É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

2018 - Número 5, volume 1, Janeiro de 2018
ISSN 2526-8651

Sumário

1. Artigo

Entendendo diferentes tipos de infinito

Isis Gabriella de Arruda Quinteiro Silva
UFRPE - CEGEN - Departamento de Matemática
52171-900 - Recife - PE - Brasil

Você já parou para pensar no fato de que os conjuntos dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, dos números racionais $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ e dos números reais $\mathbb{R}$ são todos infinitos, mas $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$? A partir daí, surge naturalmente uma questão sobre o tamanho dos infinitos. Mais especificamente, podemos nos perguntar: "Se um conjunto infinito A cabe dentro de outro conjunto B, e B possui mais elementos do que A, podemos afirmar que o conjunto B tem um tamanho infinito maior do que A?". Este tipo de questionamento foi feito pelo matemático alemão Georg Cantor e pode ser respondido através das noções de conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis, que nos fornecem uma maneira de "quantificar" o tamanho do infinito com que estamos trabalhando. O objetivo deste texto é introduzir as noções e ideias necessárias para a compreensão do tema. Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos o conjunto $I_n = \{k \in \mathbb{N}; k \leq n\} = \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Definição 1.1. Um conjunto X é finito se ele é vazio ou se existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : I_n \to X$. Fazendo $f(k) = x_k$, $k \in I_n$, podemos escrever $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. A bijeção f chama-se contagem dos elementos de X e o número n se chama a cardinalidade do conjunto X.

Observação 1.2. Podemos mostrar que a cardinalidade de um conjunto finito X está bem definida, isto é, independe da escolha da bijeção f. Para isto, veja [3].

Definição 1.3. Um conjunto X diz-se infinito quando ele não é finito, isto é, se $X \neq \emptyset$ e não existe qualquer correspondência biunívoca $f : I_n \to X$, com $n \in \mathbb{N}$.

Lema 1.4. O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é infinito.

Prova:
De fato, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$ e qualquer função $f : I_n \to X$, se fizermos $k = f(1) + f(2) + ... + f(n)$, temos que $f(p) < k$, para cada $p \in I_n$. Neste caso, k é um elemento de $\mathbb{N}$ que não está na imagem de f. Logo, f não é sobrejetiva e, portanto, não pode ser uma bijeção.

Sobre conjuntos finitos e infinitos, temos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser feita utilizando-se o Princípio da Indução Finita e pode ser encontrada em [3].

Lema 1.5. Sejam A e B conjuntos tais que $A \subset B$. Temos:

1. Se B é finito, então A é finito.
2. Se A é infinito, então B é infinito.

Com base no lema anterior, podemos dizer que dentro de um conjunto finito, cabem apenas conjuntos finitos. Por outro lado, a infinitude de uma parte de um determinado conjunto, implica na infinitude do conjunto todo. Mas, de que modo se comporta a infinitude do conjunto todo? Seria de alguma forma maior do que a infinitude da parte? Com a finalidade de responder a tais questionamentos, definimos:

Definição 1.6. Um conjunto X é enumerável se ele for finito ou se existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$.

Por exemplo, o conjunto (infinito!) dos números naturais $\mathbb{N}$ é enumerável, bem como qualquer subconjunto dele. Com efeito, $\mathbb{N}$ é evidentemente enumerável e, se $X \subsetneq \mathbb{N}$ for finito, X é enumerável por definição. Se X é infinito, podemos definir uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$, fazendo $f(n) = x_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, da seguinte maneira:

$$
\begin{gathered}
x_1 \text{ é o menor elemento de } X;\\
x_2 \text{ é o menor elemento de } X - \{x_1\};\\
x_3 \text{ é o menor elemento de } X - \{x_1, x_2\};\\
\\
\vdots\\
x_{n+1} \text{ é o menor elemento de } X - \{x_1, x_2, ..., x_n\};
\end{gathered}
$$

Claramente, f é injetiva. Para verificarmos a sobrejetividade de f, suponhamos que exista $x \in X$ com $x \notin \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Assim, teríamos $x \geq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, x seria uma cota superior para o conjunto $f(\mathbb{N})$, o que não é possível pois $f(\mathbb{N})$ não é finito.

A seguir, elencamos alguns resultados interessantes sobre enumerabilidade e não-enumerabilidade de conjuntos, que podem nos fornecer exemplos e cujas demonstrações podem ser vistas em [3].

Proposição 1.7. Sejam X e Y conjuntos quaisquer. Temos:

1. Se Y é enumerável e $X \subset Y$, então X é enumerável.
2. Se X ou Y é enumerável e $X \cap Y \neq \emptyset$, então $X \cap Y$ é enumerável.
3. Se X e Y são enumeráveis, então $X \cup Y$ é enumerável.
4. Se $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ são conjuntos enumeráveis, então $X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n \cup ...$ é um conjunto enumerável.
5. Se X e Y são enumeráveis, então o produto cartesiano $X \times Y = \{(x, y); x \in X, y \in Y\}$ é enumerável.

Para ilustrar o conceito de enumerabilidade, o matemático alemão David Hilbert imaginou um hotel com uma quantidade infinita de quartos. O hotel está lotado. Entretanto, há uma placa localizada na porta informando que há vagas disponíveis. Chega um novo hóspede e solicita um aposento. O gerente lhe informa, que apesar do hotel estar lotado, ele irá providenciar uma vaga. O gerente pede, então, a todos os hóspedes que se mudem para o quarto ao lado, um número acima do seu. Assim, o hóspede do quarto 1 muda-se para o quarto 2, o hóspede do quarto 2 vai para o quarto 3 e, assim, sucessivamente. Então, o novo hóspede ocupa o quarto de número de 1 e todos os que já estavam hospedados no hotel antes, continuam hospedados. Logo depois, chega ao hotel um ônibus com 45 passageiros, todos precisando de acomodações individuais. O gerente solicita, então, que todos os hóspedes se mudem da seguinte maneira: o hóspede do quarto n irá passar a ocupar o quarto $n + 45$. Então os passageiros do ônibus ocupam os quartos de 1 a 45 e todos ficam alojados. No dia seguinte, o hotel continua lotado, quando chega um ônibus com uma quantidade infinita de passageiros, cada um deles com um crachá, que o identifica por um número natural. O gerente garante que conseguirá acomodar todo mundo. Ele solicita, então, que cada hóspede se mude para o quarto cujo número seja o dobro do número do quarto onde ele está. Assim, o hóspede do quarto 1 se muda para o quarto 2, o do quarto 2 se muda para o quarto 4 e assim por diante. Todos aqueles que se encontravam no hotel continuam alojados e ainda ficou disponível uma quantidade infinita de quartos (os de numeração ímpar), de modo que todos os passageiros do ônibus puderam ser hospedados.

Horas depois, surge um novo desafio para o gerente do hotel. Chega uma quantidade infinita e enumerável de ônibus, cada um deles com uma quantidade infinita e enumerável de viajantes, de modo que cada ônibus recebe um número para identificação, bem como cada um de seus respectivos passageiros. O gerente conseguiu acomodar todos os viajantes? (Texto adaptado do livro [2])

Exemplo:

O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é enumerável, assim como o conjunto $\mathbb{N}$. Esta é uma afirmação surpreendente, pois aparentemente $\mathbb{Z}$ teria o dobro do tamanho de $\mathbb{N}$ mais um. Para verificar isto, definimos a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ por $f(m) = 2m$, se $m \geq 0$ e $f(m) = 2(-m) + 1$, se $m < 0$. Esta função é injetiva, o que garante a enumerabilidade do conjunto $\mathbb{Z}$.

A ideia da não-enumerabilidade de um conjunto se torna mais compreensível quando pensamos que os conjuntos não-enumeráveis são aqueles que possuem uma infinidade tão imensa de termos que não somos capazes de registrar ou contar todos eles. Será que todos os subconjuntos do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ são enumeráveis? A resposta a esta pergunta é negativa de acordo com a seguinte afirmação:

O conjuntos dos números reais $\mathbb{R}$ é não-enumerável.

Para demonstrar esta afirmação, utilizaremos o seguinte teorema cuja demonstração será omitida aqui. Os leitores interessados na demonstração, podem consultar [3].

Teorema 1.8. (Teorema dos Intervalos Compactos Encaixados) Dada uma sequência de intervalos limitados e fechados $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ... \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq ...$ existe pelo menos um número real x tal que $x \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

Voltando à não-enumerabilidade do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, mostraremos que não pode existir uma aplicação sobrejetora de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$. Desta forma, não poderá existir uma bijeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, o que garantirá que $\mathbb{R}$ é não-enumerável. Para isto, consideremos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = x_n$ uma função qualquer de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{R}$. Tome os intervalos $[a_1, b_1]$ tal que $x_1 \notin [a_1, b_1]$, $[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$ tal que $x_2 \notin [a_2, b_2]$, $[a_3, b_3] \subseteq [a_2, b_2]$ tal que $x_3 \notin [a_3, b_3]$, ... , $[a_2, b_2] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}]$ tal que $x_n \notin [a_n, b_n]$.

De acordo com o teorema anterior, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] \neq \emptyset$. Assim, existe $z \in [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}$. Desta forma, $z \neq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, pois $x_n \notin [a_n, b_n]$. Logo, f não é sobrejetora.

Com base no resultado acima, podemos dizer que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ possui mais elementos do que possamos imaginar! Voltando à ilustração do Hotel de Hilbert, se chegasse um ônibus com a quantidade de passageiros igual à quantidade de números reais, haveria vaga para se hospedar no hotel?

Exemplos:

1. O conjunto dos números complexos $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ é não-enumerável, pois $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2. O conjunto dos números irracionais $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é não-enumerável, uma vez que $\mathbb{Q}$ é enumerável, $\mathbb{R}$ é não-enumerável e $\mathbb{R} = \mathbb{Q}\bigcup\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

3. (XIV Olimpíada Cearense de Matemática-1994 [5])

   (a) Uma gang tem infinitos bandidos, a cada um desses meliantes tem um único inimigo no interior da gang, que ele quer matar. Prove que é possível reunir uma quantidade infinita de bandidos desta gang sem que haja risco de que um bandido mate o outro durante a reunião.

   (b) Se cada bandido tiver um número finito, mas indefinido, de inimigos (um bandido pode ter 2 inimigos, um outro somente 1, um terceiro pode ter 20, e assim por diante), será possível promover uma reunião com infinitos gangsters sem o risco de derramamento de sangue?

   Solução:
   (a) Seja $G = \{B_1, B_2, B_3, ...\}$ um subconjunto enumerável infinito do conjunto dos bandidos da gang. Mostraremos que é possível escolher $X \subset G$ sem que haja derramamento de sangue em X. Inicialmente, vamos definir para cada $i \in \mathbb{N}$ o conjunto $H_i = \{B_j \in G; B_j \text{ quer matar } B_i\}$. Dividiremos o problema em dois casos:
   1º caso: Existe i tal que H_i é infinito. Neste caso, podemos fazer $X = H_i$ e não há risco de mortes em X pois todos deste grupo odeiam apenas o bandido B_i.
   2º caso: Não existe H_i infinito. Neste caso, escolha B_1 para pertencer a X. Exclua de G os seguintes bandidos: B_1, o inimigo de B_1 e o conjunto H_1. O conjunto que resta de G, a partir destas exclusões, que chamaremos de G_1, é infinito. Agora, basta repetir o processo com G_1 no lugar de G.

   (b) A resposta é não. Mostraremos um exemplo de uma gang onde não é possível promover uma reunião com infinitos bandidos sem derramamento de sangue. Nossa gang será o conjunto $G = \{B_1, B_2, B_3, ...\}$ onde, para cada $i \in \mathbb{N}$, $i > 1$, o bandido B_i quer matar $B_1, B_2, ..., B_{i-1}$. O bandido B_1 é bonzinho e não quer matar ninguém. Nesta situação, cada bandido tem um número finito de inimigos e, em qualquer reunião com dois bandidos, um deles vai querer assassinar o outro.

4. (Competição Matemática do Rio Grande do Norte [4]) Para cada número real t, seja E_t um subconjunto de $\mathbb{R}$. Suponha que, se $s < t$ então E_s é um subconjunto próprio do conjunto E_t. Isto é, $s < t \Longrightarrow E_s \subset E_t$, com $E_s \neq E_t$. Diga, justificando, se o conjunto $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} E_t$ tem de ser não-enumerável.
   Solução: A resposta é não. Para cada número real positivo s, considere $E_s = (-s, s) \cap \mathbb{Q}$. Observe que, se $s, t \in \mathbb{R}$, temos $s < t \Longrightarrow E_s \subset E_t$, com $E_s \neq E_t$. No entanto, a união $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} E_t$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}$. Portanto, é enumerável.

Exercícios propostos:

1. Mostre que se X é um conjunto infinito, então existe uma função injetiva $f : \mathbb{N} \to X$.

2. Mostre que o conjunto dos números primos é infinito e enumerável.

3. Mostre que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável.

4. (XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática - 2ª Fase - Nível Universitário) Prove que não existe um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que:

   (a) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\{y \in \mathbb{R}; (x, y) \in A\}$ é finito.

   (b) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\{y \in \mathbb{R}; (x, y) \in A\}$ é enumerável.

5. (OBMEP-Banco de Questões 2015 [6]) Um número natural é bacana se a soma de todos os seus divisores positivos (incluindo 1 e n)

é maior ou igual ao dobro do número. Por exemplo, 12 é bacana pois $1+2+3+4+6+12 = 28 \geq 24 = 2 \times 12$ enquanto 4 não é bacana, pois $1 + 2 + 4 = 7 < 8 = 2 \times 4$. Mostre que existem infinitos números que são bacanas e infinitos números que não são bacanas.

Referências

[1] Mairly Marques Pereira, *A resolução de questões das olimpíadas de Matemática com teoremas da Aritmética*, Trabalho de conclusão de curso apresentado ao PROFMAT (2016).

[2] Maria Eulália de Moraes Melo e Jorge Antônio Hinojosa Vera, *Números Reais, vol. 1*, Editora Universitária da UFRPE (2013).

[3] Elon Lages Lima, *Curso de Análise, vol. 1*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Projeto Euclides).

[4] www.olimpiada.ccet.ufrn.br - Treinamento - Problemas semanais II - 10/03/2014 .

[5] www.gigamatematica.blogspot.com.br/2011/11/conjuntosenumeraveis

[6] www.obmep.org.br/bq/bq2015.pdf

2. Soluções de Olimpíadas

Nesta edição apresentaremos a resolução de três questões discursivas da prova da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2017 referentes ao nível 2.

Questão 1. O quadrado mágico é um jogo de completar as "casas" de uma tabela, com números, de modo que a soma dos números nas linhas, colunas e das diagonais sejam sempre iguais. Iremos completar o quadrado de tamanho 3, ou seja, 9 casas serão preenchidas com os números distintos de 1 a 9. Por exemplo:

a) É possível completar os quadrados abaixo?

	5	
2		

	5	2

		2
	5	

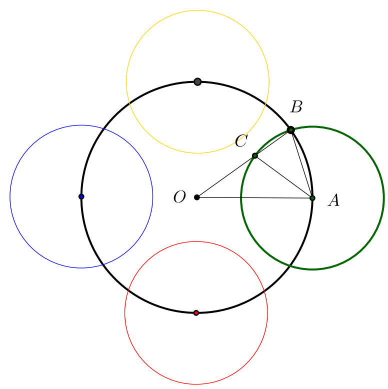
b) Prove que qualquer preenchimento do quadrado mágico deve ter sempre o número 5 no seu centro.

c) Descrever todas as soluções possíveis.

Questão 2. Encontre todos os pares de números naturais (m, n) que são soluções da equação

$$5^m + 231 = 4^n.$$

Questão 3. Na tentativa de montar o símbolo da OPEMAT, um designer gráfico desenhou 4 círculos de raios iguais a r, cujos centros estão igualmente espaçados na circunferência maior de centro O raio R. Percebeu-se que, se B é um dos pontos de interseção de um das circunferências menores de centro A com a circunferência de centro O, então OB corta essa circunferência menor em um ponto C tal que AC é bissetriz do ângulo $\angle OAB$. Determine o valor de r em função de R.



Resolução

Questão 1. a) É possível completar o primeiro e o terceiro quadrado da seguinte maneira:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

4	9	2
3	5	7
8	1	6

O quadrado do meio não pode ser completado. De fato, 9+5+1=15=9+4+2 são as únicas maneiras de escrever 15 como soma de três números de 1 à 9 com um deles sendo 9. Daí o segundo quadrado deve ter 9 e 4 preenchendo a terceira coluna do quadrado e temos 2 maneiras de fazer isso:

		9
	5	2
		4

ou

		4
	5	2
		9

Continuando o processo temos:

6		9
	5	2
1		4

ou

1		4
	5	2
6		9

O quadrado não pode ser completado, pois temos uma linha com 6 e 9, forçando o terceiro número ser 0.

b) Verifiquemos que a soma dos números postos em cada linha, coluna ou diagonal devem ser iguais a 15. Ponhamos as letras $a, b, c, d, x, e, f, g, h$ para representar os números na tabela:

a	b	c
d	x	e
f	g	h

$$\begin{aligned} a+b+c+d+x+e+f+g+h &= \\ 1+2+3+4+5+6+7+8+9 &= \frac{(9+1).9}{2} \\ &= 45 \end{aligned}$$

Como a soma nas linhas são iguais, podemos separar no primeiro membro das igualdades os elementos das linhas de modo que concluímos que:

$$a+b+c = d+x+e = f+g+h = 15(linhas)$$

E como as somas nas colunas e nas diagonais também devem ser iguais, concluímos que:

$$a+d+f = b+x+g = c+e+h = 15(colunas)$$

$$a+x+h = c+x+f = 15(diagonais)$$

Agora, somando todas as linhas, colunas e diagonais que contém x, teremos $4 \cdot 15 = 60$. Nesta conta estamos contando o x 4 vezes e todas as outras casas apenas 1 vez. Assim,

$$\begin{aligned} 1+2+...+7+8+9+3x &= 60 \\ 45+3x &= 60 \\ 3x &= 15 \\ x &= 5. \end{aligned}$$

c) Pelo item a) o 9 só pode estar na coluna ou linha central e acompanhado de 2 e 4 e 5 e 1. Isso nos dá as seguintes possibilidades:

	9	
	5	
	1	

$\longrightarrow$

2	9	4
7	5	3
6	1	1

$\searrow$

4	9	2
3	5	7
8	1	6

	1	
	5	
	9	

$\longrightarrow$

6	1	8
7	5	3
2	9	4

$\searrow$

8	1	6
3	5	7
4	9	2

9	5	1

$\longrightarrow$

2	7	6
9	5	1
4	3	8

$\searrow$

4	3	8
9	5	1
2	7	6

1	5	9

$\longrightarrow$

6	7	2
1	5	9
8	3	4

$\searrow$

8	3	4
1	5	9
6	7	2

■

Questão 2. Note que o primeiro membro da equação deixa resto 1 na divisão por 5. Isso nos diz que n deve ser par. Assim $n = 2k$. Logo, $5^m + 231 = 16^k$. Como o segundo membro desta última equação é múltiplo de 8 devemos ter que 5^m deixa resto 1 na divisão por 8, e daí temos que m é par. Assim $m = 2l$. Desse modo, a nossa equação toma a seguinte forma:

$$5^{2l} + 231 = 4^{2k}.$$

Podemos manipular a nossa equação da seguinte maneira:

$$231 = 4^{2k} - 5^{2l} = (4^k + 5^l)(4^k - 5^l).$$

Uma vez que $231 = 3.5.7$, temos os seguintes casos a considerar:

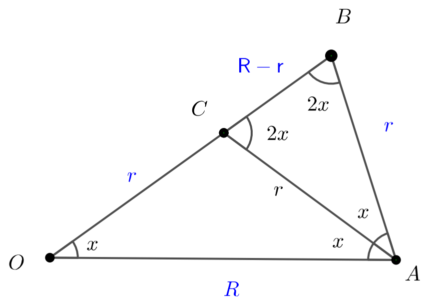
- $4^k + 5^l = 1$: É possível verificar diretamente que esse caso não possui solução.
- $4^k + 5^l = 3$: É possível verificar diretamente que esse caso não possui solução.
- $4^k + 5^l = 7$: É possível verificar diretamente que esse caso não possui solução.
- $4^k + 5^l = 11$: É possível verificar diretamente que esse caso não possui solução.
- $4^k + 5^l = 21$: É possível verificar diretamente que $k = 2$ e $l = 1$ é a única solução.
- $4^k + 5^l = 33$: É possível verificar diretamente que esse caso não possui solução.
- $4^k + 5^l = 77$: É possível verificar diretamente que esse caso não possui solução.
- $4^k + 5^l = 231$: É possível verificar diretamente que esse caso não possui solução.

Portanto a única solução da equação é $k = 2$ e $l = 1$. ■

Questão 3. Seja $x = \angle OAC = \angle CAB$. Sabendo que $OA = OB = R$, o triângulo OAB é isósceles.

Logo $\angle OBA = \angle OAB = 2x$.

Por outro lado, ABC também é isósceles. Sendo assim, $\angle ACB = \angle ABC = 2x$. Por conseguinte, $\angle AOC = \angle ACB - \angle OAC = 2x - x = x$.



Desta forma, AOC é isósceles com $AC = OC = r$.

Observe que os triângulos OAB e ABC são semelhantes pelo critério “ângulo-ângulo (AA)”.

Então

$$\frac{r}{R-r} = \frac{R}{r}$$
$$\implies r^2 + Rr - R^2 = 0$$
$$\implies r = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2}$$
$$\therefore\ r = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) R.$$

■

3. Curiosidades

Khan Academy

Por Yane Lísley Ramos Araújo[1]

[1]Professora do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

A cada dia que passa percebemos que a informação chega até nós de maneira mais rápida e acessível, isso tem se tornado possível devido ao avanço e ao fácil acesso que temos à internet. Nesse sentido, a internet se tornou uma grande aliada e uma ferramenta poderosa para os estudos em qualquer área. Não é novidade que muitos estudantes se utilizam dessa ferramenta de diversas formas, desde uma simples pesquisa no Google, do acesso à vídeo aulas até a cadastros em sites coletivos.

Diante de tantas ferramentas existentes, hoje falaremos a respeito da Khan Academy, a qual é uma organização não governamental educacional criada com a missão de oferecer educação de qualidade para qualquer um, em qualquer lugar, oferecendo vídeos de diversas matérias, em particular de matemática.

O site dispões de áreas para estudantes, professores e pais e traz desde assuntos simples do ensino fundamental até conteúdos vistos no ensino superior. O mais interessante é que nessa ferramenta o estudante pode personalizar seus estudos, uma vez que ele pode ir realizando missões de estudo. Essas missões recomendam o que aluno deve aprender em seguida, ajudam a lembrar o que já foi aprendido, salva os progressos do estudante e ainda propõe um teste ao fim de cada missão de estudo. É importante ressaltar que o site da Khan Academy já tem sido utilizado como ferramenta de ensino em algumas escolas brasileiras.

Para mais informações acesse https://pt.khanacademy.org/. Para entrar em contato diretamente com a parte desenvolvida para a matemática acesse https://pt.khanacademy.org/math. É interessante conhecer e aproveitar boas ferramentas para intensificar seus estudos.

Referências

[1] https://pt.khanacademy.org/ acessado em 15/12/2017

[2] https://pt.wikipedia.org/wiki/Khan_Academy acessado em 15/12/2017

[2]Professor do Departamento de Matemática da UFRPE

4. Indicações de Leituras

O Jogo da Imitação

Gabriel Araújo Guedes[2]

O filme conta a história do nascimento da teoria da computação. Através da saga do matemático Inglês Alan Turing, que liderou uma equipe para decifrar o código de comunicação nazista chamado de Enigma. Tendo uma boa fotografia, um bom ritmo e um enredo bem costurado a película é digna de todos os prêmios que ganhou.

Do ponto de vista histórico o filme comete muitos erros. Em uma simples pesquisa no Goolge você encontrará vários textos criticando tais erros: Faço dois pequenos recortes:

Wikipedia: "Assim, o filme torna Turing um sujeito solitário, difícil de conviver e questionado pelos superiores, quando o matemático era comprovadamente sociável, respeitado em Bletchley Park e parte de um esforço coletivo de criptografia. Há a omissão da contribuição polonesa na decodificação do Enigma, a inserção de personagens que não há provas de que tenham convivido com Turing, e alteração de certos eventos ..."

Medium: "Os cineastas pegaram uma história complexa e interessante sobre criptografia e o nascimento da Ciência da Computação e a transformaram em uma versão de "Uma Mente Brilhante ambientada durante a Segunda Guerra Mundial."

Assim minha recomendação é assista o filme como uma boa ficção. Mantendo sempre o olhar crítico. Para saber de fato sobre Alan Turing, um dos maiores gênios que ja passaram nesse planeta e um dos pais da computação, leia alguma, das muitas, biografia dele.

Ah, e o melhor. Esse filme tem na NetFlix.

[1] TYLDUM, Morten. The Imitation Game [Film]. **Black Bear Pictures**, 2014.

[2] pt.wikipedia.org/wiki/O_Jogo_da_Imitaç~ao, Acessado em 28 de dezembro de 2017.

[3] medium.com/brasil/o-jogo-da-imitacao-distorce-o-legado-de-alan-turing-7807f517a1de, Acessado em 28 de dezembro de 2017.

5. Eventos

Este ano teremos importantes eventos de matemática realizados no Brasil.

Fiquem Ligados!!!

- **Verão 2018 da UFPB**
  - Local: Universidade Federal da Paraíba - João Pessoa - PB
  - Data: 04 de janeiro a 02 de março de 2018
  - Maiores informações: http://www.mat.ufpb.br/verao/
- **49º Programa de Verão da UFPE**
  - Local: Universidade Federal de Pernambuco - Recife - PE
  - Data: 08 de janeiro a 28 de fevereiro de 2018
  - Maiores informações: https://www.ufpe.br/pgdmat
- **1ª Escola de Estudos Avançados**
  - Local: Instituto de Educação Matemática e Científica - Universidade Federal do Pará (IEMCI-UFPA)
  - Data: 19 a 31 de Janeiro de 2018
  - Maiores informações: escoladeestudos2018@gmail.com
- **VII WENLU- Workshop in Nonlinear PDE's and Geometric Analysis**
  - Local: João Pessoa - Brasil
  - Data: 20 a 24 de Fevereiro de 2018
  - Maiores informações: http://www.mat.ufpb.br/wenlu/
- **16ª. Edição do Programa de Verão do LNCC**
  - Local: Petropólis-RJ
  - Data: 01 de fevereiro a 09 de março de 2018
  - Maiores informações: http://www.lncc.br/eventoSeminario/eventoconsultar.php?vMenu=5&idt_evento=1758&vAno=2017

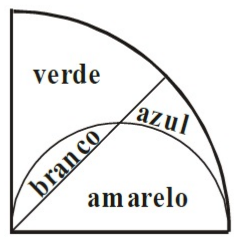
6. Problemas

Para concluir deixamos para o leitor alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Problema 1 (OBM - Nível U - 2017)**.** Considere a sequência $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$, para $n \geq 1$.

1. Encontre $\lim_{n\to\infty} a_n$.
2. Determine $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n(2-a_n)}{n+1}\right)^{n+1}$

Problema 2 (XXIV Olimpíada Pessoense de Matemática)**.** Um grande painel na forma de um quarto de círculo foi composto com 4 cores, conforme indicado na figura abaixo, onde o segmento divide o setor em duas partes iguais e o arco interno é uma semicircunferência. Qual é a cor que cobre a maior área?



Problema 3 (XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática)**.** Diamantino gosta de jogar futebol, mas

se jogar dois dias seguidos ele fica com dores musculares. De quantas maneiras Diamantino pode escolher em quais de dez dias seguidos ele vai jogar bola sem ter dores musculares? Uma maneira é não jogar futebol em nenhum dos dias.

Mandem soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, sua solução deve ser enviada até **01/03/2018**.

---

7. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1 , n.3, Agosto de 2017**.

Problema 1 (51^{st} IMO)**.** Determine todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que

$$f([x]y) = f(x)[f(y)] \qquad (1)$$

para todos x, $y \in \mathbb{R}$. ($[z]$ designa o maior inteiro que é menor igual a z)

Solução. Suponha que $[f(y)] = 0$ para algum y, então substituindo $x = 1$ em (1) segue que $f(y) = f(1)[f(y)] = 0$. Assim, se $[f(y)] = 0$ para todo y, então $f(y) = 0$ pra todo y. Logo a função identicamente nula satisfaz a condição do problema. Agora consideraremos o caso em que $[f(a)] \neq 0$ para algum a. Dessa forma

$$f([x]a) = f(x)[f(y)], \text{ ou } f(x) = \frac{f([x]a)}{[f(a)]}. \qquad (2)$$

Isso significa que $f(x_1) = f(x_2)$ sempre que $[x_1] = [x_2]$, consequentemente $f(x) = f([x])$, e podemos assumir que a é um número inteiro. Agora temos que

$$f(a) = f(2a\cdot\frac{1}{2}) = f(2a)\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = f(2a)[f(0)],$$

isto implica que $[f(0)] \neq 0$, dessa forma podemos assumir que $a = 0$. Além disso, a equação (2) garante que

$$f(x) = \frac{f(0)}{[f(0)]} = C \neq 0$$

para cada x. Agora a condição 1 é equivalente a equação $C = C[C]$ que é satisfeito para $[C] = 1$. Portanto, $f(x) = C = const.$ com $1 \leq C < 2$. □

Problema 2 (52^{nd} IMO)**.** Para qualquer conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de quatro inteiros positivos distintos, a soma é denotada por s_A. Seja n_A o número de pares de índices (i,j), com $1 \leq i < j \leq 4$, para os quais $a_i + a_j$ divide s_A. Encontre todos os conjunto A de quatro inteiros positivos distinto para os quais n_A seja máximo.

Solução. Primeiramente, mostraremos que n_A é no máximo 4. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Observemos que ara cada par de índices (i,j) com $1 \leq i < j \leq 4$, a soma $a_i + a_j$ divide s_a se, e somente se, $a_i + a_j$ divide $s_A - (a_i + a_j) = a_k + a_l$, onde k e l são outros dois índices. Uma vez que existem 6 pares de índices distintos, teremos que provar que pelo menos dois deles não satisfazem a condição anterior. Afirmamos que dois desses pares são (a_2, a_4) e (a_3, a_4). Na verdade, note que $a_2 + a_4 > a_1 + a_3$ e $a_3 + a_4 > a_1 + a_2$. Consequentemente, $a_2 + a_4$ e $a_3 + a_4$ não divide s_A. Isto prova que $n_A \leq 4$. Agora suponha que $n_A = 4$. Pelo argumento anterior temos

$$\begin{array}{ccc} a_1 + a_4 \mid a_2 + a_3 & \text{e} & a_2 + a_3 \mid a_1 + a_4 \\ a_1 + a_2 \mid a_3 + a_4 & \text{e} & a_3 + a_4 \nmid a_1 + a_2 \\ a_1 + a_3 \mid a_2 + a_4 & \text{e} & a_2 + a_4 \nmid a_1 + a_3 \end{array}$$

Dessa forma, existem m e n inteiros positivos com $m > n \geq 2$ tal que

$$\begin{cases} a_1 + a_4 & = & a_2 + a_3 \\ m(a_1 + a_2) & = & a_3 + a_4 \\ n(a_1 + a_3) & = & a_2 + a_4 \end{cases}$$

Somando a primeira com a terceira equação, segue que $n(a_1 + a_3) = 2a_2 + a_3 - a_1$. Se $n \geq 3$, então $n(a_1 + a_3) > 3a_3 > 2a_2 + a_3 > 2a_2 + a_3 - a_1$. O que é um absurdo. Portanto, $n = 2$. Se multiplicarmos a primeira equação por 2 e somarmos a terceira, obteremos

$$6a_1 + 2a_3 = 4a_2,$$

enquanto que somando a primeira com a segunda equação nos dá

$$(m+1)a_1 + (m-1)a_2 = 2a_3$$

Agora somando essas duas equações obtemos

$$(m+7)a_1 = (5-m)a_2.$$

Segue que $5 - m \geq 1$, pois o lado direito da última equação e a_2 são positivos. Como temos que $m > n = 2$, o inteiro m só pode ser igual a 3 ou 4. Substituindo $(3, 2)$ e $(4, 2)$ por (m, n) e resolvendo o sistema de equações anterior, encontraremos a família de soluções $\{d, 5d, 7d, 11d\}$ e $\{d, 11d, 19d, 29d\}$, respectivamente, onde d é um inteiro positivo. Portando, o conjunto A para o qual n_A é maximal são da forma $\{d, 5d, 7d, 11d\}$ e $\{d, 11d, 19d, 29d\}$, onde d é um inteiro positivo. Para todos esses conjuntos n_A é 4. □

Problema 3. (58^{th} IMO) Para cada inteiro $a_0 > 1$, defini-se a sequência $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$ tal que, para cada $n \geq 0$:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{se } \sqrt{a_n} \text{ é inteiro} \\ a_n + 3, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(*) Determine todos os valores de a_0 para os quais existe um número A tal que $a_n = A$ para infinitos valores de n.

Solução. Suponha que a_0 deixa resto 0 módulo 3, isto é, a_0 é múltiplo de 3. Vamos ver o que acontece com o $a_0 = 3$, temos que $3 \to 6 \to 9 \to 3 \to 6 \to 9 \to 3 \to \ldots$

Vamos mostrar por indução que todo $a_0 = 3 \cdot k$ satisfaz (*), isto é, entra em um loop em algum momento. Nossa hipótese de indução é que todo $a_0 = 3 \cdot k$ satisfaz (*) para todo $k \leq n$. Agora consideramos $a_0 = 3(n+1)$, seja m^2 o primeiro quadrado perfeito, múltiplo de 3, tal que $3(n+1) < m^2$. O termo seguinte dessa sequência é m, como $3|m^2$ então $3|m$.Ou seja, $m = 3 \cdot l$. Assim se $m < 3(n+1)$ então por hipótese de indução, m satisfaz (*). Se $3(n+1) \geq m$ então m é parte da sequência que leva a m^2 logo também satisfaz (*). Concluindo a indução. m quadrado perfeito nunca deixa resto 2 módulo 3. Pois:

$$\begin{aligned} &\text{Se } n \equiv 0 \pmod 3 \ \Rightarrow\ n^2 \equiv 0 \pmod 3 \\ &\text{Se } n \equiv 1 \pmod 3 \ \Rightarrow\ n^2 \equiv 1 \pmod 3 \\ &\text{Se } n \equiv 2 \pmod 3 \ \Rightarrow\ n^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod 3 \end{aligned}$$

Com essa observação concluímos que nenhum a_0 da forma $3k + 2$ satisfaz a condição (*).

Agora suponha $a_0 = 3k + 1$, isto é deixa resto 1 módulo 3. Vamos ver o que acontece com $a_0 = 1$, temos que, $1 \to 4 \to 2 \to 5 \to 8 \to 11 \to \ldots$
Ou seja, essa sequência atinge um número que deixa resto 2 módulo 3 e pelo item anterior, ela não satisfaz (*). Afirmamos que o mesmo ocorre para todo $a_0 = 3k + 1$. Novamente vamos usar indução.
Suponha que a afirmação é válida para todo $k \leq n$ e agora consideramos $a_0 = 3(n+1) + 1$, então seja m^2 o primeiro quadrado perfeito que aparece nessa sequência gerada com este termo inicial. Assim existe j tal que $a_j = m^2$ o que implica $a_{j+1} = m$. Observe que $m^2 \equiv 1 \pmod 3$ o que implica que $m \equiv 2 \pmod 3$ ou $m \equiv 1 \pmod 3$. Se acontecer a primeira congruência caímos no caso anterior que já foi provado. Se tivermos a segunda congruência teremos $a_0 = 3(n+1)+1 < a_j = m^2 \leq (3n+1)^2$ logo $a_{j+1} = m \leq 3n + 1$. O que satisfaz nossa hipótese de indução, concluindo o argumento.

Portanto os números que entram numa sequência que repete seus termos uma infinidade de vezes são apenas os múltiplos de 3.

□