É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

2017- Número 4, volume 1, Outubro de 2017

ISSN 2526-8651

Sumário

1. Artigo

Somar para conquistar!

Rodrigo Gondim

UFRPE - CEGEN - Departamento de Matemática

52171-900 - Recife - PE - Brasil

"Abre teus braços, meu irmão, deixa cair
Pra que somar se a gente pode dividir?"
(Vinícius de Moraes)

Introdução

Somar ou dividir? Eis a questão que aflige estudantes, matemáticos, filósofos, estrategistas e poetas em vários partes do mundo e em várias épocas. Nesse pequeno artigo queremos mostrar uma técnica de contagem clássica (e conciliatória) que consiste essencialmente em dividir e somar. Por um lado, isso pode trazer paz de espírito para os poeta, por outro lado traz também uma forma muito eficiente de atacar vários probleminhas de contagem.

A premissa é simples. Se temos que contar um certo número de configurações, a técnica consiste dividir em casos excludentes e somar cada um deles, isso dará o resultado. A preocupação de que os casos sejam excludentes, pode ser entendida num diagrama. De fato, se houver interseção, estas configurações serão contadas duas vezes, daí teríamos que descontá-las. Se forem muitos os conjuntos dos casos, a existência de interseções leva a um problema bem mais complicado, associado ao famoso Princípio da inclusão-exclusão, ver [?] ou [?].

Outra parte importante da técnica consiste em identificar contadores naturais. Contadores são índices que identifiquem as configurações e que variem de forma uniforme. Relembre que se queremos saber quantos números naturais existem de 1 até 1454, por exemplo, a diferença $1454 - 1 = 1453$ não codifica essa quantidade, somente o número de "pulos" necessários para sair de 1 e chegar em 1454, daí a quantidade de números é $1453 + 1 = 1454$. Analogamente, se queremos saber quantos são os naturais de a até b, fazemos $b - a + 1$.

Em último lugar gostaríamos de destacar que a técnica aditiva pode, eventualmente, esbarrar num problema técnico: o cálculo de um somatório. É que em determinadas ocasiões as configurações que queremos contar podem ser separadas em casos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ em que cada caso X_k contém x_k configurações. Daí o número total de configurações é $x_1+x_2+\ldots+x_n$. Desta forma, algumas vezes torna-se necessário o conhecimento de certos somatórios clássicos. Mas isso já seria tema de outro pequeno artigo. Um último comentário, para ficar na moda das redes sociais, as vezes adotaremos a hashtag $\#X_k = x_k$ para representar a cardinalidade de um conjunto finito.

O Princípio aditivo e algumas aplicações

Lema 1.1. *Considere que um conjunto finito X pode ser particionado em conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (dois a dois disjuntos). Então*

$$\#X = \#X_1 + \#X_2 + \ldots + \#X_n.$$

Em outras palavras: Se queremos contar um certo número de configurações que pode ser particionado em classes excludentes, então o número total de configurações é a soma do número de configurações em cada classe.

Antes de falar do princípio aditivo gostaria de lembrar um fato básico que vai ser usado muitas vezes. Como vimos na introdução, ao escrevermos os números naturais consecutivos em ordem crescente, a partir de um certo número até outro, a diferença entre eles indica o número de pulos, assim, a quantidade de números escritos é a diferença mais uma unidade, a esse método chamamos de contador.

Exemplo 1.1. Se escrevemos de 1 até 1454 cada número ao lado do outro, $123456789101112131415\ldots$, quantos algarismos serão utilizados?

Podemos separar os números escritos em classes.

(i) Números de um dígito. De 1 até 9, são 9 números, totalizando 9 algarismos.

(ii) Números de dois dígitos. De 10 até 99, são 90 números, totalizando 180 algarismos.

(iii) Números de três dígitos. De 100 até 999, são 900 números, totalizando 2700 algarismos.

(iv) Números de quatro dígitos. De 1000 até 1454, são 455 números, totalizando 1820 algarismos.

No total, utilizamos $9 + 180 + 2700 + 1820 = 4709$ caracteres.

Exemplo 1.2. Novamente escrevemos os números um ao lado do outro, $123456789101112131415\ldots$. Qual algarismo ocupará a posição 1454?

Novamente, já sabemos que se formos escrevendo até 99 teremos escrito apenas 189 algarismos. Por outro lado, se escrevermos até 999 já teríamos passado, pois nesse caso temos 2889 caracteres. Digamos então que escrevemos até n em que $100 \leq n \leq 999$. Assim teremos escrito $n-100+1 = n-99$ números de 3 dígitos, que correspondem a $3n-297$ dígitos. Lembrando que de 1 até 99 usamos 189 caracteres, temos, no total $3n - 108$ caracteres. Como $3n - 108$ é múltiplo de 3 fica fácil decidir qual dígito ocupa a posição 1455 (que é também múltiplo de 3). Fazendo $3n - 108 = 1455$ vem $n = 521$. Ou seja, se escrevermos de 1 até 521 usamos 1455 dígitos, logo, o dígito que ocupa a posição 1454 é o 2.

Exemplo 1.3. O show do milhão era um programa de perguntas e respostas apresentado por Sílvio Santos anos atrás. Em certo programa essa foi a pergunta de um milhão. Se escrevemos os números de 1 até 100 quantas vezes escrevemos o algarismo 5?

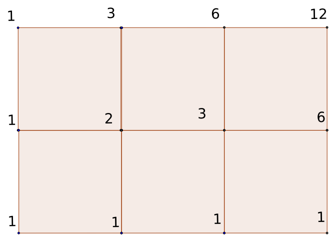
A confusão das pessoas acontece ou na casa dos 50 ou mais precisamente no 55. O motivo é não separar a contagem em casos excludentes.

Se contamos somente quantas vezes o 5 ocorre nas unidades, encontramos um contador natural: $05, 15, 25, \ldots, 95$. Portanto o 5 ocorre 10 vezes nas unidades. Por outro lado, contando o 5 somente nas dezenas encontramos outro contador natural: $50, 51, 52, \ldots, 59$. Portanto o 5 ocorre 10 vezes nas dezenas. No total o 5 ocorre 20 vezes. Ai meu milhão!

Alguns exemplos mais geométricos:

Exemplo 1.4. Um bairro consiste de um reticulado 3×2. Um carro deve ir do ponto inferior esquerdo até o ponto superior direito usando um dos menores caminhos. De quantas formas ele pode fazer isso?

Note que para chegar em uma esquina o carro veio da esquerda ou de baixo. Assim, o número de maneiras de chegar em uma certa esquina é a soma do número de maneiras de chegar na esquina abaixo somado com o número de maneiras de chegar na esquina à sua esquerda. A figura abaixo complementa o raciocínio e nos traz o resultado, 12.



Claro que aqueles mais experientes vão dizer que existem outras maneiras mais gerais de resolver esse problema, que se o reticulado fosse muito grande o trabalho seria inviável e etc. Por outro lado esse mesmo raciocínio se presta a outros problemas que da maneira convencional são bem mais complicados. Observe o seguinte exemplo.

Exemplo 1.5. Num tabuleiro 4×4 uma peça está no canto esquerdo inferior e deseja chegar ao ponto direito superior. Os movimentos permitidos são: para direita, para cima e na diagonal direita-cima. Quantos são os diferentes possíveis trajetos da peça?

Note que para chegar em uma casa do tabuleiro a peça terá vindo de baixo, da esquerda ou da diagonal esquerda-baixo. Assim, o número de maneiras de chegar em uma determinada casa é a soma destas. Novamente a figura resolve o problema, fornecendo a resposta 63.

1	7	25	63
1	5	13	25
1	3	5	7
1	1	1	1

Problemas propostos

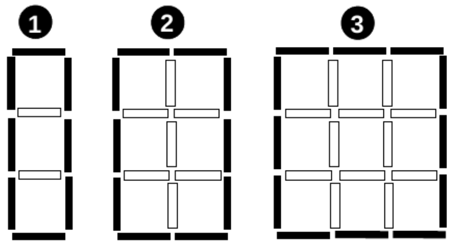
1. (OBM-97, [?]) Escrevendo todos os números inteiros de 100 a 999, quantas vezes escrevemos o algarismo 5?
   (a) 250 (b) 270 (c) 271 (d) 280 (e) 292
   Resp. D

2. (OMRN-13, [?]) Escrevem-se (em ordem crescente) numa fila a lista dos primeiros 2013 números inteiros positivos

   1234567891011...2010201120122013

   que dígito aparece menos vezes na lista?
   Resp. 0

3. (OBM-98, [?]) As figuras a seguir são construídas com palitos pretos e brancos. Para construir as figuras, os palitos pretos foram colocados apenas nas bordas e os brancos apenas no interior. A figura de número n corresponde

   a um retângulo 3 por n. Continuando esse procedimento, quantos palitos brancos teremos na figura 2002?
   (a) 2001 (b) 4004 (c) 12006 (d) 10007 (e) 10010

Resp. D

4. (OBM-99, [?]) Joãozinho brinca de formar quadrados com palitos de fósforo como na figura a seguir.

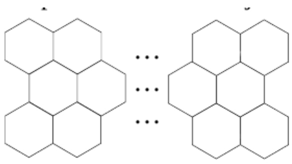
A quantidade de palitos necessária para fazer 100 quadrados é:
(a) 296 (b) 293 (c) 297 (d) 301 (e) 280

Resp. D

5. Escrevendo os números em ordem crescente 123456...999910000, de 1 até 10000, quantas vezes ocorre o grupo 53?

Resp. 411

6. (OBM-04, [?]) O arranjo a seguir, composto por 32 hexágonos, foi montado com varetas, todas com comprimento igual ao lado do hexágono.



Quantas varetas, no mínimo, são necessárias para montar o arranjo?
(a) 113 (b) 123 (c) 122 (d) 132 (e) 152

Resp. B

Referências

[1] Morgado, A., et al, *Análise combinatória e probabilidade*, SBM, Rio de Janeiro, 1991.

[2] Santos, P. et al, *Introdução à análise combinatória*, Ed. Ciência Moderna, 2007.

[3] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. Provas dos anos anteriores. Disponível em: http://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/. Acessado em 18 de set. de 2017.

[4] COMPETIÇÃO DE MATEMATICA DO RIO GRANDE DO NORTE. Provas dos anos anteriores. Disponível em: http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br/. Acessado em 18 de set. de 2017.

2. Soluções de Olimpíadas

Nesta edição apresentaremos a resolução de três questões discursivas da prova da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2017 referentes ao nível 1.

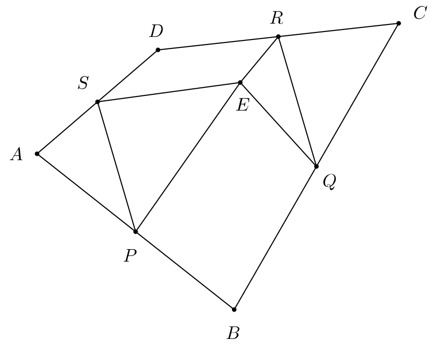
Questão 1. Enumera-se de 1 até n as páginas de um livro.

a) Ao somar esses números, por engano, um deles é somado duas vezes obtendo o resultado incorreto 1819. Qual o número que foi somado duas vezes?

b) E se soubessémos que contamos repetidamente não apenas uma, mas duas páginas: sendo uma contada três vezes e outra duas. Com a soma errada dando 1819, quais seriam os possíveis pares de páginas que foram somados mais de uma vez? Em cada par indique qual página podería ter sido somada três e duas vezes.

Questão 2. Alice escreve os números de 1 até 15 no quadro negro. Ela escolhe números a e b arbitrários, apaga-os e escreve no quadro o número $ab + 2a + 2b + 2$. Qual número estará no quadro após Alice realizar este procedimento 14 vezes?

Questão 3. Considere o quadrilátero convexo $ABCD$ a seguir. Sejam P, Q, R e S os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivimente, e E um ponto no interior de $ABCD$. Utilize a notação $[P_1P_2P_3P_4]$ para expressar área do quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ e a notação $[P_1P_2P_3]$ para indicar a área do triângulo $P_1P_2P_3$.



1. Demonstre a relação $[APES] + [CREQ] = [DSER] + [BQEP]$,
   Sugestão: Considere os os segmentos que unem o ponto E aos vértices do quadrilátero.

2. Prove que $[QCR] = \frac{1}{4}[BCD]$, Conclua que $[APS] + [QCR] = \frac{1}{4}[ABCD]$.

3. Determine a área do triângulo SPE sabendo-se que as áreas de QRE e $ABCD$ medem 5cm^2 e $60cm^2$ respectivamente.

Resolução

Questão 1.

a) Como $1 + 2 + ... + n = n(n+1)/2 = S_n$, temos que $\frac{59.60}{2} = 1770 < 1819 < \frac{60.61}{2} = 1830$. Daí $S_n = 1770$ e $n = 59$, portanto a página $49 = 1819 - 1770$ foi contada duas vezes. Note que o livro não poderia ter um número menor de páginas, por exemplo se $S_n = 1711$, *i.e.*, $n = 58$ a página $108 = 1819 - 1711$ deveria ter sido somada duas vezes. Isto seria uma contradição, tendo em vista que o livro não possui a página 108.

b) As maneiras de escrever 49 como soma de três números, sendo dois repetidos são: 1+1+47; 2+2+45; 3+3+43; 4+4+41; 5+5+39; 6+6+37; 7+7+35; 8+8+33; 9+9+31; 10+10+29; 11+11+27; 12+12+25; 13+13+23; 14+14+21; 15+15+19; 16+16+17; 17+17+15; 18+18+13; 19+19+11; 20+20+9; 21+21+7; 22+22+5; 23+23+3; 25+25+1.

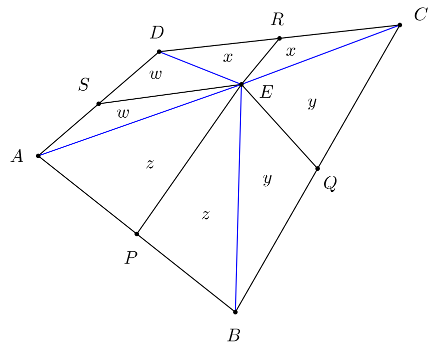
As duas primeiras parcelas das somas acima representam a página que foi contada três vezes e a última a página que foi contada duas vezes. Exemplo, 14+14+21 representa a maneira de contar três vezes a página 14 e duas vezes a página 21.

■

Questão 2. Note que a quantidade obtida somando dois a cada número do quadro que depois multiplicando os resultados é preservada em cada etapa do procedimento realizado por Alice. Essa quantidade é $\frac{17!}{2}$. Desse modo, na última etapa do procedimento o número que vai restar no quadro após 14 etapas é $\frac{17!}{2} - 2$. ■

Questão 3.

1. Considere os segmentos que unem o ponto E aos vértices do quadrilátero. Desta forma, dividimos o quadriátero em triângulos cujas áres estão representadas na figura:



   Logo, $[APES] + [CREQ] = x + y + z + w = [DSER] + [BQEP]$

2. Note que os triângulos BCD e QCD são semelhantes pelo critério LAL pois o ângulo de vértice C é comum aos dois triângulos e seus lados são respectivamente proporcionais de razão $\frac{1}{2}$. Logo a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança, ou seja:

$$\frac{[QCR]}{[BCD]} = \frac{1}{4} \Longrightarrow [QCR] = \frac{1}{4}[BCD].$$

Utilizando-se do mesmo raciocínio, podemos concluir que

$$[APS] = \frac{1}{4}[ABD].$$

Somando as duas expressões, obtemos

$$\begin{aligned} [APS] + [QCR] &= \frac{1}{4}[ABD] + \frac{1}{4}[BCD] \\ &= \frac{1}{4}([ABD] + [BCD]) \\ &= \frac{1}{4}[ABCD]. \end{aligned}$$

3. Do item (1), temos que:

$$[APES] + [CREQ] = \frac{1}{2}[ABCD]$$

$$[APS]+[SPE]+[QRE]+[QCR] = \frac{1}{2}[ABCD]$$

Usando o item (2), segue-se que:

$$[SPE] + [QRE] + \frac{1}{4}[ABCD] = \frac{1}{2}[ABCD].$$

Consequentemente,

$$[SPE] + [QRE] = \frac{1}{4}[ABCD].$$

Daí,

$$[SPE] + 5 = \frac{1}{4}.60 \Longrightarrow [SPE] = 10.$$

■

3. Curiosidades

PrimeGrid

Por Danilo da Nóbrega Santos[1]

Os números primos tem fundamental importância nos sistemas criptográficos, utilizados na segurança de computadores. De forma geral, quanto maior for o número primo usado em tal sistema mais seguro o tornará, deixando seu computador mais protegido de possíveis invasores. Nesse contexto é que surge o PrimeGrid, que nada mais é que um grande projeto computacional com o intuito de encontrar e registrar primos com o maior número de algarismos. Além disso, o projeto também é responsável por produzir e fornecer material educativo sobre números primos, contribuindo assim para o crescimento do conhecimento matemático.

O PrimeGrid hoje faz uso da plataforma Berkeley Open Infrastructure for Network Computing (BOINC) que é uma projeto de base comunitária que permite que o tempo ocioso de seu computador seja usado para desenvolvimento de projetos científicos em diversas partes do mundo, nas mais diversas áreas do conhecimento, em particular o PrimeGrid. Gostou, achou interessante a proposta do PrimeGrid? Você tembém pode fazer parte do projeto e participar do desenvolvimento das pesquisas em números primos e consequentemente em sistemas criptográficos. Para tanto, basta apenas acessar a pagina do projeto (https://www.primegrid.com), fazer download do programa BOINC, instalá-lo corretamente e adicionar o Projeto PrimeGrid, e dessa forma usar o tempo ocioso do seu computador para contribuir na descoberta números primos com cada vez mais algarismos.

Referências

[1] PrimeGrid Project: https://www.primegrid.com

[2] BOINC Open-source software for volunteer computing: http://boinc.berkeley.edu/

4. Indicações de Leituras

TAO, Terence. **Como resolver problemas matemáticos.** Rio de Janeiro: SBM (Coleção do Professor de Matemática), 2013.

Thiago Dias [2]

[1]Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.
[2]Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

Terence Tao, 42, é um matemático australiano, famoso por ganhar a medalha de ouro nas Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO) em 1988 aos 13 anos e a Medalha Fields - o mais prestigioso prêmio concedido a jovens matemáticos - aos 31 anos. Aos 15 anos, escreveu o livro **Como resolver problemas matemáticos**, onde apresenta de maneira simples, clara e divertida sua visão sobre o tema. A leitura desta obra é valiosa tanto para participantes de competições olímpicas quanto matemáticos profissionais e em formação.

Tao apresenta uma grande variedade de problemas divididos em tópicos, a saber, teoria dos números, álgebra e análise, geometria euclidiana e geometria analítica, e resolve-os enquanto apresenta os princípios gerais mais básicos que devem ser respeitados quando se pretende solucionar um desafio matemático. Muitos dos problemas propostos são difíceis e, ao ler a sua solução, temos a sensação de estar dentro da cabeça de Tao acompanhando os seus pensamentos enquanto ele formula os argumentos, o que torna a leitura muito rica e estimulante. Além disso, o leitor pode testar suas habilidades fazendo alguns dos excelentes exercícios presentes no texto.

Para acompanhar os passos deste que é um dos matemáticos mais importantes, produtivos e criativos da atualidade, acesse o seu blog pessoal https://terrytao.wordpress.com/ que é atualizado praticamente toda semana.

Referências

[1] TAO, TERENCE **Como resolver problemas matemáticos**. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção Professor de Matemática), 2014.

[2] Terence Tao. Em: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2016. Disponível em: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Terence_Tao&oldid=806580194.. Acesso em: 10 de setembro de 2016.

5. Eventos

Este é um ano importantíssimo para a matemática no que diz respeito a grandes eventos realizados no Brasil.

Fiquem Ligados!!!

- **II CONGRESO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA DE AMÉRICA CENTRAL Y EL CARIBE - II CEMACYC**
  - Local: Universidad del Valle - Cali - Colômbia
  - Data: 29 a 01 de novembro de 2017
  - http://ciaem-redumate.org/cemacyc/index.php/ii_cemacyc/iicemacyc
- **VII ENCONTRO PERNAMBUCANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - VII EPEM**
  - Local: Colégio XV de Novembro - Garanhuns - PE
  - Data: 02 a 04 de novembro de 2017
  - Submissão de trabalhos: até 13 de agosto de 2017
  - http://www.sbempe.com.br/epem/
- **XI Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações (ENAMA)**
  - Local: Goiás
  - Data: 8 e 10 de novembro de 2017
  - http://www.enama.org
- **IV CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - IV CIHEM**
  - Local: Universidade de Murcia - Murcia - Espanha
  - Data: 14 a 17 de novembro de 2017

– http://www.um.es/cihem4/

- **3º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática**
  - Local: Rio de Janeiro, RJ
  - Data: 17 a 19 de novembro de 2017
  - http://www.bieniodamatematica.org.br/
- **X CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - X CNMEM**
  - Local: Universidade Estadual de Maringá (UEM) - Maringá - PR
  - Data: 23 a 25 de novembro de 2017
  - http://www.uem2017.wixsite.com/xcnmem

6. Problemas

Para concluir deixamos para o leitor alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Problema 1 (OMERJ - Nível 3 e Universitário-2016)**.** Encontre todos os polinômios P com coeficientes reais tais que

$$xP(x) + yP(y) \geq 2P(xy)$$

para todos x e y reais.

Problema 2 (ORMGrande PoA - Nivel 2 - 2014)**.** A partir de um primeiro número inteiro, construímos sucessivamente uma sequência de infinitos inteiros usando a seguinte regra: "cada novo número da sequência é igual à soma dos quadrados de cada dígito da representação decimal do último número da sequência". Exemplo: tomando como primeiro número 5382, o segundo será $5^2+3^2+8^2+2^2 = 102$, o terceiro $1^2+0^2+2^2 = 5$, o quarto 25, etc. Pergunta-se: tomando 1248 como primeiro número, quem será o 2014-ésimo número da sequência?

Problema 3 (38ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - 2ª Fase - Nível 2)**.** Uma lista de números de dois dígitos é legal se, a partir de seu segundo termo, a quantidade de divisores positivos de cada um é maior que a do número que o precede na lista e, além disso, pelo menos um de seus dígitos é maior que um dos dígitos do número que o precede. Qual é o tamanho máximo de uma lista legal?

Mandem soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, sua solução deve ser enviada até **01/12/2017**.

7. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1 , n.2, Junho de 2017**.

Problema 1 (*XXVI Olimpíadas paulista de matemática*)**.** A sequência de Fibonacci é definida da seguinte forma: o termo 0, representado por F_0 é igual a 0, o termo 1 representado por F_1 é igual a 1 e, a partir do termo 2, cada termo, representado por é igual a soma dos dois anteriores, por exemplo: o termo 2, representado por F_2 é igual a $F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$, o termo 3, representada por $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$ e assim por diante. Dessa forma, os primeiros termos dessa sequência são: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$,...

(a) Calcule os termos F_8, F_9, F_{10} e F_{11}

(b) F_{2002} é par ou impar? Justifique sua resposta.

Solução. (a) Note que a fórmula do termo geral da sequência de Fibonacci é da forma

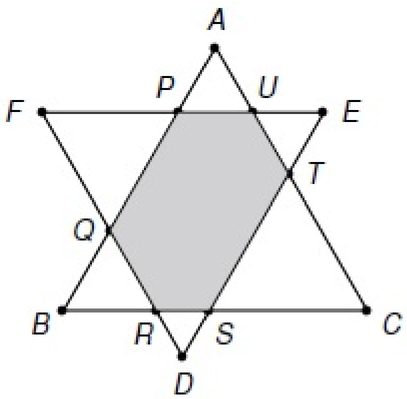
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Dessa forma teremos que $F_8 = F_7 + F_6 = 21$, $F_9 = F_8 + F_7 = 34$, $F_{10} = F_9 + F_8 = 55$, $F_{11} = F_{10} + F_9 = 89$.

(b) Os números que surgem na sequência de Fibonacci são chamados de *números de Fibonacci.* Uma propriedade bastante interessante da tal sequência é se os índices de dois termos desta sequência são múltiplos, então os respectivos números de Fibonacci também serão múltiplos. Desta forma, uma vez que $F_3 = 2$, teremos que se um índice da sequência de Fibonacci for múltiplo de 3 o número de Fibonacci associado a esse índice será par. Equivalentemente, se o índice não for múltiplo de 3, então o número de Fibonacci será impar. Portanto, como 2002 não é múltiplo de 3, segue que F_{2002} é impar.

□

Problema 2 (*2ª Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas*)**.** Na figura, os triângulos ABC e DEF são equiláteros de lados $14\,cm$ e $13\,cm$, respectivamente, e os lados BC e EF são paralelos.

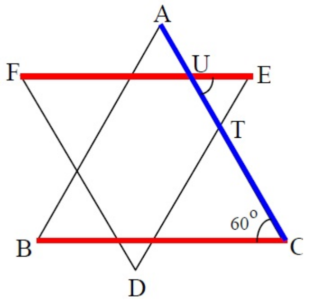


(a) Calcule a medida do ângulo $E\widehat{U}T$

(b) Calcule o perímetro do quadrilátero $PQRSTU$

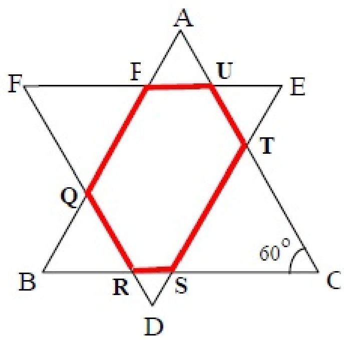
(c) Se o segmento PQ mede $6cm$, qual é a medida do segmento ST?

Solução. (a) Como o triângulo ABC é equilátero, todos os seus ângulos medem 60º. Note também que BC e EF são paralelos.



Logo os ângulos $E\widehat{U}T$ e $A\widehat{C}B$ são alternos internos. Portanto, $E\widehat{U}T = A\widehat{C}B = 60$

(b) Como DEF é um triângulo equilátero temos que $U\widehat{E}T = 60$, e do item (a) sabemos $E\widehat{U}T = 60$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º segue que $U\widehat{T}E = 180 - 2 \times 60 = 60$



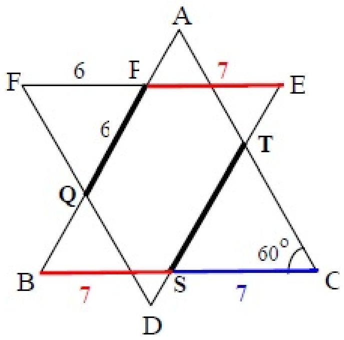
Logo, o triângulo EUT é equilátero, pois todos os seus ângulos internos medem 60º. Seguindo argumento análogo podemos concluir que todos os outros triângulos da figura são equiláteros. Daí temos $QP = PF$, $UT = UE$, $TS = CS$ e $RQ = RB$. Consequentemente o perímetro de $PQRSTU$ será

$$\begin{aligned} QP + PU + UT + TS + SR + RQ = \\ (FP + PU + UE) + (CS + RS + RB) \\ = FE + CB \\ = 13 + 14 \\ = 27cm \end{aligned}$$

(c) Uma vez que QFP é equilátero, segue que $PQ = 6cm$ e $FP = 6cm$. Dessa forma teremos que

$$\begin{aligned} PE &= FE - FP \\ &= 13 - 6 \\ &= 7cm \end{aligned}$$

Agora note que como BC é paralelo a EF e AB é paralelo a DE, concluímos que o quadrilátero $PESB$ é um paralelogramo.



Assim $BS = PE = 7cm$. Por fim, temos

$$\begin{aligned} SC &= BC - BS \\ &= 14 - 7 \\ &= 7cm \end{aligned}$$

logo $ST = SC = 7cm$, pois o triângulo TCS é equilátero.

□

Problema 3 (*XXXV Olimpíadas Cearense de Matemática*)**.** Um inteiro positivo n diz-se invocado se existam n inteiros positivos $a_1, \ldots, a_n$, dois a dois distintos, tais que

$$1 = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$

Por exemplo o número 3 é invocado pois,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

Mostre que todo inteiro $n > 2$ é invocado.

Solução. Pelo enunciado, o número 3 é invocado. Suponha que $k \geq 3$ seja invocado, isto é, existem $a_1, \ldots, a_k$ inteiros positivos tais que

$$\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_k} = 1$$

Primeiramente, note que $a_i \geq 2$ para todo $i = 1, \ldots, k$ pois, caso contrário, todo lado esquerdo da anterior seria maior que 1. Dessa forma os $k+1$ inteiros positivos $2, 2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_k$ são dois a dois distintos. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2a_1} + \cdots + \frac{1}{2a_k} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \cdots \frac{1}{a_k}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Mostramos então que $k = 3$ é invocado e que se $k \geq 3$ é invocado, então $k+1$ também é invocado. Logo, pelo princípio da indução finita, todo inteiro $n > 2$ é invocado.

□