É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Volume 1, Número 1, Abril de 2017
ISSN: 2526-8651

Sumário

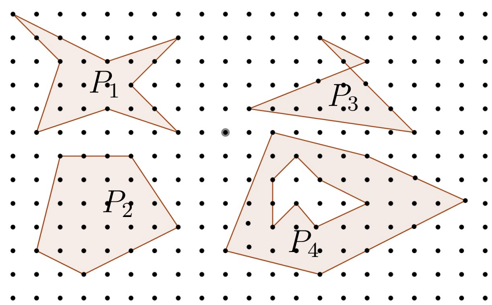
1. Artigo

Aplicando Pick em questões de Olimpíadas

Jacqueline Rojas

UFPB - CCEN - Departamento de Matemática
Campus I - Cidade Universitária
58051-900 - J. Pessoa - PB - Brasil

Em 1899 o matemático austríaco *Georg Alexander Pick* (1859-1942) publicou no artigo *Geometrisches zur Zahlenlehre* (*Resultados Geométricos em Teoria dos Números*) um resultado sobre a geometria dos reticulados, que trata sobre o cálculo da área de um $\mathcal{P}$-polígono[1] cujos vértices são pontos de um reticulado, como ilustra a figura a seguir:



Somente P_1 e P_2 são $\mathcal{P}$-polígonos

a partir da contagem de pontos do reticulado que se encontram nos lados e no interior do polígono, da seguinte forma:

Teorema 1.1 (Teorema de Pick)**.** *Se* $\mathbf{P}$ *for um* $\mathcal{P}$-*polígono cujos vértices estão sobre um reticulado. Então a área de* $\mathbf{P}$, $A_{\mathbf{P}}$, *é dada por:*

$$A_{\mathbf{P}} = \mathfrak{i} + \frac{\mathfrak{f}}{2} - 1,$$

sendo $\mathfrak{i}$ *e* $\mathfrak{f}$ *a quantidade de pontos do reticulado que se encontram no interior e nos lados do polígono* $\mathbf{P}$, *respectivamente.*

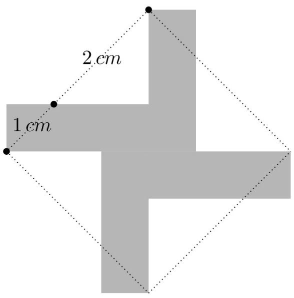
A essência na demonstração deste teorema é o fato de que todo $\mathcal{P}$-polígono pode ser dividido numa união finita de triângulos. Assim, o Teorema de Pick pode ser usado não somente para o cálculo

[1] Um polígono diz-se $\mathcal{P}$-*polígono* quando não possui buracos no seu interior e seus lados não adjacentes não se interceptam.

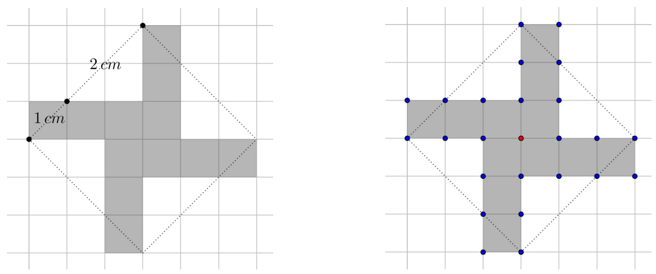
de áreas de $\mathcal{P}$-polígonos. Agora, vale salientar que o surpreendente neste resultado é que nos permite substituir o processo habitual de cálculo de uma área, que envolve medições de grandezas contínuas, por uma contagem de grandezas discretas.

A seguir, vamos usar o Teorema de Pick para resolver de uma maneira diferente do gabarito que se encontra no site da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), a Questão 18, 1^a fase-nível 1 da 36ª e 38ª OBM, respectivamente:

A região cinza na figura ao lado é formada pela união de quatro retângulos iguais, sem buracos nem sobreposições. A linha pontilhada é um quadrado. Qual é a área da região cinza?



A partir dos dados deste problema concluímos que podemos colocar a região plana (acima) no seguinte reticulado:

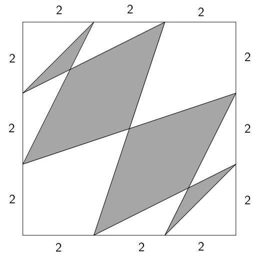


$$\mathfrak{i} = 1 \text{ e } \mathfrak{f} = 24$$

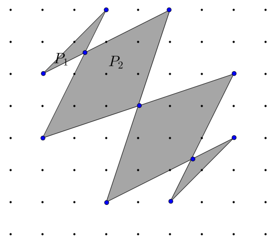
Na região a direita (da figura acima) indicamos em azul (respectivamente, em vermelho) os pontos do reticulado que se encontram nos lados (respectivamente, no interior). Assim, aplicando o Teorema de Pick, obtemos que a área da região em questão é igual a $1+\frac{24}{2}-1 = 12u$, sendo u a área do quadrado padrão desse reticulado, neste caso a diagonal desse quadrado mede $1\,cm$, logo sua área é igual a $\frac{1}{2}\,cm^2$. Portanto, a área da região é igual a $6\,cm^2$.

A seguir, vamos abordar a questão 18 (1^a fase-nível 1) da 38ª OBM. O leitor pode conferir que a resolução do gabarito da OBM apela para uma engenhosa divisão da região em triângulos semelhantes.

Na figura, as medidas são dadas em centímetros. Qual é a área da região cinzenta no interior em centímetros quadrados?



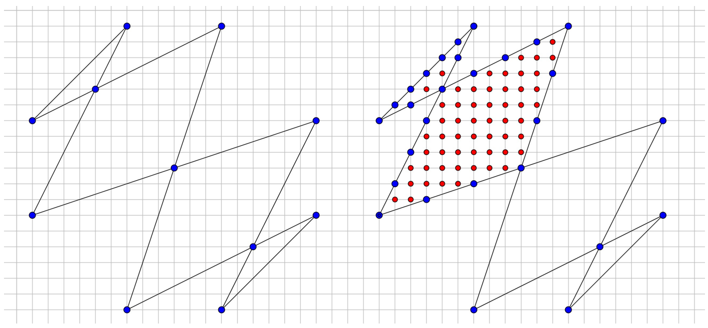
De acordo com as informações é natural colocar a região plana em questão num reticulado cujo quadrado padrão tem uma unidade de área ($1\ cm^2$) como ilustra a figura a seguir:



Note que, por conta da simetria da região, a área que queremos determinar é igual a

$$2(A_{P_1} + A_{P_2}).$$

Só que não podemos aplicar Pick (neste reticulado), uma vez que o vértice comum aos polígonos P_1 e P_2 não pertence a esse reticulado. Entretanto, se prestarmos bastante atenção (feito o professor aposentado *Ramón Mendoza* do DM-UFPE) percebemos que se refinarmos o reticulado, de modo que o quadrado padrão tenha lado de comprimento $\frac{1}{3}\,cm$. Nesse novo reticulado a região se representa da seguinte forma:



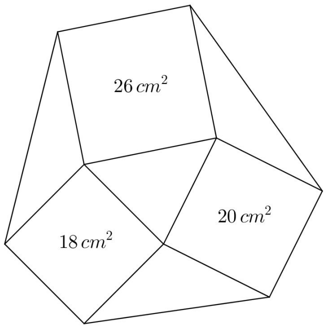
Na região a direita (da figura acima) indicamos em azul (respectivamente, em vermelho) os pontos do reticulado que se encontram nos lados (respectivamente, no interior) dos polígonos P_1 e P_2. Assim, aplicando o Teorema de Pick, obtemos:

Polígono	$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{f}$	Área do polígono
P_1	2	10	$A_{P_1} = 2 + \frac{10}{2} - 1 = 6$
P_2	54	14	$A_{P_2} = 54 + \frac{14}{2} - 1 = 60$

Assim a área da região é igual a $2 \cdot 66 = 132$ unidades de área. Como o quadrado padrão desse reticulado tem área $\frac{1}{9}\,cm^2$, concluímos que a área da região é $\frac{132}{9} = \frac{44}{3}\,cm^2$.

Para concluir, deixamos ao leitor um problema retirado do livro Amusements in Mathematics (Entretenimentos em Matemática) para se divertir usando o Teorema de Pick.

A figura ao lado mostra três quadrados de áreas 26, 18 e 20 cm^2, conforme indicado na figura. Qual é a área do hexágono mostrado na figura?



Referências

[1] H. E. Dudeney, *Amusements in Mathematics* (*Dover Recreational Math*), First edition 1917. Dover edition 1958.

[2] G. Pick, *Geometrisches zur Zahlenlehre*, Sitzungsberichte des deutschen naturwissenschaftlich-medicinischen Vereines für Böhmen "Lotos"in Prag. (Neue Folge). 19: 311-319 (1899).

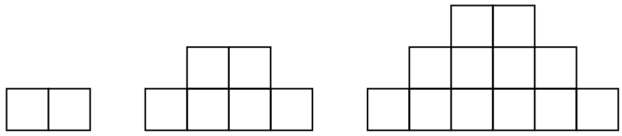
[3] Olimpíada Brasileira de Matemática, *Provas e Gabaritos da OBM*. Acesso em 17/11/2016 http://www.obm.org.br/opencms/provas_gabaritos

[4] J. N. Tavares, *Teorema de Pick o cálculo da área de polígonos*. Acesso em 17/11/2016 http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/pick2.html

2. Soluções de Olimpíadas

Nesta primeira edição apresentaremos a resolução de três questões discursivas da prova da OPEMAT (Olimpíada Pernambucana de Matemática) do ano de 2016 referentes ao nível 1.

Questão 1. Quadrados de lado 1 cm são empilhados formando sucessivamente figuras com 2 quadrados na base, 4 quadrados na base, 6 quadrados na base, e assim por diante.



Observação: O perímetro dessa figura é o comprimento da linha que delimita a mesma. Por exemplo, a primeira figura acima tem perímetro 6 cm e a segunda tem perímetro 12 cm.

a) Qual o perímetro da figura que tem 2016 quadrados em sua base?

b) Qual a área da figura que tem 2016 quadrados em sua base?

Questão 2. Igor é filho de Sílvio que por sua vez é filho de João. A idade de João somada com a idade de seu neto Igor resulta em 78. A idade de João somada com a idade de Sílvio é 96. Descubra quais são as idades de João, Igor e Sílvio sabendo que todas essas idades são números primos e que a soma dos algarismos das idades dos três é 26.

Questão 3. Encontre o valor da soma S dada por:

$$S = \frac{1}{2016 \cdot 2015} + \frac{1}{2015 \cdot 2014} + \cdots + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 1}.$$

Resolução

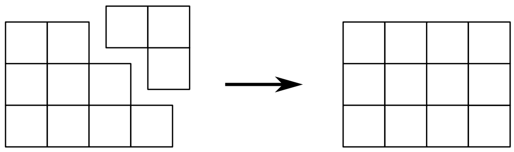
Questão 1

a) Observe que a soma dos segmentos horizontais é igual a duas vezes o comprimento máximo horizontal (base), e que a soma dos segmentos verticais é igual a duas vezes a altura máxima. A altura máxima é igual à base dividida por 2, isto é, a altura máxima é igual à metade da base. Por exemplo, na primeira figura é $\dfrac{2}{2} = 1$ cm , na segunda é $\dfrac{4}{2} = 2$ cm e na terceira é $\dfrac{6}{2} = 3$ cm. Assim, na figura que tem 2016 quadrados na base, a altura é $\dfrac{2016}{2} = 1008$ cm. Logo, o perímetro é dado por:

$$2 \times 2016 + 2 \times 1008 = 4032 + 2016 = 6048\,\text{cm}.$$

Também podemos observar que em cada figura o perímetro é dado pelo triplo do comprimento máximo horizontal (base). Por exemplo, na primeira figura o perímetro é $3 \times 2 = 6$ cm, na segunda é $3 \times 4 = 12$ cm e na terceira é $3 \times 6 = 18$ cm. Logo o perímetro da figura que tem 2016 quadrados na base é $3 \times 2016 = 6048\,\text{cm}$.

b) Seja b a base da figura, observe que a área pode ser calculada somando-se 1 cm a metade da base e depois multiplicando pela altura. Por exemplo, na primeira figura é $(1+1) \times 1 = 2$ cm^2, na segunda é $(2+1) \times 2 = 6$ cm^2, na terceira é $(3+1) \times 3 = 12$ cm^2. Como podemos perceber na figura para o caso em que há 6 quadrados na base:



Portanto na figura que possui b quadrados na base, a área é $\left(\dfrac{b}{2}+1\right) \times \dfrac{b}{2}$. Assim na figura que tem 2016 quadrados na base, a área é:

$$(1008+1) \times 1008 = 1.017.072\,\text{cm}^2.$$

$\blacksquare$

Questão 2

Vamos denotar a idade de Igor por I, a idade de Sílvio por S e a idade de João por J. Do enunciado temos que $I + J = 78$ e $S + J = 96$. Subtraindo essas equações obtemos $S - I = 18$. Como Sílvio é filho de João $J < S$. Assim $96 = S + J > S + S$ o que nos dá $S < 48$. Como $S = 18 + I$, onde I é número primo temos que $S \geq 23$. Assim temos que encontrar S de modo que $S - 18 = I$ é primo e tal que $96 - S$ também é primo com $23 \leq S < 48$. Vamos organizar essa informação em uma tabela:

S	$S-18=I$	$S-18$ é primo?	$96-S=J$	$96-S$ é primo?
23	5	sim	73	sim
29	11	sim	67	sim
31	13	sim	65	não
37	19	sim	59	sim
41	23	sim	55	não
43	25	não	53	sim
47	29	sim	49	não

Observando a tabela vemos que temos três possibilidades para as idades de Igor, Sílvio e João:

$$\begin{cases} J = 73, S = 23, I = 5 \\ J = 67, S = 29, I = 11 \\ J = 59, S = 37, I = 19 \end{cases}$$

Vamos analisar essas três possibilidades:

- Se $J = 73$, $S = 23$, $I = 5$ então a soma dos algarismos das três idades é $7+3+2+3+5 = 20 \neq 26$. Logo, essa solução está descartada.
- Se $J = 59$, $S = 37$, $I = 19$ então a soma dos algarismos das três idades é $5+9+3+7+1+9 = 34 \neq 26$. Logo, essa solução está descartada.
- Se $J = 67$, $S = 29$, $I = 11$ então a soma dos algarismos das três idades é $6+7+2+9+1+1 = 26$. Logo, essa é a solução do problema.

$\blacksquare$

Questão 3

S é uma soma finita de termos, então com paciência seria possível calcular cada uma das somas até encontrar a resposta. Seria porém necessário um tempo essencialmente grande, talvez mais do que a duração da prova e portanto essa não seria uma boa estratégia. Vejamos: Observe que somando apenas os dois primeiros termos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2016 \cdot 2015} + \frac{1}{2015 \cdot 2014} &= \frac{2014+2016}{2016 \cdot 2015 \cdot 2014} \\ &= \frac{4030}{2016 \cdot 2015 \cdot 2014}, \end{aligned}$$

Ao continuar as outras somas, percebemos que não é uma boa estratégia. Talvez tirando o mínimo e somando todos os termos, o cálculo tivesse um padrão fácil de observar,

$$S = \frac{2014! + 2016 \cdot 2013! + \cdots + 2016 \cdot 2015 \cdots 4 \cdot 3}{2016 \cdot 2015 \cdot 2014 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

ISSN:2526-8651

entretanto a expressão acima também não é simples de calcular.

Então precisamos pensar em como simplificar essa expressão sem usar essas duas estratégias. Note que no denominador de cada termo, aparece um produto de números que são consecutivos: $2016 \cdot 2015$, $2015 \cdot 2014$, e assim por diante. Já que estamos sem outras estratégias, vamos tentar ver isso como uma dica de resolver essa questão. Note que: $\dfrac{1}{2016 \cdot 2015}$ pode ser visto como soma de dois números da forma $\dfrac{a}{2016} + \dfrac{b}{2015}$, de fato,

$$\frac{1}{2016 \cdot 2015} = -\frac{1}{2016} + \frac{1}{2015}$$

Será que isso ajuda? Observe que o mesmo poderia ser feito para cada um dos outros termos,

$$\frac{1}{2015 \cdot 2014} = -\frac{1}{2015} + \frac{1}{2014},$$

$$\frac{1}{2014 \cdot 2013} = -\frac{1}{2014} + \frac{1}{2013}, \ \dots \ \frac{1}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}.$$

Daí quando somarmos os termos, muitos deles irão se cancelar, esse tipo de soma é conhecida como *soma telescópica*. Note que

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2016 \cdot 2015} + \frac{1}{2015 \cdot 2014} + \cdots + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 1} \\ &= \left(-\frac{1}{2016} + \frac{1}{2015}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2016} + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2015} + \frac{1}{2014} + \cdots - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2016} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2015}{2016}. \end{aligned}$$

■

3. Curiosidades

Detexify

Por Danilo da Nóbrega Santos[2]

Quem utiliza o LaTeX para produção de textos sabe como é demorado encontrar, dentro das abas do editor, o código de determinado símbolo seja matemático ou não. Uma forma rápida seria decorar todos os símbolos e seus respectivos códigos, mas isso seria uma tarefa sobre humana. Com o intuito de ajudar nessa questão e agilizar sua pesquisa por determinado símbolo, Philipp Khühl e Daniel Kirsch idealizaram e criaram o **Detexify**, que nada mais é que uma biblioteca de símbolos para o LaTeX.

O que a torna diferente das outras bibliotecas de símbolos e como funciona? É bem simples, basta acessar a pagina http://detexify.kirelabs.org e no quadro "Draw here!" ("Desenhe aqui!"), como o próprio nome sugere, desenhar o símbolo que deseja escrever no LaTeX e o site irá fornecer não apenas o código do símbolo, mas também o pacote necessário para que o mesmo seja compilado. Ah! Não precisa de dotes artísticos para utilizar essa valiosa ferramenta, pois ele também detecta possíveis variações do seu desenho (símbolo), e com certeza uma dessas variações será o símbolo desejado. Desenhou inúmeras vezes e não apareceu o símbolo que você procurava? Ainda não é o fim! No próprio site existe o contato do criador para que envie seus possíveis problemas. Usuários de Android e iOS também podem ter essa ferramenta em seus aparelhos, basta acessar suas respectivas lojas de aplicativos e instalar o Detexify.

Referências

[1] DETEXIFY LATEX HANDWRITTEN SYMBOL RECOGNITION, http://detexify.kirelabs.org

[2]Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

4. Indicações de Leituras

MLODINOW, Leonard. **O andar do bêbado**: Como o Acaso Determina Nossas Vidas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

Rodrigo Genuino Clemente[3]

Buscando fazer uma exposição de que o acaso não é apenas uma questão matemática, o físico teórico Leonard Mlodinow, autor de best-sellers sobre divulgação científica, nos mostra como tomamos decisões e fazemos nossos julgamentos muitas vezes baseados em falsas premissas. O fato é que a mente humana lida com a incerteza de maneira muito complexa, pois nossas crenças ou intuições podem nos levar a conclusões falhas. Segundo o próprio Stephen Hawking, Mlodinow nunca falha em tornar a ciência acessível e divertida. Fundamentado em teorias probabilísticas, encontramos em O andar do bêbado estudos em economia, psicologia e outras ciências de que o estado de um evento no presente não necessariamente determina como o futuro ocorrerá. Quando o simples bater de asas de uma borboleta pode causar uma perturbação atmosférica ao ponto de propiciar o surgimento de um tornado em outra região do planeta, o autor nos mostra uma crítica ao determinismo nos convidando a pensar sobre o quanto nossa vida foi afetada por situações totalmente aleatórias e que nossas ações individuais não se relacionam tão diretamente com os resultados desta ação como gostaríamos de acreditar. Já que não podemos nos livrar do acaso, Leonard Mlodinow nos lembra da observação de Thomas Edison de que "muitos dos fracassos da vida ocorrem com pessoas que não perceberam o quão perto estavam do sucesso no momento em que desistiram", isto é, persistência e determinação podem ser o segredo do sucesso.

5. Eventos

Este é um ano importantíssimo para a matemática no que diz respeito a grandes eventos realizados no Brasil.

Fiquem Ligados!!!

- **XII SNHM - Seminário Nacional de História da Matemática**
  - Local: Itajubá - MG
  - Data: 09 a 12 de abril
  - http://www.espacointerciencias.com.br/xiisnhm/apresentacao.html
- **IV Fórum de Discussão - Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil**
  - Local: São Carlos - MG
  - Data: 11 a 12 de abril
  - http://balizadoresedumat4.wixsite.com/
- **VIII Bienal de Matemática**
  - Local: Rio de Janeiro - RJ
  - Data: 23 a 30 de abril
  - http://www.sbm.org.br/bienal/
- **Festival de Matemática**
  - Local: Rio de Janeiro - RJ
  - Data: 27 a 30 de abril
  - http://www.festivaldamatematica.org.br/

[3]Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

6. Problemas

Para concluir deixamos para o leitor alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Problema 1. Três médicos devem examinar, durante o mesmo período de tempo (10 minutos), n pacientes, gastando 10 minutos com cada um deles. Cada um dos pacientes deve ser examinado pelos três médicos. De quantos modos pode ser feito um horário compatível?

Problema 2. Encontre todas as soluções de

$$p^5 - q^3 = (p+q)^2$$

na qual p e q são primos positivos.

Problema 3. Encontre todos os inteiros x, y, z tais que

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3.$$

Aguardamos suas resoluções!!!