma vez que x representa a área de um segmento circular de ângulo medindo $90°$ e raio R segue que

$$x = \frac{R^2}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{R^2}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \left(\frac{\pi - 2}{4}\right)R^2.$$

Então

$$y = \left(\frac{\pi + 2}{4}\right)R^2$$

Assim $z = x < y = w$. Portanto as cores que cobrem maior área são amarela e verde.

□

Problema 3 (XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática)**.** Diamantino gosta de jogar futebol, mas se jogar dois dias seguidos ele fica com dores musculares. De quantas maneiras Diamantino pode escolher em quais de dez dias seguidos ele vai jogar bola sem ter dores musculares? Uma maneira é não jogar futebol em nenhum dos dias.

Solução. Note que Diamantino pode jogar futebol no máximo 5 vezes; caso contrário ele necessariamente joga dois dias seguidos. Suponha que ele joga k dias. Então os k dias em que ele joga devem ser imediatamente seguidos por dias em que ele não joga. Assim, acrescentando um dia ao período, podemos dividir os 11 dias em k blocos de dois dias e $11 - 2k$ blocos de um dia. Podemos permutar os $k + 11 - 2k = 11 - k$ blocos de

$$\frac{(11-k)!}{k!(11-2k)!} = \binom{11-k}{k}.$$

Assim, o total de maneiras de Diamantino escolher os dias em que vai jogar é

$$\binom{11-0}{0} + \binom{11-1}{1} + \binom{11-2}{2} + \binom{11-3}{3} + \binom{11-4}{4} + \binom{11-5}{5}$$
$$= 1 + 10 + 36 + 56 + 35 + 6 + 144.$$

Outra solução: Seja a_n o número de maneiras de Diamantino escolher os dias em que vai jogar entre n dias. Se ele jogar no dia n ele não pode ter jogado no dia $n-1$, mas não há restrições aos demais $n - 2$ dias; assim, nesse caso há $a_n - 2$ maneiras de escolher os dias em que vai jogar; se ele não jogar no dia n não há restrições aos demais $n - 1$ dias, então nesse caso há $a_n - 1$ maneiras de escolher os dias.
Assim, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, com $a_0 = 1$ (a única opção é não jogar) e $a_1 = 2$ (ele joga ou não no único dia). Dessa forma, podemos encontrar os valores de a_n a partir dos anteriores:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Logo Diamantino pode escolher os dias de 144 maneiras.

□