É Matemática, Oxente!

O Jornal de Matemática Olímpica

2018 - Número 6, volume 1, Abril de 2018
ISSN 2526-8651

Sumário

1. Artigo

Aritmética Modular

Danilo da N. Santos
UFRPE - CGEN - Departamento de Matemática
52171-900 - Recife - PE - Brasil

Introdução

Os conjuntos numéricos foram, por muitos milênios, considerados como entidades puramente intuitivas. Suas operações e propriedades básicas eram atribuídas à sua própria natureza, dessa forma não eram passíveis de demonstração.

Com a criação do cálculo diferencial, a fim de resolver novos problemas, se fez necessário uma fundamentação mais rigorosa para o conceito de número. Foi devido a Karl Weierstrass (1815 - 1897) a primeira construção dos números inteiros negativos e racionais tomando por base os números naturais. Apesar da descoberta dos números irracionais datem desde a Grécia antiga, de forma independente, Georg Cantor (1845 - 1918) e Richard Dedekind (1831 - 1916) conseguiram construir tais números a partir dos números racionais.

Os números naturais resistiram por mais alguns anos à tentativa de sua formalização. Tanto que o matemático alemão Leopold Kronecker (1823 - 1891) tornou célebre a seguinte frase: "Deus criou os inteiros, o resto é obra do homem". Após alguns anos Dedekind publicou em seus trabalhos, através de teoria de conjuntos, um modelo para os números naturais definindo operações e demonstrando propriedades básicas. Entretanto, a construção dos naturais mais popular foi devida a Giuseppe Peano (1858 - 1932), nela o mesmo descreve tal conjunto sobre a premissa de quatro axiomas.

Neste artigo não faremos tais construções, nos concentraremos apenas no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ no que diz respeito a divisibilidade com intuito de resolver problemas bastante interessantes do ponto de vista da aritmética modular. Um instrumento que da ênfase ao resto da divisão euclideana e que foi introduzido primeiramente por Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Congruência módulo um inteiro

Primeiramente fixemos algumas notações

- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ (como já usado)
- $\mathbb{Z}^*$ denota inteiros com exceção do 0
- $\mathbb{Z}_+$ denota inteiros positivos
- $\mathbb{Z}_-$ denota inteiros negativos

Definição 1.1. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ diremos que a divide b (ou b é múltiplo de a) quando existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ka$. Neste caso, usaremos a notação $a \mid b$. Caso contrário, diremos que *a não divide b* (ou b não é múltiplo de a) e usaremos a notação $a \nmid b$.

Exemplo 1.1. Note que $3 \mid 9$, $7 \mid (-14)$, $1 \mid a$ com $a \in \mathbb{Z}$, $b \mid 0$, com $b \in \mathbb{Z}$

Antes de prosseguirmos e listar uma série de propriedades de divisibilidade relembremos a definição de valor absoluto de um número.

Seja $a \in \mathbb{Z}$ definimos o *valor absoluto de* $|a|$, como sendo

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se} \quad a \geq 0 \\ -a, & \text{se} \quad a < 0 \end{cases}$$

Proposição 1.1. *Sejam a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$. São verdadeiras as afirmações:*

P.1 $a \mid a$.

P.2 Se $a \mid b$ *e* $b \mid c$*, então* $a \mid c$.

P.3 Se $a \mid b$ *e* $c \mid d$*, então* $ac \mid bd$.

P.4 Se $a \mid (b + c)$ *e* $a \mid b$*, então* $a \mid c$.

P.5 Se $a \mid b$ *e* $b \neq 0$*, então* $|a| \leq |b|$.

Leitores mais experientes e interessados em teoria dos números podem encontrar a demonstração de todas essas propriedades em [1] páginas 70 e 71.

Exemplo 1.2 (Banco de questões OBMEP - 2013)**.** Os números x, y, z e w na figura são números inteiros todos diferentes entre si, maiores do que 1, e foram colocados nas casas abaixo de modo que cada número (a partir de y) é divisor do número na casa da esquerda.

x	y	z	w

Descubra todas as soluções possíveis para x, y, z e w sabendo que a soma deles é 329.

Demonstração. Como $y \mid x$, $z \mid y$ e $w \mid z$. dessa forma por $P.5$

$$1 < x < y < z < w < 329$$

Uma vez que $w \mid z$ e $z \mid y$ por $P.2$, $w \mid y$. Mas $y \mid x$ e novamente por $P.2$, $w \mid x$. Portanto, w é divisor de cada um dos números postos nas casas. O que implica que $w \mid 329$. Sabendo que $329 = 7 \cdot 47$, segue que $w = 7$ ou $w = 47$.

- Suponha que $w = 47$. Usando, em z, o mesmo argumento que para w, podemos concluir que $z \mid (x + y + z)$. Agora note que

  $$x + y + z = 47 \cdot 2 \cdot 3 \tag{1}$$

  Lembre-se que $w \mid z$ e $w < z < 329$. Então podemos concluir que $z = 47 \cdot 2$ ou $z = 47 \cdot 3$. Entretanto $z < y < x$ e assim por (1) é necessário que $z < 47 \cdot 2$, o que não é possível, visto que $w < z$. Portanto, não há solução se $w = 47$.

- Suponhamos que $w = 7$. Da mesma forma que o caso anterior, z é divisor da soma

  $$z + x + y = 7 \cdot 2 \cdot 23. \tag{2}$$

  Dessa forma as únicas alternativas para z serão: $z = 7 \cdot 23$ e $z = 7 \cdot 2$. Mas para ter $z < y < x$ e para satisfazer (2) se faz necessário que $z < 7 \cdot 23$. Logo $z = 7 \cdot 2$. Por outro lado, y é divisor da soma

  $$x + y = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11. \tag{3}$$

Uma vez que $z \mid y$ e $z < y$, segue que as possibilidades pra y serão: $y = 7 \cdot 2 \cdot 2$ ou $y = 7 \cdot 2 \cdot 11$. Mas para ter $y < x$ e satisfazer (3) é necessário que $y < 7 \cdot 2 \cdot 11$. Portanto, $y = 7 \cdot 2 \cdot 2$.

Finalmente, a única solução possível será

$$w = 7\ z = 7 \cdot 2,\ y = 7 \cdot 2 \cdot 2,\ \text{e}\ x = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10.$$

$\square$

Proposição 1.2. *Sejam $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Então existem únicos q e r, em $\mathbb{Z}$, tais que*

$$a = b \cdot q + r,\ \textit{onde}\ 0 \leq r < |d|$$

Alguns leitores podem olhar com estranheza o fato do *Algoritmo da Divisão Euclideana* aparecer como um resultado, e não como uma definição. Entretanto, a existência de q e r na Proposição 1.2 é algo passível de demonstração (vide [1] página 59) e não uma coisa natural ao conjunto $\mathbb{Z}$.

Agora nos concentraremos na parte central deste artigo que é a *congruência modulo um inteiro*.

Definição 1.2. Seja $m \in \mathbb{Z}^*$. Dois inteiros a e b serão ditos *congruentes módulo m* se os restos da divisão de a e b por m coincidem. Neste caso usaremos a notação $a \equiv b \mod m$

Exemplo 1.3. $12 \equiv 15 \mod 3$, $236 \equiv 26 \mod 10$, $15 \equiv -1 \mod 4$, $21 \equiv 0 \mod 7$. De maneira geral esse último exemplo pode ser enunciado da seguinte forma: se $a \mid m$, então $a \equiv 0 \mod m$

Antes de prosseguirmos, note que dados $a,\ b \in \mathbb{Z}$ sempre temos que $a \equiv b \mod 1$. Então o caso em que $m = 1$ fica pouco interessante para a congruência. Por esse motivo, de agora em diante vamos supor que $m > 1$.

Proposição 1.3. *Sejam $a,\ b \in \mathbb{Z}$. Então $a \equiv b \mod m$ se, e somente se, $m \mid (a - b)$.*

Demonstração. Se $a \equiv b \mod m$, então existem $q,\ q'$ e r tais que $a = m \cdot q + r$ e $b = m \cdot q' + r$. Logo $a - b = m(q - q')$, e portanto $m \mid (a - b)$

Reciprocamente, pela Proposição 1.2 temos

$$a = mq + r \text{ e } b = mq' + r' \tag{4}$$

para únicos $q,\ q',\ r,\ r' \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r, r' < m$. Segue de 4 que $a - b = m(q - q') + r - r'$. Como $m \mid (a - b)$, segue que $r = r'$ $\square$

A proposição a seguir lista uma uma série de propriedades a cerca da congruência modulo um inteiro.

Proposição 1.4. *Sejam $a,\ b, c,\ d,\ m$ e n inteiros com $m > 1$ e $n \geq 1$. Então as seguintes condições são satisfeitas:*

C.1 $a \equiv a \mod m$.

C.2 Se $a \equiv b \mod m$, *então* $b \equiv a \mod m$.

C.3 Se $a \equiv b \mod m$ *e* $b \equiv c \mod m$, *então* $a \equiv c \mod m$.

C.4 Se $a \equiv b \mod m$ *e* $c \equiv d \mod m$, *então* $(a \pm c) \equiv (b \pm d) \mod m$.

C.5 Se $a \equiv b \mod m$ *e* $c \equiv d \mod m$, *então* $(a \cdot c) \equiv (b \cdot d) \mod m$.

C.6 Se $a \equiv b \mod m$, *então* $a^n \equiv b^n \mod m$.

É importante ressaltarmos que as propriedades C.1 a C.3 fazem da congruência modulo um inteiro uma *relação de equivalência* em $\mathbb{Z}$, enquanto que as propriedades C.4 e C.5 sugerem que é possível realizar operações aritméticas com essa relação. As demonstrações dessa propriedades serão omitidas. Entretanto leitores mais curiosos podem encontrá-las em [2] no capítulo 9.

Exemplo 1.4 (Resto da divisão de um número muito grande). Uma primeira aplicação da congruência modulo um inteiro é determinar o resto da divisão. Observe que para achar o resto da divisão entre os inteiros a e m, consiste no fato de achar um inteiro r de modo que $a \equiv r \mod m$ com $0 \leq r < m$. Como por exemplo, iremos determinar o resto da divisão de 2^{30} por 17. Note que $2^4 \equiv -1 \mod 17$. Assim pela propriedade C.6, $(2^4)^7 \equiv (-1)^7$

mod 17, ou seja, $2^{28} \equiv -1 \mod 17$. Agora pela propriedade C.5 segue que $2^{28} \cdot 2^2 \equiv (-1) \cdot 2^2 \mod 17$, ou seja, $2^{30} \equiv -4 \mod 17$. Entretanto, observe que $(-4) \equiv 13 \mod 17$, dessa forma pela propriedade C.3 $2^{30} \equiv 13 \mod 17$. Portanto o resto da divisão de 2^{30} por 17 é 13.

Uma observação natural e bem interessante é que se dois números inteiros tem o mesmo algarismo na casa das unidades, então eles serão congruentes módulo 10. Por exemplo $12 \equiv 2 \mod 10$, $329 \equiv 19 \mod 10$, $2018 \equiv 1998 \mod 10$ e assim por diante.

Exemplo 1.5 (OBM - 2003)**.** Seja $n = 9867$. Se você calculasse $n^3 - n^2$ você encontraria um número cujo algarismo das unidades é
(a) 0 (b) 2 (c) 4
(d) 6 (e) 8.
Note que $n \equiv 7 \mod 10$. Pela propriedade C.6 $n^3 \equiv 7^3 \mod 10$ e $n^2 \equiv 7^2 \mod 10$. E pela propriedade C.4 $n^3 - n^2 \equiv 7^3 - 7^2 \mod 10$. Logo $n^3 - n^2$ tem o mesmo algarismo das unidade que o número $7^3 - 7^2 = 294$. Portanto, a resposta é letra (c).

Problemas propostos

Para finalizar, serão listados alguns problemas para que o leitor ponha em prática o conteúdo deste artigo.

Problema 1. (Banco de questões OBMEP - 2007) Quantos são os números que ao dividir 2007 deixam resto 5?
(Resposta: divisores de 2002)

Problema 2. (Adaptada - Banco de questões OBMEP - 2016) Qual o resto que 2015 deixa na divisão por 20?
(Resposta 15)

Problema 3 (Clássica)**.** Um macaco está posicionado na base de uma escadaria onde os números de degraus é um múltiplo de 7, compreendido entre 40 e 100. Na primeira vez que sobe, o macaco pula de 2 em 2 degraus, isso faz com que reste apenas 1 degrau para completar a escada. Pela segunda fez, ele decide subir de 3 em 3 degraus, e isso faz com qe restem 2 degraus. Qual é o número de degraus dessa escada.
(Resposta: 77)

Referências

[1] HEFEZ, A.,*Curso de álgebra, volume 1*, Coleção matemática universitária, IMPA, 2014

[2] HEFEZ, A.,*Elementos de aritmética*, Coleção textos universitários, SBM, 2006

2. Soluções de Olimpíadas

Nesta edição apresentaremos a resolução de três questões discursivas da prova da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2017 referentes ao nível 3.

Questão 1.

a) Sabendo que a média aritmética de k números positivos $x_1, x_2, ..., x_k$ é maior ou igual que a média geométrica desses números:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_k}{k} \geq \sqrt[k]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_k},$$

mostre que

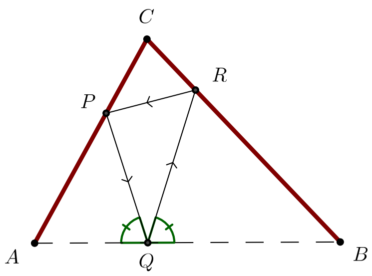
$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{k-1}}{x_k} + \frac{x_k}{x_1} \geq k.$$

b) A alometria é a parte da biologia que estuda a variação na forma entre espécies e indivíduos da mesma espécie. As funções que descrevem esses fenômenos são ditas alométricas e são da forma $f(x) = a.x^b$, com $a,\ b > 0$. Considere a seguinte combinação de funções alométricas:

$$f : \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right] \to \mathbb{R}$$

dada por $f(x) = (n+1)x^n - n.x^{n+1}$, com $n \in \mathbb{N}$. Verificar que f é limitada inferiormente por 0 e limitada superiormente por 1, ou seja, $0 \leq f(x) \leq 1$.

Questão 2. Um garoto se posiciona em um ponto Q localizado entre os pontos A e B (ver figura) e chuta uma bola que bate na parede representada por BC, seguindo até a parede AC e volta precisamente ao ponto Q de onde foi chutada (sem perder contato com o solo) de modo que $\angle AQP = \angle BQR$. Mostre que o ponto Q é pé da altura relativa ao lado AB no triângulo ABC.



Questão 3. Em algumas cidades do interior de Pernambuco costumava-se jogar, usando feijões, o seguinte jogo para dois jogadores: Dispunha-se sobre a mesa uma quantidade qualquer de feijões, digamos n feijões. Cada jogador tem que retirar um certo número de feijões que pode variar desde um feijão até uma quantidade que não seja maior que a número de feijões que ainda restarem na mesa após a jogada. Por exemplo, se restam 5 feijões sobre a mesa o próximo jogador a retirar pode retirar 1 ou 2 feijões. Perde o jogador que retirar o último feijão. Para quais valores de n o primeiro jogador pode encontrar uma estratégia vencedora? E o segundo jogador?

Resolução

Questão 1. a) $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_3}, \ldots, \frac{x_{k-1}}{x_k}, \frac{x_k}{x_1}$ são k números positivos, logo:

$$\frac{\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{k-1}}{x_k} + \frac{x_k}{x_1}}{k} \geq \sqrt[k]{\frac{x_1}{\cancel{x_2}} \cdot \frac{\cancel{x_2}}{\cancel{x_3}} \cdots \frac{\cancel{x_{k-1}}}{\cancel{x_k}} \cdot \frac{\cancel{x_k}}{x_1}} = \sqrt[k]{\frac{x_1}{x_1}} = 1.$$

b) Perceba que $f(x) = x^n\left[(n+1) - n.x\right]$, logo $f(0) = 0$. E $f(x) \geq 0$, pois $0 \leq x \leq 1 + \dfrac{1}{n} = \dfrac{n+1}{n}$. Agora consideremos x no intervalo $\left(0,\ 1 + \frac{1}{n}\right]$. Tomemos então $x_1 = x^{n+1}$, $x_2 = x^n, \ldots, x_{n-1} = x^3$, $x_n = x^2$, $x_{n+1} = x$ na desigualdade do item anterior:

$$\underbrace{\frac{x^{n+1}}{x^n} + \frac{x^n}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{x^3}{x^2} + \frac{x^2}{x}}_{n-parcelas} + \frac{x}{x^{n+1}}$$
$$= \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{x_1}$$
$$\geq n + 1 \therefore$$

$$n.x + \frac{1}{x^n} = \underbrace{x + x + \cdots + x + x}_{n-parcelas} + \frac{1}{x^n} \geq n + 1 \therefore$$

$$n.x^{n+1} + 1 \geq (n+1)x^n \therefore$$

$$1 \geq (n+1)x^n - n.x^{n+1} = f(x).$$

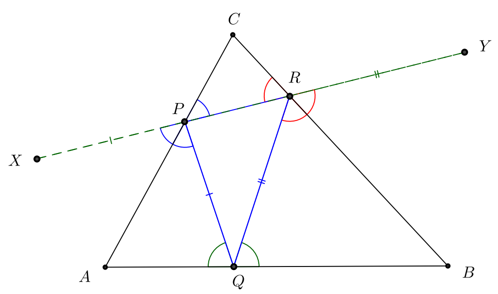
■

Questão 2. Primeiramente, observe que os ângulos obtidos pela trajetória da bola com as paredes satisfazem: $\angle CPR = \angle APQ$ e $\angle CRP = \angle BRQ$.

Sobre a reta PR considere os pontos X, Y tais que $XP = PQ$ e $YR = RQ$.

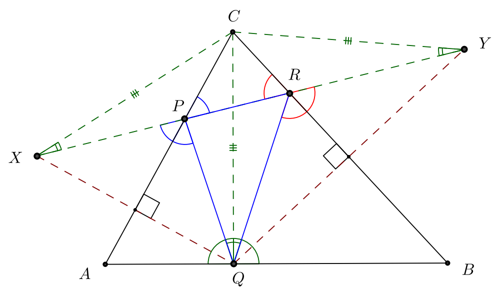
Temos que $\angle CPR = \angle APX$ (são opostos pelo vértice). Analogamente, $\angle CRP = \angle BRY$

Sabemos que num triângulo isósceles, a bissetriz relativa à base coincide com altura e mediana.



Logo, AC é mediatriz do segmento XQ e CB mediatriz de QY. Seque-se que $CX = CQ = CY$. Daí, CXY é isósceles.

ISSN 2526-8651



Sendo assim, $\angle CXY = \angle CYX$. Visto que CQY e RQY são também isósceles, obtém-se $\angle CYX = \angle CQR$. Analogamente, $\angle CXP = \angle PQC$.

Ora, os ângulos $\angle AQC$ e $\angle CQB$ são congruentes e suplementares. Portanto, cada um mede 90º e concluímos que CQ é a altura relativa ao lado AB.■

Questão 3. Vamos verificar o que ocorre com poucos feijões. Chamamos o primeiro jogador de A e o segundo de B.

- 1 feijão: A perde
- 2 feijões: A retira 1 e faz B perder. A ganha.
- 3 feijões: A é obrigado a tirar 1 agora B esta na posição de A num jogo com 2 feijões. B ganha.
- 4 feijões: A pode tirar 1 feijão e colocar B na posição de A num jogo com 3 feijões. A ganha.
- 5 feijões: A pode tirar 2 feijões e colocar B na posição de A num jogo com 3 feijões. A ganha.
- 6 feijões: A pode tirar 3 feijões e colocar B na posição de A num jogo com 3 feijões. A ganha.
- 7 feijões: A so pode tirar 1, 2, ou 3 feijões, nesse caso ele coloca B na condicão de A num jogo com 6,5 ou 4 feijões. B ganha.
- de 8 a 14 feijões: A pode tirar de 1 a 7 feijões de modo a colocar B na condição de A num jogo com 7 feijões: A ganha.
- 15 feijões: A so pode tirar de 1 a 7 feijões deixando B na condição de A num jogo de 8 a 14 feijões. B ganha.
- de 16 a 30 feijões: A deixa B com 15. A ganha.
- 31 feijões: Apos jogar A deixa B com uma quantidade entre 16 e 30 feijões. B Ganha.

Em geral...

- de 2^k ate $2^{(k+1)} - 2$ feijões: A ganha
- $2^{(k+1)} - 1$ feijões: B ganha

Prova por inducão: A base ja foi bem explicada. Supondo o resultado verdadeiro para um certo $k > 1$ vamos ver o que acontece para k+1.

- de $2^{(k+1)}$ ate $2^{(k+2)}-2$ feijões: A retira de 1 ate $2^{(k+1)} - 1$ de modo a deixar B com $2^{(k+1)} - 1$ feijões. Assim, B assume a posição de A num jogo com $2^{(k+1)} - 1$ e perde, ou seja A ganha.
- $2^{(k+1)}-1$ feijões: A só pode tirar de 1 ate 2^k-1 feijões. Nesse caso B fica com uma quantidade de feijões que varia de 2^k ate $2^{(k+1)} - 1$ feijões assumindo o lugar de A num jogo com essa quantidade de feijões B ganha.

■

3. Curiosidades

OEIS

Por Gabriel Araújo Guedes [1]

OEIS é a abreviação de Online Encyclopedia of Integer Sequences um dos mais bem sucedidos projetos de distribuição do conhecimento. Como o nome diz é uma enciclopédia (banco de dados) de sequências de inteiros. Conta com mais de 300.000 delas. Inicialmente focada em análise combinatória e teoria dos números, atualmente conta com uma

[1]Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

ampla gama de sequências das mais diversas áreas, como física, química, engenharia, telecomunicações e várias outras.

E como ela pode ser usada? De várias maneiras. Vamos a alguns exemplos. Você pode digitar alguns termos e checar se eles pertencem ao banco de dados. Vejamos que ao digitar os termos 3,5,8,13 o buscador encontra 280 sequências com esses termos, obviamente a primeira delas é a de Fibonacci.

Outra forma de procurar é semanticamente, isto é, ao digitar, Catalan Numbers, Schubert Calculus encontrará uma centena de sequências relacionadas a esses tópicos.

Podes também pesquisar por desigualdades, isto mesmo, se suspeitas que $\sigma(n) < n\sqrt{(n)}$ e pesquisares por $[n\sqrt{(n)}] - \sigma(n)$, no qual [ ] denota a função menor inteiro, receberás como resposta a sequência de código A55682, com várias referências de como provar essa inequação.

O retorno de cada busca não é uma simples tabela de termos da sequência, além da tabela, as referências são compostas por: links para artigos, livros, códigos de Maple, Mathematica, Pari/GP, relação de recorrência e fórmula fechada que a define se houverem. Ou seja, a descrição do estado da arte no tema pesquisado.

Assim da próxima vez que estiver pesquisando um problema e conseguir calcular alguns termos, mas não conseguires calcular o caso geral, procure na OEIS.org. Pois é provável que irás achar alguma coisa legal lá. E se não achares nada, parabéns. Terás achado uma nova sequência. A fundação que mantém a OEIS é super-receptível a novas contribuições, a atualização do banco de dados tem uma média de 15.000 novas inclusões por ano.

4. Indicações de Leituras

O Homem que Viu o Infinto

Yane Lísley Ramos Araújo[2]

O homem que viu o infinito conta a história de um gênio da matemática, indiano e autodidata pouco conhecido pelo público geral chamado Srinivasa Ramanujan. O filme encanta pois mostra a forma que Ramanujan encarava as coisas, com certa inocência, dizia que suas fórmulas matemáticas vinham de sonhos e mostra como a ajuda de pessoas que gostavam dele fez com que uma de suas cartas chegasse até o grande professor de matemática pura da Universidade de Cambridge, Godfrey Harold Hardy que o chama para a universidade, ouvindo os conselhos do brilhante matemático John Edenson Littlewood.

Essa parceria com Hardy e Littlewood mudou a vida de Ramanujan e os rumos da matemática uma vez que o mesmo trabalhou em diversas teorias realizando contribuições nas áreas de análise matemática, teoria dos números, séries infinitas e até em teorias que futuramente ajudariam a esclarecer os mistérios dos buracos negros.

O filme não possui muitos recursos visuais para instigar o público mas aborda temas interessantes como os conflitos da fé de Ramanujan, a necessidade de deixar a família e esposa para prosseguir nos estudos e o sofrimento com a falta de comunicação com as mesmas, além do preconceito existente nos britânicos em relação aos indianos.

Embora Ramanujan tenha sido fatalmente levado aos 32 anos, devido à uma tuberculose, o filme deixa uma mensagem linda de superação uma vez que mostra que mesmo vindo de uma família humilde, sem boa saúde, quando se acredita num sonho tudo é possível até mesmo ver o infinito...

[2]Professora do Departamento de Matemática da UFRPE

5. Eventos

Este ano teremos importantes eventos de matemática realizados no Brasil.

Fiquem Ligados!!!

- **I Encontro Paranaense de Mulheres na Matemática**
  - Local: Universidade Federal da Paraná (UFPR) e Universidade Tecnológica do Paraná (UTFPR) - Curitiba - PR
  - Data: 26 e 27 de abril de 2018
  - Maiores informações: http://https://sites.google.com/view/eprmm2018
- **3º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Sul**
  - Local: Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS) - Chapecó - SC
  - Data: 04 a 06 de maio de 2018
  - Maiores informações: http://anpmat.sbm.org.br/simposio-sul-3/
- **Semana da Matemática**
  - Local: Universidade de Pernambuco (UPE) - Campus: Mata Norte- PE
  - Data: 07 a 09 de maio de 2018
  - Maiores informações: https://sites.google.com/view/semanadamatematicaupe/home
- **II Semana do Matemático**
  - Local: Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ) - Rio de Janeiro- RJ
  - Data: 07 a 09 de maio de 2018
  - Maiores informações: ii.semanadomatematico.ime.uerj.br

6. Problemas

Para concluir deixamos para o leitor alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Problema 1 (38º Olimpíada Brasileira de Matemática)**.** Janaína quer pintar as casas de um tabuleiro 7×7 de vermelho, de azul ou de marrom, da seguinte maneira: em cada linha, o número de casas vermelhas não pode ser menor que o número de casas com cada uma das outras cores e, em cada coluna, o número de casas azuis não pode ser menor que o número de casas com cada uma das outras cores. Todas as linhas e colunas devem conter casas das três cores.

a) Pelo menos quantas casas serão pintadas de vermelho?

b) Quantas casas serão pintadas de marrom?

Problema 2 (XXXV Olimpíada cearense de matemática - Nível 2)**.** Se P e Q são pontos do plano, denotamos $|\overline{PQ}|$ o comprimento do segmento $\overline{PQ}$. Seja ABC um triângulo. Considere o ponto $D \in \overline{BC}$ tal que $|\overline{BD}| = 2|\overline{DC}|$. Mostre que

$$3|\overline{AD}| < |\overline{AB}| + 2|\overline{AC}|$$

Problema 3. Encontre todas as soluções em inteiros de $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 40$.

Mandem soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, sua solução deve ser enviada até **01/06/2018**.

7. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1 , n.4, Novembro de 2017**.

Problema 1. Encontre todos os polinômios p com coeficientes reais tais que

$$xp(x) + yp(y) \geq 2p(xy)$$

para todo x, y reais.

Solução. Seja p um polinômio que satisfaz essa desigualdade. Se vale para todo x, y reais , vale para $y = 0$ e x qualquer. Nesse caso a desigualdade fica $xp(x) - 2p(0) \geq 0$. Defina $q(x) = xp(x) - 2p(0)$. Temos $q(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Observe que isso implica que se $x \to +\infty$ então $q(x) \to +\infty$ e se $x \to -\infty$ então $q(x) \to +\infty$. Podemos então concluir que $q(x)$ é um polinômio de grau par e tem coeficiente líder positivo. Logo se $q(x) = xp(x) - 2p(0)$ tem grau par então $p(x)$ tem grau impar. Ou seja, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, com n impar e $a_n > 0$.

Agora vamos fazer $y = x$, assim temos que que $2xp(x) \geq 2p(x^2)$, ou seja,

$$\begin{aligned} a_n x^{n+1} + a_{n-1}x^n + \ldots + a_1 x^2 + a_0 x \quad &\geq \\ a_n x^{2n} + a_{n-1}x^{2n-2} + \ldots + a_1 x^2 + a_0 & \end{aligned}$$

essa desigualdade só é possível para x suficientemente grande, se o polinômio ao lado esquerdo da desigualdade tiver grau maior ou igual que o do polinômio do lado direito. O que implica $n + 1 \geq 2n \Rightarrow 1 \geq n$. Portanto $deg(p) = 0$ ou $deg(p) = 1$. Até agora concluímos que ou $P(x) = a_0$ com $a_0 > 0$ o qual satisfaz a desigualdade inicial. Ou $p(x) = a_1 x + a_0$, com $a_1 > 0$. Vamos analisar mais de perto este caso.

Colocando essa classe de polinômio na desigualdade temos

$$x(a_1 x + a_0) + y(a_1 y + a_0) \geq 2a_1 xy + 2a_0$$

$$\Rightarrow a_1(x - y)^2 + a_0(x + y - 2) \geq 0$$

E tomando novamente $y = x$ temos da desigualdade acima que $2a_0(x - 1) \geq 0$ para todo x real. O que só é possível se $a_0 = 0$. Consequentemente $p(x) = a_1 x$ com $a_1 > 0$.

Concluímos que os polinômios possíveis de satisfazer essa desigualdade são $p(x) = 1$ e $p(x) = x$ ou suas multiplicações por uma constate positiva.

$\square$

Problema 2 (ORMGrande PoA - Nível 2 - 2014)**.** A partir de um primeiro número inteiro, construímos sucessivamente uma sequência de infinitos inteiros usando a seguinte regra: "cada novo número da sequência é igual à soma dos quadrados de cada dígito da representação decimal do último número da sequência". Exemplo: tomando como primeiro número 5382, o segundo será $5^2+3^2+8^2+2^2 = 102$, o terceiro $1^2+0^2+2^2 = 5$, o quarto 25, etc. Pergunta-se: tomando 1248 como primeiro número, quem será o 2014-ésimo número da sequência?

Solução. Gerando os primeiros termos da sequência, obtemos:

$$184\ 85\ 89\ 145\ 42\ 20\ 4\ 16\ 37\ 58\ 89 \ldots$$

a repetição do número 89 indica que, a partir do terceiro termo, a sequência consiste na repetição sucessiva do bloco de números da forma: 89 145 42 20 4 16 37 58. A partir de $2014 = 8\dot{2}50 + 6$, que devemos escrever como $2014 = 2 + 250\dot{8} + 4$, segue que o 2014-ésimo elemento da sequência está na quarta posição do 251-ésimo bloco, ou seja: este elemento é o número 20. $\square$

Problema 3 (38ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - 2ª Fase - Nível 2)**.** Uma lista de números de dois dígitos é legal se, a partir de seu segundo termo, a quantidade de divisores positivos de cada um é maior que a do número que o precede na lista e, além disso, pelo menos um de seus dígitos é maior que um dos dígitos do número que o precede. Qual é o tamanho máximo de uma lista legal?

Solução. Como $27 > 100$, e 2 é o menor número primo, nenhum número de dois dígitos pode ter mais que 6 fatores primos em sua fatoração. Além disso, como $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 > 100$, nenhum número de dois dígitos pode pode ter mais que três fatores primos distintos. Assim, a fatoração em primos de um número de dois dígitos é da forma $p^x q^y r^z$, com $x + y + z \leq 6$ e p, q e r primos distintos. Com essas restrições, um número de dois dígitos possui no máximo 12 divisores positivos. Como não existe um inteiro de dois dígitos com 11 divisores, pois nenhum número de dois dígitos possui 10 fatores primos, a quantidade máxima de inteiros da lista é $11 - 1 = 10$. Um exemplo de lista é:

$$13, 2\underline{5}, 3\underline{5}, 1\underline{6}, 2\underline{8}, \underline{6}4, 5\underline{6}, 3\underline{6}, 4\underline{8}, \underline{9}6.$$

Em cada número da lista, sublinhamos o dígito que é maior que um dos dígitos do número que o precede na lista.

$\square$