É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

2017- Número 3, volume 1, Agosto de 2017
ISSN 2526-8651

Sumário

1. Artigo

Truque com as Relações de Girard

Gabriel Guedes

UFRPE - CGEN - Departamento de Matemática
52171-900 - Recife - PE - Brasil

Introdução

As relações de Girard[1] é um conteúdo que, em geral, é visto no ensino médio. Ele expressa uma relação entre os coeficientes e as raízes de um polinômio. Em uma grande parcela dos textos que introduzem esse assunto, o aplicam de forma direta em exercícios, isto é, já nos dão uma equação e nos perguntam alguma coisa sobre seus coeficientes ou raízes.

Queremos aqui mostrar uma outra classe de questões. Basicamente, nessas questões, nos é fornecida uma relação entre números e é pedido para mostrar uma nova propriedade entre eles. O truque todo está em supor que esses números são raízes de um polinômio e após isso fazer uma análise desse polinômio aplicando as relações de Girard. Vamos ver alguns exemplos mais adiante. Porém, antes disso faremos uma rápida revisão.

As Relações

Inicialmente, vamos revisar as relações de Girard para um polinômio de grau 3 e em seguida faremos o caso geral.

Seja $p(x)$ um polinômio de grau 3. Logo ele pode ser expresso como

$$p(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3. \qquad (1)$$

E se chamarmos α, β, γ as raízes de p então ele tam-

[1] Em alguns outros países esse conteúdo também é conhecido como relações de Viete

bém pode ser expresso como

$$p(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

e desenvolvendo-o obtemos

$$p(x) = x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma.$$

Denotando $S_1 = \alpha + \beta + \gamma$, $S_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$ e $S_3 = \alpha\beta\gamma$

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma \\ &= x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 \qquad (2) \end{aligned}$$

Logo para que tenhamos uma igualdade entre os polinômios que aparecem em (1) e em (2) temos as seguinte identidades entre os coeficientes

$$\alpha + \beta + \gamma = S_1 = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = S_2 = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\alpha\beta\gamma = S_3 = -\frac{a_3}{a_0}$$

Assim podemos expressar a soma, o produto dois a dois e o produto das raízes desse polinômio em termos dos seus coeficientes.

Da mesma forma para um polinômio de grau n temos que

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \quad (3)$$

Pelo teorema fundamental da álgebra, se o polinômio tem grau n então ele tem n raízes, (contando com multiplicidades e com as raízes complexas) digamos que essas raízes são $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

Assim o polinômio $p(x)$ pode ser escrito como

$$p(x) = (x - \beta_1) \cdot (x - \beta_2) \cdot \cdots \cdot (x - \beta_n).$$

Desenvolvendo-o temos que

$$p(x) = x^n - (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta)x^{n-1} + \cdots$$
$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \hat{\beta}_i \cdot \ldots \cdot \beta_n \right) \cdot x + \beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_n.$$

Observe que a notação $\hat{\beta}_i$ significa que este elemento foi suprimido nesta parcela do somatório.

Com a notação adotada

$$\begin{aligned} p(x) = x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} - S_3x^{n-3} + \ldots + \\ (-1)^k S_k x^{n-k} + \ldots + (-1)^n S_n. \end{aligned}$$

Exemplo 1.1. Para $n = 4$ temos $p(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4$ e as relações de Girard se escrevem como:

$$\begin{array}{ccccc} \beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4 & = & S_1 & = & -\frac{a_1}{a_0} \\ \beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_1\beta_4+\beta_2\beta_3+\beta_3\beta_4+\beta_3\beta_4 & = & S_2 & = & \frac{a_2}{a_0} \\ \beta_1\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_2\beta_4+\beta_1\beta_3\beta_4+\beta_2\beta_3\beta_4 & = & S_3 & = & -\frac{a_3}{a_0} \\ \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 & = & S_4 & = & \frac{a_4}{a_0} \end{array}$$

Exemplos

Vamos começar com um exemplo bem simples para exercitar:

Exemplo 1.2 (Revista do Professor de Matemática - Problema sugerido 377)**.** Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$abc = 1 \quad e \quad a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

prove que um desses números é igual a 1.

Solução. Seja $p(x)$ o polinômio de grau 3 que tem a, b, c como raízes. Logo

$$p(x) = x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3.$$

Os dados do problema nos dizem que $S_3 = abc = 1$. E desenvolvendo $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + ac + bc}{abc} = \frac{S_2}{S_3}$. Da segunda igualdade obtemos que $S_1 = \frac{S_2}{S_3}$, como $S_3 = 1$, implica que $S_1 = S_2$. Substituindo chegamos a $p(x) = x^3 - S_1x^2 + S_1x - 1$ e verificamos que $p(1) = 0$, isto é, 1 é raiz dessa equação. Portanto um desses números é igual a 1. □

Agora vamos a um exemplo mais elaborado, o qual tivemos um primeiro contato no ótimo livro "Como Resolver Problemas Matemáticos", do brilhante pesquisador Terence Tao, escrito quando ele ainda tinha 15 anos e já era um grande campeão olímpico.

Exemplo 1.3 (Australian Mathematical Competetion, 1987, P 13)**.** Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

no qual todos os denominadores são não nulos. Mostre que

$$\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} + \frac{1}{c^5} = \frac{1}{(a+b+c)^5}. \tag{4}$$

Solução. Vamos desenvolver a igualdade dada no problema

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+ac+bc}{abc} = \frac{S_2}{S_3}.$$

E como $\dfrac{1}{a+b+c} = \dfrac{1}{S_1}$.
Logo a identidade dada no problema pode ser reescrita como $\dfrac{S_2}{S_3} = \dfrac{1}{S_1}$, o que implica que $S_3 = S_1 S_2$.
Seja $p(x)$ o polinômio que tem esses números como raízes. Podemos escrevê-lo como

$$p(x) = x^3 - S_1 x^2 + S_2 x - S_1 S_2.$$

Agora observe que $p(S_1) = 0$, ou seja, S_1 é raiz desse polinômio. Mas por hipótese as raízes dele são a, b, c. Assim $S_1 = a$ ou $S_1 = b$ ou $S_1 = c$. Isso implica que se $S_1 = a \Rightarrow a+b+c = a \Rightarrow b+c = 0$. As outras duas igualdades possíveis nos dão $a+b = 0$ e $a+c = 0$.
Em qualquer uma das três igualdades possíveis a informação que obtemos é que desses três números existe um par cujo um é o oposto do outro.
Substituindo na equação (4) temos que $\dfrac{1}{a^5} + \dfrac{1}{b^5} + \dfrac{1}{(-b)^5} = \dfrac{1}{(a+b+(-b))^5}$. □

Exemplo 1.4 (USAMO1973)**.** Encontre todas as soluções (reais ou complexas) do sistema:

$$\begin{cases} x+y+z = 3 \\ x^2+y^2+z^2 = 3 \\ x^3+y^3+z^3 = 3 \end{cases}$$

Solução. Seja $P(t) = t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy + xz + yz)t - xyz$ o polinômio que tem x, y, z como raízes. Observe que os polinômios do sistema são simétricos (isto é, se fizermos uma permutação das variáveis x, y, z o polinômio continua o mesmo), logo podem ser escritos em função de polinômios simétricos elementares, ver referência [2]. Assim o termo de grau 1 nos dá $S_1 = x+y+z = 3$.
Para o termo de segundo grau temos que:

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz \\ xy+xz+yz &= 1/2[(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)] \\ xy+xz+yz &= 1/2(9-3) = 3 \end{aligned}$$

Para o de grau 3 temos que:

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= (x+y+z)^3 + 3xyz \\ &\quad -3(x+y+z)(xy+xz+yz) \\ 3 &= 3^3 - 3\cdot 3\cdot 3 + 3xyz \\ 1 &= xyz \end{aligned}$$

Logo $P(t) = t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t-1)^3$, ou seja, o polinômio $P(t)$ tem 1 como raiz tripla, o que implica em $x = y = z = 1$.

□

Exercícios Propostos

Exercício 1.1 (Mathematical Olympiad Treasure P.10)**.** Determine as soluções reais do sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 18 \\ x^7 + y^7 + z^7 = 2058 \end{cases}$$

Exercício 1.2 (Putnam and Beyond, 156)**.** Resolva o sistema

$$x+y+z = 1$$
$$xyz = 1$$

sabendo que x, y, z são números complexos de módulo 1.

Exercício 1.3 (Putnam and Beyond, 157)**.** Encontre todos os números reais r, para os quais existe pelo menos uma tripla (x, y, z) de reais não nulos tais que

$$x^2y + y^2z + z^2x = xy^2 + yz^2 + zx^2 = rxyz.$$

Exemplo 1.5 (Mathematical Olympiad Treasure P.1)**.** Sejam a, b, c números reais não nulos tais que

$$(ab + ac + bc)^3 = abc(a + b + c)^3$$

Mostre que a, b, c estão em progressão geométrica.

Referências

[1] Tao,T., *Como resolver problemas matemáticos: uma perspectiva pessoal*, SBM, 2013

[2] Garcia,A., Lequain,Y., *Elementos de álgebra*, IMPA, 2003

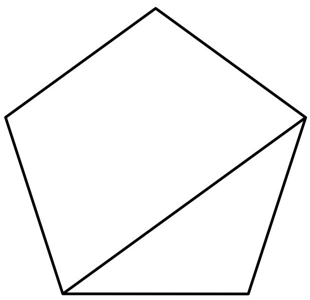
[3] Gelca, R., Andreescu,T., *Putnam and beyond.* Springer, 2007.

[4] Andreescu, T., Enescu, B., *Mathematical olympiad treasures.* Springer, 2011.

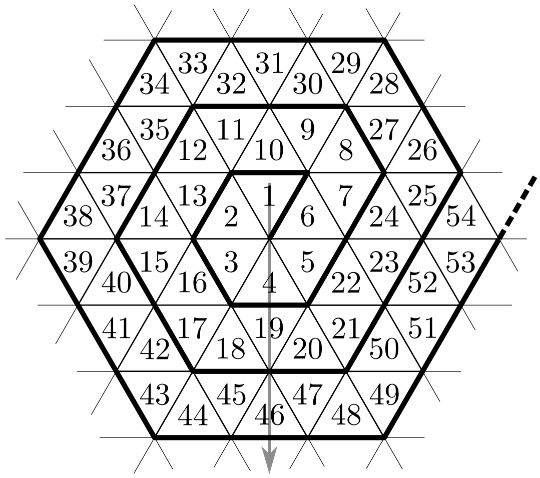
2. Soluções de Olimpíadas

Nesta edição apresentaremos a resolução de três questões discursivas da prova da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2016 referentes ao nível 3.

Questão 1. Prove que a diagonal do pentágono regular de lado 1 mede $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.



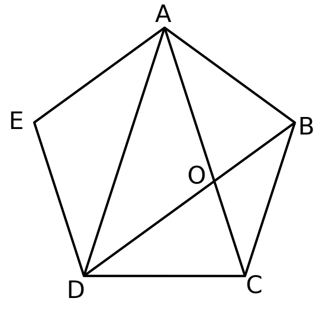
Questão 2. Considere a sequência $(1, 4, 19, 46, ...)$ indicada na figura abaixo. Encontre o décimo termo dessa sequência.



Questão 3. Um tapete de Sierpinski pode ser construído da seguinte forma: A partir de um quadrado de lado 1 dividimos cada lado em k partes iguais onde k é ímpar e maior ou igual a 3, dividindo assim o quadrado de lado 1 em k^2 subquadrados iguais. Remova o subquadrado central. Agora divida cada um dos subquadrados restantes novamente em k^2 subquadrados iguais e novamente remova os subquadrados centrais. Repita o processo em cada um dos novos subquadrados restantes e assim por diante. O tapete de Sierpinski é a figura que sobra após a remoção dos subquadrados em cada etapa. Qual a área do tapete de Sierpinski?

Resolução

Questão 1. Para facilitar a resolução, mapearemos o pentágono da seguinte maneira:



Sabemos que o ângulo interno de um polígono regular de n lados pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\text{Ângulo Interno} = \frac{(n-2)\cdot 180^{\circ}}{n},$$

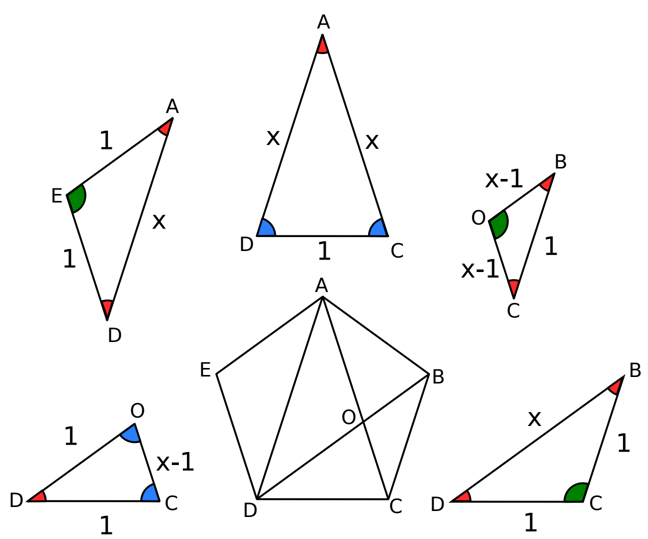
portanto o ângulo interno de um pentágono regular mede 108°. Com essa informação, uma primeira tentativa para encontrar o tamanho de uma diagonal seria usar a Lei dos Senos ou Lei dos Cossenos em um dos triângulos formados com a diagonal sendo um dos lados, porém não é elementar descobrir o valor dos senos e cossenos de 108º, 72º ou 36º.

Perceba que as diagonais $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ tem a mesma medida, pois os triângulos ADE, ABC e BCD são congruentes pelo caso LAL de congruência, ou seja, possuem dois lados consecutivos congruentes e mesma medida de ângulo entre esses lados. Denotaremos por x o tamanho dessas diagonais.

Sabendo que as diagonais tem mesmo tamanho e que o ângulo interno mede 108º se completarmos os ângulos da figura, veremos que os triângulos ACD e DOC são semelhantes pelo caso AAA de semelhança. São nesses dois triângulos que terminaremos a questão, pois já sabemos que o triângulo ACD possui lados $\overline{AD} = \overline{AC} = x$. Precisamos então encontrar o tamanho dos lados do triângulo DOC.

Perceba o triângulo DOC é isósceles, pois $D\hat{O}C = D\hat{C}O = 72^o$, portanto $OD = CD = 1$. Consequentemente, $\overline{OB} = \overline{BD} - \overline{OD} = x - 1$. Por fim, como o triângulo BOC é também isósceles, pois $O\hat{C}B = O\hat{B}C = 36^o$, segue que $\overline{OC} = \overline{OB} = x - 1$.

Ao fim desses passos, a figura estará da seguinte maneira:

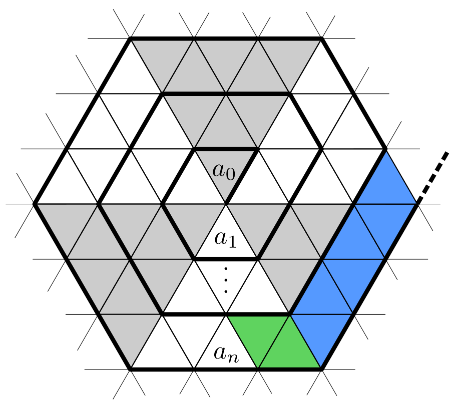


Usando a relação de semelhança, para os triângulos ACD e DOC,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{OC}} \implies \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \implies x^2 - x = 1 \implies x^2 - x - 1 = 0.$$

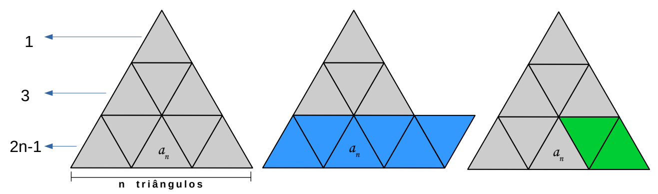
Chegamos a conclusão que para encontrar o tamanho da diagonal x, precisamos resolver essa última expressão. Dessa maneira, $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, mas como x é um tamanho da diagonal, então deve ser obrigatoriamente positivo, portanto a única solução possível é $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. O alunos poderiam ter feito as razões de semelhança também para os triângulos ADE e BOC e encontrariam a mesma resposta. ■

Questão 2. Observe a figura abaixo:



Nela observamos que a_n é igual a quantidade total de triângulos da figura menos o excesso (em verde e azul na figura). A quantidade total de triângulos é

$$6 \cdot [1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)] = 6n^2.$$



A quantidade de triângulos azuis é $2n$, e de triângulos verdes é $n - 1$. Portanto, o termo geral da sequência é

$$a_n = 6n^2 - 2n - (n-1) = 6n^2 - 3n + 1.$$

Logo, o décimo termo da sequência é

$$a_9 = 6 \cdot 9^2 - 3 \cdot 9 + 1 = 460.$$

(Lembre que o primeiro termo é o a_0) ■

Questão 3. A questão pode ser resolvida observando a área retirada em cada etapa. Note que na primeira etapa retiramos um quadrado de lado $1/k$ cuja área é $\dfrac{1}{k^2}$. Como estamos retirando apenas um quadrado, a quantidade retirada $a_1 = \dfrac{1}{k^2}$. Na segunda etapa, de cada subquadrado restante, vamos retirar o subquadrado central cujo lado mede $\dfrac{\left(\frac{1}{k}\right)}{k} = \dfrac{1}{k^2}$, assim a área desse subquadrado é $\left(\dfrac{1}{k^2}\right)^2$.

Além disso, o número de subquadrados restantes é $k^2 - 1$, assim, na segunda etapa retiramos $a_2 = (k^2-1)\cdot\left(\dfrac{1}{k^2}\right)^2$.

Na terceira etapa de cada subquadrado, iremos remover um subquadrado de lado $\dfrac{\frac{1}{k^2}}{k} = \dfrac{1}{k^3}$, cuja área é $\left(\dfrac{1}{k^3}\right)^2$ e como a quantidade de subquadrados na terceira etapa é $(k^2-1)^2$, assim, na terceira etapa retiramos $a_3 = (k^2-1)^2\cdot\left(\dfrac{1}{k^3}\right)^2$.

Assim, indutivamente, na n-ésima etapa, removeremos $(k^2-1)^{n-1}$ subquadrados onde cada subquadrado tem lado $\dfrac{1}{k^n}$, logo, a área removida na n-ésima etapa é $a_n = (k^2-1)^{n-1}\cdot\left(\dfrac{1}{k^n}\right)^2$. Observe que dessa forma as áreas removidas em cada etapa formam uma progressão geométrica infinita com primeiro termo igual a $\dfrac{1}{k^2}$ e razão $q = \dfrac{1}{k^2}\cdot(k^2-1)$ assim, a área removida em todas as etapas será

$a_1 = \dfrac{1}{k^2}$, $a_2 = (k^2-1)\cdot\left(\dfrac{1}{k^2}\right)^2$, $a_3 = (k^2-1)^2\cdot\left(\dfrac{1}{k^3}\right)^2 \dots$,

$a_n = (k^2-1)^{n-1}\cdot\left(\dfrac{1}{k^n}\right)^2$. $q = (k^2-1)\cdot\dfrac{1}{k^2}$.

A área de todos os quadrados removidos é a soma das áreas em cada etapa do processo. Assim $A = S$ onde S é a soma da PG infinita de 1° termo $a_1 = \dfrac{1}{k^2}$ e razão $q = (k^2-1)\cdot\dfrac{1}{k^2}$. Assim

$$S = \frac{\frac{1}{k^2}}{1-(k^2-1)\cdot\frac{1}{k^2}} = 1.$$

Logo a área do tapete de Sierpinski é $A_{(quadrado\ de\ lado\ 1)} - S = 1 - 1 = 0$. ■

3. Curiosidades

Números Amigáveis

Por Yane Lísley Ramos Araújo[2]

O desenvolvimento da Matemática ao longo dos séculos sempre se deu devido a curiosidade do homem em aprofundar os estudos na busca por solucionar problemas cotidianos, isso pode ser bem retratado na criação e desenvolvimento dos conjuntos numéricos.

Muitos matemáticos sempre estiveram preocupados em estudar relações e propriedades dos números e a partir de investigações muitos deles descobriram números que possuem uma propriedade interessante, os números amigáveis fazem parte dessa descoberta.

Números amigáveis são pares de números que possuem uma dessas propriedades interessantes: a soma dos divisores próprios naturais de um número, incluindo o 1, resulta no outro número e vice-versa. Por exemplo, os números 220 e 284, conhecido desde os Pitagóricos, são amigáveis, pois os divisores próprios de 220 são: $1, 2, , 4, 5, 10, 11, 20, 44, 55, 110$ cuja soma é $1+2+4+5+10+11+20+44+55+110 = 284$ e os divisores próprios de 284 é: $1, 2, 4, 71, 142$ cuja soma é $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$.

Números amigáveis não são fáceis de encontrar. Durante muito tempo acreditou-se que 220 e 284 fosse o único par, até que Fermat descobriu o par 17.296 e 18.416 e Descartes descobriu o par 9.363.584 e 9.437.056. Muitos teóricos dos números

[2]Professora do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

estudaram com cuidado este tema dentre os quais podemos citar o matemático iraquiano Thãbit ibn Qurra e um dos mais importantes matemáticos do século $XVIII$ Leonhard Euler. Esses matemáticos trabalharam no sentido de encontrar mais números amigáveis e nessa tentativa desenvolveram métodos (regras) para determinar esses números. Embora essas regras gerem alguns pares de números amigáveis, elas não são abrangentes uma vez que existem muitos outros pares conhecidos que não satisfazem essas regras.

Ainda hoje, não existe uma fórmula matemática ou método que liste todos os pares de números amigáveis, mais que isso não se sabe se o conjunto desses números é finito ou infinito. No entanto, conhece-se alguns milhares de pares, a maioria determinada por computador. Mesmo assim, é uma combinação rara, entre 0 e 1 bilhão há apenas 586 pares de números amigáveis.

Muito dessa teoria vem sendo desenvolvida com a generalização desse conceito para a noção de $k-$tupla de números amigáveis: os inteiros positivos $n_1, n_2, ..., n_k$ formam uma $k-$tupla de números amigáveis se a soma de todos os divisores próprios naturais, incluindo 1, de qualquer um deles é igual à soma dos outros $k-1$ números. Temos que 1.980, 2.016 e 2.556 constituem um tripleto de números amigáveis.

Referências

[1] http://brasilescola.uol.com.br/matematica/numeros-amigaveis. Acesso em: 19/03/2017.

[2] Chisholm, Hugh. Amicable Numbers. Encyclopedia Britannica. Cambridge University Press. 1911. Artigo disponível em https://en.wikipedia.org/wiki/Amicable_numbers. Acesso em: 22/03/2017.

[3] Weisstein, Eric W. Amicable Pair. Math World. Disponível em http://mathworld.wolfram.com/AmicablePair.html. Acesso em: 22/03/2017

[4] Fossa, John A.; Leôncio, Sarah Mara Silva. *"Sobre números amigáveis" de Leonhard Euler: Tradução e comentários*. Revista Brasileira de História da Matemática. Vol.9, n.17, 2009.

4. Indicações de Leituras

NASAR, Sylvia. **Uma mente brilhante**. Tradução de Sergio Moraes Rego. Sétima edição. Rio de Janeiro: BestBolso, 2015.

Marcelo P. Santos[3]

O livro **Uma mente brilhante** narra a biografia do matemático americano John Forbes Nash Jr, e descreve em detalhes sua vida desde sua infância até depois de ganhar o prêmio Nobel. A leitura é muito prazerosa pois o livro é muito bem escrito, e a trajetória de Nash é fantástica. Houve um filme de mesmo nome baseado no livro lançado em 2001 e ganhador de 4 Oscars.

Nash é um personagem interessante de muitos modos. Dono de uma genialidade que fez o ganhador da medalha Fields, Paul Cohen, afirmar "*Eu não discutia matemática com ele. Não me sentia à sua altura*"([1], pag. 328). Dotado de uma personalidade extremamente difícil que lhe causou inúmeras inimizades, vivenciou um drama pessoal que o fez aos 31 anos perder a capacidade de trabalhar em matemática devido a uma grave doença mental.

O livro ilustra bem o fato curioso que "*Para alguns, o trabalho curto, escrito aos 21 anos de idade, pelo qual ele ganhou o Prêmio Nobel de Economia, pode parecer o menor de seus feitos*"(segundo o medalha Fields John Milnor)([1], pag. 557) e parece ser este trabalho pelo qual Nash ganhou 95% de sua fama (segundo o medalha Fields Cedric Villany [3]). Na verdade Nash era tão versátil que mesmo dentro da Matemática Pura muitos não sabiam que ele trabalhava em várias áreas([2]). Para alguns estudantes o livro será interessante por contar uma historia fantástica de um matemático bastante conhecido. Para professores e estudiosos o livro é interessante também porque encontramos outros matemáticos de renome que em algum momento estive-

[3]Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

ram em contato com Nash, tais como: S. S. Chern; Serge Lang; John Milnor; Alexander Grothendieck ; Paul Cohen ; John Von Newman... e até mesmo Einstein.

Nash ganhou o Prêmio Nobel e o Prêmio Abel e acima de tudo o reconhecimento da comunidade matemática por seus feitos, no entanto muitos matemáticos acreditam que Nash deveria ter ganho também a medalha Fields([2]).

[1] NASAR, Sylvia. *Uma mente brilhante*. Tradução de Sergio Moraes Rego. Setima edição. Rio de Janeiro: BestBolso , 2015.

[2] *A Revoluçãoo de Nash da Teoria de Jogos*. Palestra proferida por Aloisio Araujo no 24^o Colóquio Brasileiro de Matemática em 2002 . Disponível em: <http://strato.impa.br/videos/24_CBM/araujo.wmv>. Acesso em: 01 de Julho de 2017.

[3] *The Extraordinary Theorems of John Nash*. Palestra proferida por Cedric Villany. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=iHKa8F-RsEM>. Acesso em: 26 de mar. 2017.

5. Eventos

Este é um ano importantíssimo para a matemática no que diz respeito a grandes eventos realizados no Brasil.

Fiquem Ligados!!!

- **SIM - Simpósio de Matemática para a Graduação**
  - Local: ICMC-USP- São Carlos-SP
  - Data: 21 a 25 de Agosto
  - http://sim.icmc.usp.br/sim2017/
- **IV ECMAT - IV Encontro Cajazeirense de Matemática**
  - Local: Cajazeiras - PB
  - 23 a 25 de Agosto
  - http://www.ecmat.com.br/
- **XXXVII CNMAC - XXXVII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**
  - Local: Local: São José dos Campos - SP
  - Data: 19 a 22 de Setembro
  - http://cnmac.org.br/br/
- **VII CIEM - VII Congresso Internacional de Ensino de Matemática**
  - Local: Canoas - RS
  - Data: 04 a 07 de Outubro
  - http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii

6. Problemas

Para concluir deixamos para o leitor alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Problema 1 (58th IMO)**.** Para cada inteiro $a_0 > 1$, defini-se a sequência $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots$ tal que, para cada $n \geq 0$:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{se } \sqrt{a_n} \text{ é inteiro} \\ a_n + 3, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Determine todos os valores de a_0 para os quais existe um número A tal que $a_n = A$ para infinitos valores de n.

Problema 2 (51st IMO)**.** Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f([x]y) = f(x)[f(y)]$$

para todos $x,\ y \in \mathbb{R}$. ($[z]$ designa o maior inteiro que é menor igual a z)

Problema 3 (52^{nd} IMO)**.** Para qualquer conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de quatro inteiros positivos distintos, a soma é denotada por s_A. Seja n_A o número de pares de índices (i, j), com $1 \leq i < j \leq 4$, para os quais $a_i + a_j$ divide s_A. Encontre todos os conjunto A de quatro inteiros positivos distinto para os quais n_A seja máximo.

Mandem soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, sua solução deve ser enviada até **01/10/2017**.

7. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n.1, Abril de 2017**.

Problema 1. Três médicos devem examinar, durante o mesmo período de tempo (10 minutos), n pacientes, gastando 10 minutos com cada um deles. Cada um dos pacientes deve ser examinado pelos três médicos. De quantos modos pode ser feito um horário compatível?

Solução. Vamos atribuir um número de 1 à n a cada paciente. Para organizar o horário do primeiro médico basta encontrar todas as permutações desses elementos que é igual $P(n) = n!$. Para fazer o horário do segundo médico temos que fazê-lo de modo que não haja choque de horários com o primeiro médico. Para fixar as ideias suponha que a grade de horário do primeiro médico tenha sido a permutação $(1, 2, 3, \cdots, n)$. Logo para o segundo médico temos que tomar as permutações tal que o primeiro elemento não seja o número 1, que o segundo não seja o 2 e assim por diante. E isso é o desarranjo ou permutação caótica de n elementos que é dada por $D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$, a qual pode ser facilmente obtida pelo princípio da inclusão e exclusão. Para o horário do terceiro médico observe que temos que organizá-lo de forma a não chocar nem com o horário do primeiro médico e nem com o horário do segundo médico. Suponha sem perda de generalidade que a distribuição dos pacientes para o primeiro médico foi dado pela permutação $(1, 2, 3, \cdots, n)$ e que o horário do segundo médico foi dado pela permutação $(2, 3, \cdots, n, 1)$. Assim a distribuição dos pacientes para o horário do terceiro médico está em bijeção com as permutações de elementos de 1 à n tal que o primeiro elemento não é 1 e não é 2, a do segundo elemento não é 2 e não é 3 até que o último elemento não é n e não é 1. Para resolver esse problema vamos usar o principio da inclusão-exclusão para tanto definimos os seguintes conjuntos:
A_i é o conjunto das permutações cujo elemento i está fixo na posição i, para $1 \leq i \leq n$.
A_{n+j} é o conjunto das permutações cujo elemento $j+1$ está fixo na posição j, para $1 \leq j \leq n-1$.
E A_{2n} é o conjunto das permutações cujo elemento 1 está fixo na posição n.

Portanto, denotando por A o conjunto de permutações de n elementos, o número que estamos procurando é $\left| A - \bigcup_{l=1}^{2n} A_l \right|$. Observe que $\forall k,\ A_k \cap A_{n+k} = \emptyset$. Aplicando o princípio da inclusão-exclusão temos que

$$E(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!$$

Este problema é uma aplicação de uma classe de permutações chamadas permutações discordante (discordant permutation). O horário do segundo médico é o que conhecemos como desarranjo e o do terceiro médico é menagé numbers. Que está associado ao problema dos encontros(menagé problemé). Tome como exercício, procurar mais na internet sobre estes tópicos. E uma referência um pouco mais avançada, para os leitores, interessados é o livro Richard p. Stanley, Enumerative Combinatorics, Vol.1 Second ed.

$\square$

Problema 2. Encontre todas as soluções de

$$p^3 - q^5 = (p+q)^2$$

no qual p e q são primos.

Solução. Quando temos uma equação diofantina como essa é sempre bom analisá-la via congruência para algum módulo apropriado. Nesse caso a intuição natural é usar 3 ou 5 como módulo.

Nossa afirmação é que um dos primos é igual a 3. Suponha que não. Observe que pelo pequeno teorema de Fermat temos que $p^2 \equiv 1 \pmod 3$ e $q^2 \equiv 1 \pmod 3$. Logo a equação fica:
$p - q \equiv 2 + 2pq \pmod 3$ que podemos reescrever como $(p-1)(q+1) \equiv 1 \pmod 3$.

Agora observe que a equação mais geral $xy \equiv 1 \pmod 3$ só tem duas soluções possíveis:
$x \equiv 1 \pmod 3$ e $y \equiv 1 \pmod 3$ ou $x \equiv 2 \pmod 3$ e $y \equiv 2 \pmod 3$.

Logo $p - 1 \equiv 1 \pmod 3$ e $q + 1 \equiv 1 \pmod 3$ o que implica que $q \equiv 0 \pmod 3$, isto é, $3|q$.
Ou $p - 1 \equiv 2 \pmod 3$ e $q + 1 \equiv 2 \pmod 3$ o que implica que $p \equiv 0 \pmod 3$, isto é, $3|p$.
O que é um absurdo em ambos os casos, pois estávamos supondo p e q não divisíveis por 3. Assim temos que ou $p = 3$ ou $q = 3$. Como $p^3 - q^5 > 0$, se $p = 3$ por menor que seja o primo q, por exemplo, tomando menor deles $q = 2$ teríamos $27 - 32 < 0$. Ou seja, $p \neq 3$, e temos que $q = 3$. Substituindo $q = 3$ na equação obtemos:
$p^3 - 3^5 = p^2 + 6p + 3^2 \Rightarrow p^3 - p^2 - 6p = 3^5 + 3^2 \Rightarrow p(p^2 - p - 6) = 9 \cdot (3^3 + 1)$, como p é primo $p|9 \cdot 28$ o que implica que $p|28$. Portanto $p = 7$. Concluímos com isso que a única solução é $p = 7$ e $q = 3$.

$\square$

Problema 3. Determine todos os inteiros x, y, z tais que

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3. \tag{5}$$

Solução. Defina $a = \frac{|x|}{|y|}$, $b = \frac{|y|}{|z|}$, $c = \frac{|z|}{|x|}$ com a,b,c são números positivos podemos usar a desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica. Que nos diz que

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = 1.$$

Logo $a + b + c \geq 3$, e a igualdade ocorre se, e só se, $a = b = c$. O enunciado nos diz que $a+b+c = 3$. Assim temos que $a = b = c$ e que $3a = 3$, $a = 1$. Logo $b = 1$ e $c = 1$. Isso implica $|x| = |y| = |z|$. Por inspeção constatamos que $x = y = z$, ou seja, toda solução é da forma $k \cdot (1,1,1) = (k,k,k)$ para k um inteiro não nulo qualquer.

$\square$