É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

2017- Número 2, volume 1, Junho de 2017

ISSN 2526-8651

Sumário

1. Artigo

E as funções sobrejetivas?

Carlos A. Gomes

UFRN - CCET - Departamento de Matemática

59078-970 - Natal - RN - Brasil

Introdução

Não é raro encontrarmos nos textos escolares que tratam de análise combinatória, o problema do cálculo da quantidade de funções $f : A \to B$, onde A e B são conjuntos finitos com n e k elementos respectivamente. Quando $n \leq k$, também é comum encontrarmos o problema correspondente ao cálculo da quantidade de funções injetivas que podem ser definidas de A em B. Também é fato quase que obrigatório encontrarmos nesses textos o problema do cálculo da quantidade de bijeções de A em B, quando $n = k$ (é claro!). Pode parecer um pouco estranho que normalmente não seja tratado nos mesmos textos o problema de determinar a quantidade de funções sobrejetivas existentes entre dois conjuntos finitos A e B, no caso em que $n \geq k$. A explicação para a ausência desse problema nesses textos é que a resolução desse problema requer um pouco mais; O Princípio da inclusão e exclusão no caso geral (para uma quantidade m, finita, de conjuntos finitos) o que não é, em geral, tratado nesses textos. Nesse contexto, inicialmente apresentaremos uma maneira intuitiva de estabelecer a fórmula fechada para o cálculo da quantidade de funções sobrejetivas entre dois conjuntos finitos e em seguida demonstraremos a veracidade dessa fórmula fazendo o uso do princípio da inclusão e exclusão. De posse da fórmula, ao final apresentaremos algumas aplicações envolvendo tal resultado.

Revisando alguns conceitos básicos

Princípio Multiplicativo

Se uma decisão D_1 pode ser tomada de x maneiras distintas e uma vez tomada a decisão D_1, uma decisão D_2 puder ser tomada de y maneiras distintas, então a quantidade de maneiras distintas de tomar as decisões D_1 e D_2 sucessivamente é xy.

A quantidade de funções definidas entre dois conjuntos finitos.

Dados dois conjuntos finitos A e B tais que $\#A = n$ e $\#B = k$, quantas funções distintas $f : A \to B$ podem ser definidas ?

Ora, se $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ e $B = \{b_1, \cdots, b_k\}$ definir uma função $f : A \to B$ consiste em escolher um valor (uma imagem), no conjunto B, para cada um dos elementos de A, ou seja, determinar $f(a_1), \cdots, f(a_n)$, mas isto pode ser feito de $\underbrace{k \times \cdots \times k}_{n \ \ vezes} = k^n$ modos distintos, pois para cada um dos $f(a_i)$ com $i = 1, \cdots, n$ temos k possibilidades de escolhermos a imagem $f(a_i)$. Diante do exposto, o resultado segue pelo Princípio Multiplicativo.

A quantidade de funções injetivas definidas entre dois conjuntos finitos

Dados $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ e $B = \{b_1, \cdots, b_k\}$ quantas são as funções injetivas (distintas) $f : A \to B$?

É claro que só existem funções injetivas de A em B quando $n \leq k$. Nesse caso, $f(a_1), \cdots, f(a_n)$ devem assumir valores distintos. Usando o Princípio Multiplicativo, temos que existem

$$k.(k-1).(k-2).\cdots.(k-n+1) = \frac{k!}{(k-n)!}$$

funções injetivas distintas de A em B, pois para escolhermos a imagem $f(a_1)$ temos n possibilidades, já para escolhermos a imagem $f(a_2)$ teremos $n-1$ possibilidades, visto que para que a função f seja injetiva é preciso que $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Seguindo esse mesmo raciocínio para as demais imagens, segue que para a última imagem $f(a_n)$ existirão apenas $k-(n-1) = k-n+1$ possibilidades de escolhas. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, segue que existem

$$\begin{aligned} k.(k-1).\cdots.(k-n+1) &= k.(k-1).\cdots.(k-n+1)\tfrac{(k-n).\cdots.1}{(k-n).\cdots.1} \\ &= \frac{k.(k-1).\cdots.(k-n+1).(k-n).\cdots.1}{(k-n).\cdots.1} \\ &= \frac{k!}{(k-n)!} \end{aligned}$$

funções injetivas $f : A \to B$.

A quantidade de funções bijetivas definidas entre dois conjuntos finitos.

No caso em que $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ e $B = \{b_1, \cdots, b_k\}$ quantas são as bijeções $f : A \to B$?

É claro que só existem funções bijetivas de A em B quando $n = k$. Nesse caso, usando o mesmo raciocínio do item anterior é imediato concluir que existem $n!$ bijeções de A em B.

A quantidade de funções sobrejetivas definidas entre dois conjuntos finitos.

Feita a introdução necessária, agora vamos abordar o principal problema desse pequeno artigo: Dados $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ e $B = \{b_1, \cdots, b_k\}$ quantas são as funções sobrejetivas (distintas) $f : A \to B$? É claro que só existem funções sobrejetivas de A em B quando $n \geq k$. Aqui precisamos tomar mais cuidado. Por isso, vamos inicialmente examinar alguns casos particulares para estimular a nossa intuição abordando alguns casos particulares nos exemplos a seguir.

Exemplo 1.1. Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{d, e\}$ existem 2^3 funções de A em B, onde apenas as funções constantes, a saber: $f_1 = \{(a, d), (b, d), (c, d)\}$ e $f_2 = \{(a, e), (b, e), (c, e)\}$ não são sobrejetivas. Então, nesse caso, temos $2^3 - 2 = 6$ funções sobrejetivas de A em B.

Vejamos uma segunda situação:

Exemplo 1.2. Sendo um pouquinho mais geral, se $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ com $n \geq 2$ e $B = \{d, e\}$, existem 2^n funções de A em B, onde apenas as funções constante, a saber: $f_1 = \{(a_1, d), (a_2, d), \cdots, (a_n, d)\}$ e $f_2 = \{(a_1, e), (a_2, e), \cdots, (a_n, e)\}$ não são sobrejetivas. Então, neste caso, existem $2^n - 2$ funções sobrejetivas de A em B.

Avançando mais um pouquinho,

Exemplo 1.3. Agora imaginemos que $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{e, f, g\}$. Nesse caso existem 3^4 funções de A em B. Considerando os subconjuntos de B com 2 elementos (que são 3) teríamos 2^4 funções de A em cada um desses subconjuntos de B. Assim somos tentados a dizer que a quantidade de funções sobrejetivas de A em B é igual a $3^4 - 3.2^4 = 3^4 - \binom{3}{2}.2^4 = 33$, onde $\binom{n}{p}$ (número binomial), mas devemos ter bastante cuidado pois as $\binom{3}{2}.2^4$ funções não são todas distintas, pois se tomarmos, por exemplo, o subconjunto $\{e, f\}$ de B nos excluímos a função $f_1 = \{(a, e), (b, e), (c, e), (d, e)\}$ duas vezes, a saber: uma quando consideramos o subconjunto $\{e, f\}$ e outra quando consideramos o subconjunto $\{e, g\}$ de B, consequentemente no resultado $3^4 - 3.2^4 = 3^4 - \binom{3}{2}.2^4 = 33$ nós removemos duas vezes as funções constantes de A em $\{e\}, \{f\}$ e $\{g\}$. Assim, para ajustarmos o resultado devemos adicionar 3, ou seja, existem, nesse caso, $3^4 - \binom{3}{2}.2^4 + \binom{3}{1}.3 = 36$ funções sobrejetivas de A em B.

Sendo um pouquinho mais geral, se $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$, com $n \geq 2$ e $B = \{d, e\}$, pelo raciocínio anterior somos levados a pensar que existem $\binom{3}{3}.3^n - \binom{3}{2}.2^n + \binom{3}{1}.1^n$ funções sobrejetivas de A em B. E isso é verdade, como demonstraremos mais tarde com a explicação do caso geral.

Os exemplos anteriores sugerem que se A fosse um conjunto com 5 elementos e B fosse um conjunto com 4 elementos existiriam $\binom{4}{4}.4^5 - \binom{4}{3}.3^5 + \binom{4}{2}.2^5 - \binom{4}{1}.1^5 = 240$ funções sobrejetivas de A em B.

E, no caso geral, se $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ e $B = \{b_1, \cdots, b_k\}$ com $n \geq k$, o raciocínio anterior sugere que a quantidade de funções sobrejetivas de A em B deve ser dada por:

$$\begin{aligned} T(n,k) = & \binom{k}{k}.k^n - \binom{k}{k-1}.(k-1)^n + \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k}{1}.1^n \\ = & \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i.\binom{k}{k-i}.(k-i)^n \end{aligned}$$

Vamos provar que a nossa intuição está correta, demonstrando o seguinte resultado.

Teorema 1.1. *Sejam A e B conjuntos finitos tais que $\#(A) = n$ e $\#(B) = k$, com $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $n \geq k$. A quantidade de funções sobrejetivas $f : A \to B$ é dada por*

$$T(n,k) = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k}{k-i}(k-i)^n$$

Demonstração: Como $\#(A) = n$ e $\#(B) = k$ (com $n \geq k$), podemos supor que $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ e $B = \{y_1, y_2, \cdots, y_k\}$. Para determinarmos uma função $f : A \to B$ basta determinarmos as imagens $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, existem $\underbrace{k \times k \times \cdots k}_{n \text{ vezes}} = k^n$ funções de A em B. Nesse caso, estamos querendo mais ainda: estamos querendo que f seja sobrejetiva. Para tal, consideremos os conjuntos, a saber:

$$A_1 = \{f : A \to B \ ; \ f(x) \neq y_1 \ \forall x \in A\}$$

$$A_2 = \{f : A \to B \ ; \ f(x) \neq y_2 \ \forall x \in A\}$$

$$\vdots$$

$$A_k = \{f : A \to B \ ; \ f(x) \neq y_k \ \forall x \in A\}$$

Para ser sobrejetiva, $f : A \to B$ não pode pertencer a nenhum dos conjuntos acima, ou seja, o conjunto das funções sobrejetivas é exatamente

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_k^c$$

Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, segue que:

$$\# (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = \sum_{i \geq 1} \# (A_i)$$
$$- \sum_{1 \leq i < j} \# (A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{k-1} \# (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)$$

Note que para definirmos uma função $f : A \to B$ em que $f(x) \neq y_i$ para todo $x \in A$, basta escolhermos os valores $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$ entre os valores $y_1, \cdots, y_{i-1}, y_{i+1}, \cdots y_k$, o que, pelo Princípio Multiplicativo, pode ser feito de $\underbrace{(k-1) \times (k-1) \times \cdots \times (k-1)}_{n \text{ fatores}} = (k-1)^n$ modos distintos. Seguindo este mesmo raciocínio, segue que:

$$\#(A_i \cap A_j) = (k-2)^n$$

$$\#(A_i \cap A_j \cap A_t) = (k-3)^n$$

$$\vdots$$

$$\#(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = (k-k)^n$$

Portanto,

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = \tbinom{k}{1}(k-1)^n - \tbinom{k}{2}(k-2)^n + \binom{n}{3}(k-3)^n + \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k}(k-k)^n$$

ou seja, a quantidade de funções $f : A \to B$ que não são sobrejetivas é dada por

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k}{i}(k-i)^n$$

Como a quantidade total de funções $f : A \to B$ é k^n, segue que a quantidade de funções sobrejetivas $f : A \to B$, $T(n,k)$, é dada por:

$$\begin{aligned} T(n,k) &= k^n - \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k}{i}(k-i)^n \\ &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{k-i}(k-i)^n \end{aligned}$$

o que demonstra o resultado desejado.

Aplicações

Nessa seção, vamos utilizar o teorema anterior para resolver dois exemplos interessantes.

Exemplo 1.4 ([4]). Consideremos um conjunto de 9 pessoas, em que todas sabem dirigir. De quantas maneiras distintas essas 9 pessoas podem se agrupar para levar 4 carros de uma cidade A para uma cidade B? (Não considerando "quem dirige", no caso de duas ou mais pessoas estarem num mesmo carro, ou seja, só levando em consideração a quantidade de pessoas em cada carro!)

Resolução: Imaginemos que X seja o conjunto cujos elementos são $P_1, P_2, \cdots, P_9$ as 9 pessoas e Y o conjunto cujos elementos são C_1, C_2, C_3 e C_4 os 4 carros. Como cada pessoa deve entrar (necessariamente) num dos carros e cada carro não pode ficar vazio (pois todos os carros devem ser transportados), associando a cada pessoa o número correspondente ao carro que ela irá entrar, definiremos uma função sobrejetiva para cada possível maneira de distribuir as 9 pessoas nos 4 carros. Diante do exposto o número de maneiras distintas de distribuir as 9 pessoas nos 4 carros sem que nenum deles fique vazio corresponde à quantidade de funções sobrejetivas $f : X \to Y$, que pelo teorema anterior é

$$\begin{aligned} T(9,4) &= \sum_{i=0}^{4}(-1)^i\binom{4}{i}(4-i)^9 \\ &= \binom{4}{0}4^9 - \binom{4}{1}3^9 + \binom{4}{2}2^9 - \binom{4}{3}1^9 + \binom{4}{4}0^9 \\ &= 186.480 \end{aligned}$$

Assim, existem 186.480 modos distintos dessas 9 pessoas agruparem-se para levar 4 carros de uma cidade A para uma cidade B

Exemplo 1.5. De quantas formas distintas podemos distribuir n bolas distintas em k caixas distintas ($n \geq k$), de modo que nenhuma caixa fique vazia?

Resolução: Sejam $b_1, \cdots, b_n$ as n bolas distintas e $C_1, \cdots, C_k$ as k caixas distintas. Se associarmos a cada uma das n bolas o número da caixa onde ela será colocada, estaremos definindo uma função $f : A \to B$ do conjunto A das n bolas distintas no conjunto B das k caixas distintas. Ora, para cumprir a condição de que nenhuma das k caixas fique vazia, basta considerarmos apenas as funções $f : A \to B$ sobrejetivas. Pelo teorema anterior, sabemos que a quantidade dessas funções, nesse caso, é dada por

$$T(n,k) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{k-i}(k-i)^n$$

Exercícios Propostos

Para finalizar, deixaremos alguns probleminhas interessantes cuja solução passa pelas ideias discutidas ao longo do texto.

1. (USA) Num certo laboratório de computação há 20 computadores e 10 impressoras. De quantas formas distintas podemos conectar os computadores às impressoras de modo que todas as impressoras sejam utilizadas?

2. (USA) Se 30 alunos distintos são distribuídos aleatoriamente em 6 salas distintas, qual a probabilidade de que nenhuma das 6 salas fique vazia?

3. (AIME) Sejam $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_{100}\}$ e $B = \{1, 2, \cdots, 50\}$.
a)Determine a quantidade de funções sobrejetivas $f : A \to B$ tais que
$$f(a_1) \leq f(a_2) \leq \cdots \leq f(a_{100}).$$
b)E se f não fosse sobrejetivas, quantas seriam as funções satisfazendo as mesmas desigualdades do item anterior?

4. (The Art Problem Solving) Sejam $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ e $B = \{-1, 0, 1\}$. Determine a quantidade de funções $f : A \to B$ satisfazem a seguinte condição:
$$|f(1)| + |f(2)| + |f(3)| + \cdots + |f(n)| = 5.$$

5. (USAMO) Sejam n um inteiro maior que 1 e $A = \{1, 2, \cdots, n\}$. Determine a quantidade de bijeções $f : A \to A$ tais que:
$$|f(1) - 1| + |f(2) - 2| + |f(3) - 3| + \cdots + |f(n) - n| = \frac{n^2 - 1}{2}.$$

6. (IMO) Seja função bijetiva $f : A \to A$, onde $A = \{1, 2, \cdots, 2n\}$. Dizemos que uma tal função f goza da propriedade P quando $|f(i) - f(i+1)| = n$ para pelo menos um $i \in \{1, 2, \cdots, 2n-1\}$. Mostre que a quantidade de funções f que satisfazem a propriedade P é maior que a quantidade de funções f que não satisfazem a propriedade P.

7. (CANADÁ) Sejam n um inteiro positivo e $A = \{1, 2, \cdots, 2n\}$. Mostre que a quantidade de funções bijetivas $f : A \to A$ que não possusem pontos fixos e a quantidade de funções bijetivas $f : A \to A$ que possusem exatamente um ponto fixo diferem de uma unidade.

8. (AIME) Sejam $A = \{1, 2, \cdots, n\}$. Para cada uma bijeção $f : A \to A$ considere a soma
$$S_f := |f(1) - f(2)| + |f(3) - f(4)| + |f(5) - f(6)| + |f(7) - f(8)| + |f(9) - f(10)|$$
Qual a média aritmética de todas as somas S_f possíveis?

9. Sejam m e n inteiros positivos e
$$S(m,n) := \binom{n}{0}(2^n - 1)^m - \binom{n}{1}(2^{n-1} - 1)^m + \binom{n}{2}(2^{n-2} - 1)^m - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}$$
Mostre que $S(m,n) = S(n,m)$.

10. (IMC) Seja $A = \{1, 2, \cdots, n\}$, onde n é um inteiro positivo maior que 2. Seja F_n a família de todas as funções não contantes $f : A \to A$ tais que:
   - $f(k) \leq f(k+1)$ para todo $k = 1, 2, \cdots, n-1$;
   - $f(k) \leq f(f(k+1))$ para todo $k = 1, 2, \cdots, n-1$

   Determine a quantidade de funções distintas em F_n.

Referências

[1] Campos, André P., Campos, Viviane S., Gomes, Carlos A., *Introdução à Combinatória e Probabilidade*, Editora Ciência Moderna - RJ, 2014.

[2] Morgado, A. C., *Análise Combinatória e Probabilidade*, SBM-Sociedade Brasileira de Matemática, 2000.

[3] Niven, Ivan M., *Mathematical of Choice*, MAA - Mathematical Association of America, 1965.

[4] Plínio, J. O., *Introdução à Análise Combinatória*, Editora da Unicamp-SP, 1999.

[5] Grimaldi, Ralph., *Discrete and Combinatorial Mathematics*, Addison-Wesley Publish Company. 5th edition, 2003.

[6] Andreescu, Titu., *A Path to Combinatorics for undergraduates*, BirkHauser. 1th edition, 2004.

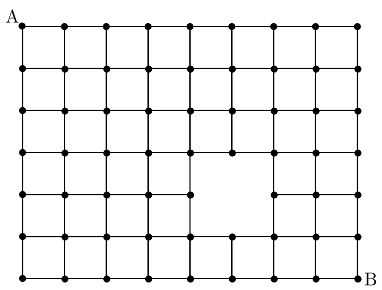
2. Soluções de Olimpíadas

Nesta edição apresentaremos a resolução de três questões discursivas da prova da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2016 referentes ao nível 2.

Questão 1. Considere o triângulo isósceles ABC com $AB = AC$ tal que o segmento BD, com D no segmento AC, é bissetriz do ângulo $A\widehat{B}C$, $DC = 1$ e as medidas de BD, AD e BC são iguais. Encontre o valor da razão:

$$\frac{\text{área do triângulo}\, ABC}{\text{área do triângulo}\, BCD}$$

Questão 2. A figura abaixo representa o mapa de uma cidade. Cada aresta representa uma rua e cada vértice representa um cruzamento. Quantos são os trajetos de comprimento mínimo ligando o ponto A ao ponto B?

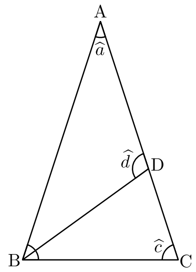


Questão 3. Para quais valores de $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ com a, b e c distintos dois a dois têm-se

$$\frac{10a + b}{10b + c} = \frac{a}{c}.$$

Resolução

Questão 1



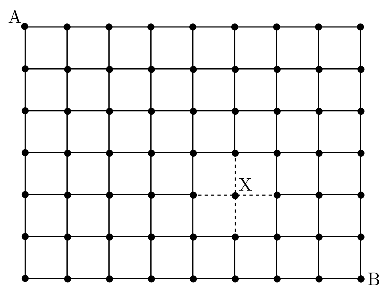
Note que $\triangle ABC \sim \triangle BCD$, assim, sendo $x = AD$, $\dfrac{x+1}{x} = \dfrac{x}{1}$, então $x^2 = x + 1$. Assim $x^2 - x - 1 = 0$, daí $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Sendo H a altura relativa ao vértice A do $\triangle ABC$, temos $H^2 = (x^2)^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$. Logo $H = x\sqrt{x^2 - \dfrac{1}{4}}$. Sendo h a altura relativa ao vértice D do $\triangle BDC$ temos, $h^2 = x^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$, donde $h = \sqrt{x^2 - \dfrac{1}{4}}$.
Então a razão entre a área $\triangle ABC$ e a área $\triangle BDC$ é

$$\frac{\dfrac{x \cdot x \cdot \sqrt{x^2 - \dfrac{1}{4}}}{2}}{\dfrac{1 \cdot \sqrt{x^2 - \dfrac{1}{4}}}{2}} = x^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

■

Questão 2

Vamos completar o mapa adicionando o ponto X conforme a figura abaixo.



Primeiramente observe que para o comprimento do trajeto ter comprimento mínimo, não podemos fazer movimentações antagônicas, pois gastamos dois movimentos sem sair do lugar. Por exemplo ir para direta e em algum momento voltar para esquerda.

Seguindo este raciocínio, chamaremos de solução, uma trajetória de comprimento mínimo que tem obrigatoriamente 14 movimentações, sendo 8 para direita e 6 para baixo.

Podemos assim tentar solucionar o problema de duas maneiras: A primeira seria contar total de soluções que não passam por X. A segunda maneira seria contar o total de caminhos de A para B e subtrair destes, a quantidade de caminhos de A para B que passam por X. Escolhemos a segunda maneira, pois a solução deve ser mais simples e definimos:

Soluções que não passam por X = total de caminhos de A para B - soluções que passam por X.

Do total de caminhos de A para B, que são 14 movimentações, sendo 8 para direita e 6 para baixo, vamos associar uma seta com um índice e vamos contar inicialmente, como se cada seta para direta fosse diferente e cada seta para baixo também fosse diferente. Então

$(\to_1)(\to_2)(\to_3)(\to_4)(\to_5)\ (\to_6)(\to_7)(\to_8)(\downarrow_1)(\downarrow_2)(\downarrow_3)(\downarrow_4)(\downarrow_5)(\downarrow_6)$
é uma solução.

Assim como
$(\downarrow_3)(\to_3)(\to_7)\ (\to_6)(\downarrow_4)(\to_1)(\to_2)(\to_8)(\downarrow_1)(\to_5)(\downarrow_2)(\downarrow_5)(\downarrow_6)(\to_4)$
também é solução.

Seguindo esse raciocínio, temos 14 opções para escolher a primeira seta, 13 opções para escolher a segunda seta, assim por diante e até 2 opções para escolher a penúltima seta e 1 opção para escolher a última seta. Ou seja 14! soluções.

Agora vamos contar, quantas soluções foram contadas de forma repetida, já que na realidade as setas para direta são todas iguais e as setas para baixo também são todas iguais.

Por exemplo a solução:
$(\to_1)(\to_2)(\to_3)(\to_4)(\to_5)\ (\to_6)(\to_7)(\to_8)(\downarrow_1)(\downarrow_2)(\downarrow_3)(\downarrow_4)(\downarrow_5)(\downarrow_6)$
é igual a solução:
$(\to_2)(\to_1)(\to_6)(\to_4)(\to_5)\ (\to_3)(\to_7)(\to_8)(\downarrow_1)(\downarrow_5)(\downarrow_3)(\downarrow_4)(\downarrow_2)(\downarrow_6)$
Ou seja, para cada solução fixada, podemos permutar os índices das setas de mesmo tipo, sem que o trajeto seja modificado. Então para cada solução fixada, temos um total de 8! formas de ordenar as setas para direita sem modificar o trajeto e 6! formas de ordenar as setas para baixo também sem modificar o trajeto. Então, quando contamos um total de 14! caminhos de A para B, precisamos dividir por $8! \cdot 6!$ para deixar de contar as soluções repetidas. Logo o total de caminhos de A para B é $\frac{14!}{8! \cdot 6!}$.

Agora precisamos contar, dentre o total destes caminhos contados, os caminhos que passam por X.

Para contar o total de soluções que saem de A passam por X e chegam em B, vamos contar o total de trajetos, de comprimento mínimo, que saem de A e chegam em X e multiplicar pelo total de trajetos, de comprimento mínimo, que saem de X e chegam em B.

Pelo mesmo raciocínio, obtemos que o total de trajetos, de comprimento mínimo, que saem de A e chegam em X é $\dfrac{9!}{5! \cdot 4!}$. E o total de trajetos que saem de X e chegam em B é $\dfrac{5!}{3! \cdot 2!}$. Então o total de soluções passando por X é $\dfrac{9!}{5! \cdot 4!} \cdot \dfrac{5!}{3! \cdot 2!}$.

Logo o total de trajetos, de comprimento mínimo, que saem de A e chegam em B no mapa original é

$$\frac{14!}{8! \cdot 6!} - \frac{9!}{5! \cdot 4!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 3003 - 126 \cdot 10 = 1743.$$

■

Questão 3

Temos que

$$(10a + b)c = (10b + c)a.$$

Desenvolvendo esta equação obtemos:

$$9ac = b(10a - c).$$

Da equação acima vemos que $b(10a - c)$ é múltiplo de 3. Temos dois casos a considerar: $3 \nmid b$ ou $3|b$. Se $3 \nmid b$ então $9|10a - c$ o que acarreta em $9|a - c$. Uma vez que $a, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, devemos ter $a = c$, o que é impossível porque estamos supondo que a e c são distintos. Assim, provamos que necessariamente $3|b$. Então $b = 3, 6$ ou 9.

- Se $b = 3$ então $3ac = 10a - c$. logo, $c(3a+1) =$

$10a$. Como a e $3a+1$ são primos entre si, devemos ter $3a+1|10$. Assim, $a=3$ e, consequentemente, $c=3$. Como supomos que a e c são distintos descartaremos esta solução.

- Se $b=6$ então $3ac=2(10a-c)$. Desenvolvendo esta equação obtemos $c(3a+2)=20a$. Temos que a é par ou ímpar. Se a é ímpar então $3a+2$ e a são primos entre si. Assim $3a+2|20$. Assim, como $a\neq 6$ (pois estamos supondo $b=6$), necessariamente $a=1$. Assim $3c=2(10-c)$ o que nos dá $c=4$. Como

$$\frac{10.1+6}{10.6+4}=\frac{16}{64}=\frac{1}{4},$$

$a=1$, $b=6$, $c=4$ é solução para o nosso problema. Se a é par então $a=2l$, com $l\in\{1,2,3,4\}$. Assim $2c(3l+1)=40l$. Como $3l+1$ e l são coprimos temos que $3l+1|40$. Assim $l=1$ ou $l=3$. Como $2l=a\neq 6$, necessariamente $l=1$ e $a=2$. Por outro lado, $2c(3\cdot 1+1)=40\cdot 1$ nos diz que $c=5$. Como

$$\frac{26}{65}=\frac{2}{5},$$

temos que $a=2$, $b=6$, $c=5$ é solução.

- Se $b=9$ então $ac=10a-c$, o que nos dá $c(a+1)=10a$. Uma vez que a e $a+1$ são coprimos $a+1|10$. Assim, como $a\neq 9$, devemos ter $a=1$ ou $a=4$. Se $a=1$ então $c=5$. Como

$$\frac{19}{95}=\frac{1}{5},$$

temos que $a=1$, $b=9$ e $c=5$ é outra solução para o nosso problema. Se $a=4$ então $c=8$. Uma vez que

$$\frac{49}{98}=\frac{4}{8},$$

$a=4$, $b=9$ e $c=8$ também é solução para o nosso problema.

Note que esgotamos todos os casos. As soluções do problema são:

$$\begin{cases} a=1, b=6, c=4; \\ a=1, b=9, c=5; \\ a=2, b=6, c=5; \\ a=4, b=9, c=8. \end{cases}$$

■

3. Curiosidades

O Site SageMathCloud

Por Marcelo P. Santos[1]

SagemathCloud é um site para propósitos matemáticos. É um serviço de nuvem que pode ser acessado por [1], e que permite a qualquer pessoa criar uma conta e usar gratuitamente. Há ainda versões otimizadas disponíveis via assinatura (cujo valor inicial atualmente é 7 dólares). Sua missão é propiciar um ambiente matemático onde se pode realizar cálculos incluindo assuntos de Aritmética, Geometria, Teoria dos Números, Grafos, Cálculo Diferencial, etc.... Como também plotagem de gráficos, ou pequenas simulações computacionais. É um ótimo ambiente para quem gosta de misturar computação com matemática.

Este site propicia um ambiente colaborativo para pesquisa e estudo, onde seu grupo de trabalho pode ter acesso simultâneo aos arquivos, bem como um chat para comunicação em tempo real, também possui um editor para textos matemáticos (via o formato Latex). Nele os professores podem gerenciar seus cursos no SageMathCloud, o que já esta sendo feito pelas melhores universidades do mundo[2].

Para cálculos rápidos, e sem necessidade de criar um *login* há o SageCell[3] que é uma iniciativa similar ao WolframAlpha[4]. Inclusive a célula de comandos pode ser hospedada em outros sites(ver por exemplo[5]).

[1]Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

O SageMathCloud tem funcionalidades para muitas áreas da Matemática e para o ensino e estudo, a comunidade de usuários e desenvolvedores vem crescendo, e é em geral a melhor alternativa gratuita do gênero.

Referências

[1] SageMathCloud, Disponível em: <https://cloud.sagemath.com>. Acesso em: 26 de mar. 2017.

[2] SageMathCloud in Teaching. Disponível em: <https://github.com/sagemathinc/smc/wiki/Teaching>. Acesso em: 26 de mar. 2017.

[3] SageCell. Disponível em: <https://sagecell.sagemath.org/>. Acesso em: 26 de mar. 2017.

[4] WolframAlpha. Disponível em: <https://www.wolframalpha.com/>. Acesso em: 26 de mar. 2017.

[5] Uso do Sage no Site do Departamento de Matemática Da UFRPE. Disponível em: <http://www.dm.ufrpe.br/sagemath>. Acesso em: 26 de mar. 2017.

4. Indicações de Leituras

SINGH, Simon. **O Último Teorema de Fermat.** Rio de Janeiro-Record-1998.

Gabriel Guedes[2]

Em "O Último Teorema de Fermat", Simon Singh conta a história de Andrew Wiles desde sua infância no interior da Inglaterra, em que começa a ter contato com vários livros de matemática na biblioteca local, até chegar na fase adulta, onde se torna um matemático brilhante. Sempre tendo como fio condutor a relação de Wiles com um grande problema da matemática, conhecido como o último teorema de Fermat, conjecturado por Pierre de Fermat e que permaneceu por mais de 320 anos sem solução.

O livro descreve como Wiles dedicou 10 anos da sua vida para resolver tal problema, das críticas sofridas, feitas por seus colegas que o acusavam de não estar trabalhando em nada. Bem como após tornar pública sua solução, ter sido frustrado com uma falha encontrada nela, cuja correção só foi possível graças a ajuda de seu aluno de doutorado Richard Taylor.

O livro tem um ritmo digno dos romances policiais, em nenhum momento se torna entediante e mostra as agruras e a gloria do personagem principal. Além do mais, o livro traz em seu apêndice uma pitada de matemática, como por exemplo, exibe uma prova de que a raiz quadrada de dois é um número irracional.

5. Eventos

Este é um ano importantíssimo para a matemática no que diz respeito a grandes eventos realizados no Brasil.

Fiquem Ligados!!!

- **58th International Mathematical Olympiad**
  - Local: Rio de Janeiro - RJ
  - Data: 12 a 23 de Junho
  - http://www.imo2017.org.br
- **I SEMPECIM - 1ª Semana do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática**
  - Local: Rio Branco - AC
  - Data: 10 a 12 de Julho
  - https://www.even3.com.br/SEMPECIM

[2]Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

- **31º Colóquio Brasileiro de Matemática**
  - Local: Rio de Janeiro-RJ
  - Data: 30 Julho a 05 de Agosto
  - http://impa.br/eventos-do-impa/eventos-2017

6. Problemas

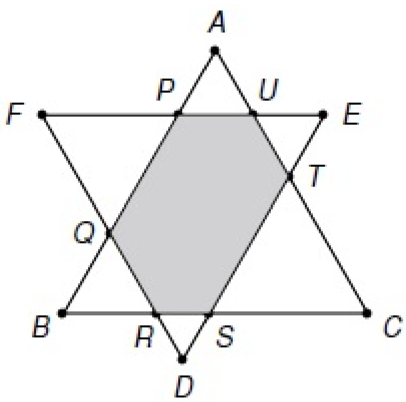
Para concluir deixamos para o leitor alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Problema 1 (*XXVI Olimpíadas paulista de matemática*). A sequência de Fibonacci é definida da seguinte forma: o termo 0, representado por F_0 é igual a 0, o termo 1 representado por F_1 é igual a 1 e, a partir do termo 2, cada termo, representado por é igual a soma dos dois anteriores, por exemplo: o termo 2, representado por F_2 é igual a $F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$, o termo 3, representada por $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$ e assim por diante. Dessa forma, os primeiros termos dessa sequência são: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, ...

(a) Calcule os termos F_8, F_9, F_{10} e F_{11}

(b) F_{2002} é par ou impar? Justifique sua resposta.

Problema 2 (*2ª Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas*). Na figura, os triângulos ABC e DEF são equiláteros de lados $14\,cm$ e $13\,cm$, respectivamente, e os lados BC e EF são paralelos.



(a) Calcule a medida do ângulo $E\widehat{U}T$

(b) Calcule o perímetro do quadrilátero $PQRSTU$

(c) Se o segmento PQ mede $6cm$, qual é a medida do segmento ST?

Problema 3 (*XXXV Olimpíadas Cearense de Matemática*). Um inteiro positivo n diz-se invocado se existam n inteiros positivos $a_1, \ldots, a_n$, dois a dois distintos, tais que

$$1 = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$

Por exemplo o número 3 é invocado pois,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

Mostre que todo inteiro $n > 2$ é invocado.

Mandem soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, sua solução deve ser enviada até **01/09/2017**.